Предисловие

Курс «Теоретические основы электротехники» в нашей стране становился в течение всего XX в. в условиях интенсивного развития промышленности, а также масштабного производства, преобразования, передачи и расширяющихся областей применения энергии электромагнитного поля. В Ленинграде он создавался и развивался действительными членами Академии наук СССР В. Ф. Миткевичем (его фотография на обложке), Л. Р. Нейманом и профессором П. Л. Калантаровым. После Великой Отечественной войны они создали и в 1948 г. издали уникальный учебник именно по курсу ТОЭ, который стал ведущим в СССР. Этот учебник был переведен и издан во многих странах и сыграл решающую роль в создании в них собственных школ по ТОЭ. В 1966 г. развитие курса ТОЭ нашло свое отражение в новом учебнике, созданном Л. Р. Нейманом и его учеником К. С. Демирчяном. Настоящий учебник по курсу ТОЭ выходит спустя 20 лет после его последнего, третьего издания.

Первоначальную программу работ по подготовке четвертого издания пришлось изменить после событий 1991 г. и последующего качественного изменения экономических и организационных основ мотивации подготовки научных и инженерных кадров в России. За 20 лет существенно изменились также технические средства вычислений и их доступность. Значительно повысилась роль информационных технологий в процессе обучения и профессиональной деятельности. В новый учебник пришлось ввести также и коррективы, связанные с уменьшением аудиторных часов непосредственного общения студентов с преподавателями и увеличением доли курса, осваиваемой самостоятельно. В этой связи учебник дополнен разделами, позволяющими обеспечить его самостоятельное освоение. Н. В. Коровкиным и В. Л. Чечуриным были разработаны и включены в учебник новые разделы, вопросы, методические указания, задачник и примеры решения наиболее типичных задач.

Столетний опыт преподавания курса ТОЭ в СССР и России показывает, что первоначальная ориентация курса на первичность понимания особенностей электромагнитных процессов в рассматриваемом конкретном устройстве над формально-расчетными методами приобретает все более важное значение. Развитие возможностей ЭВМ и их программного обеспечения в настоящее время и в перспективе таковы, что изучение расчетных методов для их освоения и развития перестает быть приоритетным. На передний план выступает необходимость понимания сути изучаемых явлений и методических основ стандартных программных средств для оценки надежности полученных численных и графических данных и их соответствия реальным особенностям рассчитываемого устройства или явления. Одной из важнейших задач предлагаемого учебника является создание у читателя именно умения и привычки вникать в суть физических явлений, происходящих в изучаемых системе или устройстве.

Следует отметить особую роль одного из авторов настоящего учебника, выдающегося ученого-электротехника, академика АН СССР Л. Р. Неймана, в развитии предмета и курса «Теоретические основы электротехники» не только в СССР, но и во многих странах, где этот предмет появился, благодаря его трудам и учебникам. Мне и моим ученикам В. Л. Чечурину и Н. В. Коровкину досталась

почетная и трудновыполнимая задача быть достойными продолжать традиции, заложенные в курс ТОЭ его основателями — заведующими кафедрой ТОЭ Ленинградского политехнического института академиками АН СССР Владимиром Федоровичем Миткевичем, Леонидом Робертовичем Нейманом и профессором Павлом Лазаревичем Калантаровым.

Авторы считают своим долгом прежде всего поблагодарить профессора И. Ф. Кузнецова за его большой труд по редактированию настоящего учебника, заведующего кафедрой ТОЭ Санкт-Петербургского государственного политехнического университета профессора В. Н. Боронина — за организацию работы по созданию учебника, заведующего кафедрой ТОЭ Московского энергетического института, члена-корреспондента РАН П. А. Бутырина и профессора В. Г. Миронова, оказавших помощь при издании учебника.

Авторы благодарны доценту Е. Е. Селиной и старшему преподавателю Т. И. Королевой за помощь в разработке вопросов, упражнений и задач. Весьма полезной была помощь аспирантов А. С. Адалева, Ю. М. Балагулы, Т. Г. Миневич, А. А. Потиенко и М. В. Эйдемиллера, которые подготовили решения предлагаемых задач, что помогло им при завершении работы над диссертациями. Авторы признательны кандидату технических наук А. Н. Модулиной и инженеру В. А. Кузьминой за неоценимую помощь в подготовке рукописи к печати, а также доцентам С. А. Важнову, С. Е. Виноградову, Р. П. Кияткину и всем сотрудникам кафедры ТОЭ Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, сделавшим полезные замечания при обсуждении новых разделов учебника на основе использованных в настоящем издании методических разработок кафедры.

Завершению и оформлению издания настоящего учебника в решающей степени способствовала финансовая помощь РФФИ.

Действительный член Академий наук СССР и России К. С. Демирчян

От издательства

Ваши замечания, предложения, вопросы отправляйте по адресу электронной почты comp@piter.com (издательство «Питер», компьютерная редакция).

Мы будем рады узнать ваше мнение!

На web-сайте издательства http://www.piter.com вы найдете подробную информацию о наших книгах.

Введение

Теоретическая электротехника в России и СССР развивалась на основе признания материальности электромагнитного поля и важности понимания картины протекания рассматриваемых физических процессов для их практического использования и описания в виде математических моделей. Развитие этой школы в течение XX столетия отличается освоением достижений в областях, главным образом, физики электромагнитных явлений и прикладной математики. Характерным для этого периода для ученых России и СССР следует считать практическую неделимость исследований физических явлений, разработки моделей этих явлений и решения прикладных задач, связанных с расчетом исследуемых физических величин.

Первые труды в области электричества в России принадлежат гениальному русскому ученому академику М. В. Ломоносову. М. В. Ломоносов, создавший в разных областях науки много замечательных трудов, посвятил большое число работ изучению электричества. В своих теоретических исследованиях он выдвигал положения, которые значительно опережали его эпоху, и ставил проблемы исключительной глубины. Так, по его предложению в 1755 г. Академия наук выдвинула в качестве конкурсной темы на премию задачу «сыскать подлинную електрической силы причину и составить точную ее теорию».

Современником М. В. Ломоносова был русский академик Ф. Эпинус. Ему принадлежит приоритет открытия термоэлектрических явлений и явления электростатической индукции. Особо следует отметить сделанный им в 1758 г. в Академии наук доклад на тему «Речь о родстве електрической силы и магнетизма».

В настоящее время нам хорошо известно, что между электрическими и магнитными явлениями существует неразрывная связь, и это положение лежит в основе современного учения об электромагнитных явлениях. Однако к такому убеждению научная мысль пришла лишь в итоге длительного накопления опытных фактов, и в течение долгого времени явления электрические и явления магнитные рассматривались как самостоятельные, не имеющие между собой связи. Первое обстоятельное научное сочинение о магнитных и электрических явлениях, принадлежащее Гильберту, вышло в 1600 г. В этом труде Гильберт пришел, однако, к неправильному заключению, что электрические и магнитные явления не имеют между собой связи.

Сходство между механическим взаимодействием электрически заряженных тел и механическим взаимодействием полюсов магнитов естественно привело к попытке одинаково объяснить эти явления. Возникло представление о положительной и отрицательной магнитных массах, распределенных на концах магнита и являющихся причиной магнитного взаимодействия. Однако подобное предположение, как нам теперь известно, не отвечает физической природе магнитных явлений. Оно возникло исторически по аналогии с представлением о положительном и отрицательном электричестве, отвечающем физической сущности электрических явлений. Согласно современным представлениям, электрический заряд любого тела образуется совокупностью зарядов, находящихся в непрерывном движении положительно или отрицательно заряженных элементарных частиц — протонов, электронов и т. д.

Количественные соотношения, характеризующие механические взаимодействия электрически заряженных тел и механические взаимодействия магнитных масс полюсов магнита, первым опубликовал в 1785 г. Кулон. Но уже Кулон обратил внимание на существенное различие между магнитными массами и электрическими зарядами.

Различие вытекает из следующих простых опытов. Нам без труда удается отделить друг от друга положительный и отрицательный электрические заряды, но никогда и ни в каких условиях не удается произвести опыт, в результате которого оказались бы отделенными друг от друга положительная и отрицательная магнитные массы. В связи с этим Кулон высказал предположение, что отдельные малые элементы объема магнита при его намагничивании обращаются в маленькие магнитики и что лишь внутри таких элементов объема положительные магнитные массы смещаются в одном направлении, а отрицательные — в противоположном направлении.

Однако если бы положительная и отрицательная магнитные массы имели самостоятельное существование внутри элементарных магнитиков, то все же можно было бы надеяться в каком-либо опыте, в котором осуществлялось бы непосредственное воздействие на эти элементарные магнитики, отделить отрицательную массу от положительной подобно тому, как, воздействуя на молекулу, имеющую суммарный электрический заряд, равный нулю, нам удается расщепить ее на отрицательно и положительно заряженные частицы — так называемые ионы. Но и в элементарных процессах никогда не обнаруживаются раздельно существующие положительная и отрицательная магнитные массы.

Раскрытие действительной природы магнитных явлений относится к началу позапрошлого столетия. Этот период знаменуется рядом замечательных открытий, установивших теснейшую связь между явлениями электрическими и явлениями магнитными.

В 1820 г. Эрстед произвел опыты, в которых обнаружил механическое воздействие электрического тока на магнитную стрелку.

В 1820 г. Ампер показал, что соленоид с током по своим действиям аналогичен магниту, и высказал мысль, что и для постоянного магнита действительной причиной возникновения магнитных действий являются также электрические токи, замыкающиеся по некоторым элементарным контурам внутри тела магнита. Эти идеи нашли конкретное выражение в современных представлениях, согласно которым магнитное поле постоянного магнита обусловлено элементарными электрическими токами, существующими в веществе магнита и эквивалентными магнитным моментам элементарных частиц, образующих вещество. В частности, эти элементарные токи являются результатом вращения электронов вокруг своих осей, а также вращения электронов по орбитам в атомах.

Таким образом, мы приходим к убеждению, что магнитных масс в действительности не существует.

Всеми упомянутыми исследованиями было установлено важнейшее положение, что движение электрически заряженных частиц и тел всегда сопровождается магнитными явлениями. Этим самым уже было показано, что магнитные явления не представляют собой, как полагал Гильберт, чего-либо самостоятельного, никак не связанного с явлениями электрическими. В 1831 г. Фарадей сооб-

щил об открытии явления электромагнитной индукции. Он обнаружил возникновение электрического тока в контуре, движущемся относительно магнита или относительно другого контура с током. Таким образом, было показано, что и электрические явления могут возникать как следствие процессов, относящихся к области магнитных явлений.

В 1833 г. русский академик Э. Х. Ленц впервые сформулировал чрезвычайно важное положение, в котором устанавливались общность и обратимость явлений, открытых Эрстедом и Фарадеем. В этом положении содержалась основа важного принципа обратимости электрических машин. Э. Х. Ленц установил правило определения направления индуктированного тока, выражающее фундаментальный принцип электродинамики — принцип электромагнитной инерции.

В связи со всеми этими открытиями необходимо особенно отметить основную идею, которой неизменно руководствовался в своих исследованиях Фарадей и которая была развита в трудах академика В. Ф. Миткевича, — идею о физической реальности процесса, совершающегося в пространстве между электрически заряженными телами и между контурами с электрическими токами. Согласно этим представлениям, взаимодействие заряженных тел, а также взаимодействие контуров с токами осуществляются через посредство окружающего их электромагнитного поля, являющегося особым видом материи.

Заслуга создания теории электромагнитного поля принадлежит Максвеллу, изложившему ее в классическом труде «Трактат об электричестве и магнетизме», вышедшем в 1873 г. Этот трактат содержит изложение в математической форме и дальнейшее углубление и расширение основных физических идей Фарадея.

Экспериментальное подтверждение и развитие максвелловой теории электромагнитного поля осуществлены Герцем (1886–1889 гг.) в его замечательных опытах по получению и распространению электромагнитных волн, в работах П. Н. Лебедева (1895 г.) по генерированию и распространению электромагнитных волн весьма короткой длины, в его классических опытах (1900–1910 гг.), в которых было экспериментально доказано давление света, в изобретении радио А. С. Поповым (1895 г.) и в осуществлении им радиосвязи, а также во всем дальнейшем развитии практической и теоретической радиотехники.

Все перечисленные открытия привели к признанию глубокой связи между явлениями электрическими и явлениями магнитными. В общей совокупности теоретических проблем, относящихся к области электромагнитных явлений, все большее развитие получает теория электрических и магнитных цепей. В основе теории электрических цепей лежат законы, установленные Омом (1827 г.), Джоулем (1841 г.), Ленцем (1842 г.) и Кирхгофом (1847 г.). В последующую разработку этой теории большой вклад внесли многие отечественные и зарубежные ученые.

В настоящее время в связи с чрезвычайным усложнением электроэнергетических систем, радиотехнической и электроизмерительной аппаратуры, систем автоматического контроля и управления, быстродействующих электронных вычислительных машин и информационных технологий возникает необходимость создания обобщенных методов анализа, при которых целые комплексы элементов электрической цепи, являющиеся частями этих сложных систем и выпол-

няющие определенные функции, рассматриваются с помощью их обобщенных параметров. Такими комплексами элементов цепи являются, например, генерирующие, передающие или преобразующие электромагнитную энергию устройства в электроэнергетических системах, генераторы, усилители и преобразователи сигналов в системах проводной связи, радио- и телепередачи, электрических измерений и автоматического управления и контроля, источники питания, блоки, выполняющие логические операции в электронных вычислительных машинах, дискретные цифровые преобразователи и т. п.

Эти отдельные комплексы включают в себя линейные элементы цепи, параметры которых не зависят от тока, например резисторы, индуктивные катушки, конденсаторы, а также нелинейные элементы цепи с параметрами, зависящими от тока или напряжения, например электронные лампы, транзисторы, индуктивные катушки с ферромагнитными сердечниками. Эти элементы цепи различным образом соединены между собой и образуют уже внутри таких комплексов достаточно сложные электрические цепи. Сами же комплексы, в свою очередь, тем или иным способом соединяются между собой, образуя сложные системы.

Обобщенные методы анализа сложных систем дают возможность исследовать взаимодействие этих отдельных комплексов, являющихся частями системы. Исходными для построения таких обобщенных методов являются те же основные физические законы электрических цепей — законы Ома и Кирхгофа, которые используются и для расчета сравнительно несложных электрических цепей.

Точно так же получает дальнейшее развитие теория электромагнитного поля в связи с развитием наземной и космической радиосвязи и радиоастрономии, а также со все более широким использованием электрических и магнитных полей и электромагнитных излучений в новых электротехнологических и электрофизических установках.

Все изложенное предъявляло всегда и особенно предъявляет в настоящее время требования к организации на высоком научном уровне высшего электротехнического образования. В этом отношении исторически имело большое значение создание первых научных дисциплин для высшей школы, в которых излагались теоретические проблемы электротехники. В 1904 г. профессор В. Ф. Миткевич начал читать в Петербургском политехническом институте созданный им курс «Теория явлений электрических и магнитных», а затем курс «Теория переменных токов». В 1905 г. профессор К. А. Круг начал чтение в Московском высшем техническом училище своего курса «Теория переменных токов», а затем курса «Основы электротехники».

В последующем эти теоретические дисциплины развивались в соответствии с новыми физическими идеями, новыми теоретическими и экспериментальными методами исследования электромагнитных явлений и исключительно быстрым развитием технических применений этих явлений и образовали дисциплину, имеющую ныне наименование «Теоретические основы электротехники».

Курс «Теоретические основы электротехники» содержит четыре части. Первая, сравнительно короткая часть, именуемая «Основные понятия и законы теории электромагнитного поля и теории электрических и магнитных цепей», содержит обобщение понятий и законов из области электромагнитных явлений на основе сведений, полученных в курсе физики, и развитие формулировок и опре-

делений основных понятий и законов теории электрических и магнитных цепей, относящихся ко всем разделам этой теории. Эта часть должна рассматриваться как связывающая курс физики с курсом теоретических основ электротехники и обеспечивающая физическое представление о процессах, происходящих в электрических и магнитных цепях и в электромагнитных полях. Она имеет большое значение для правильной математической формулировки задач, решаемых методами, излагаемыми в последующих частях курса. Освоение материала этой части имеет важное значение в связи с тем, что программное обеспечение современных и перспективных ЭВМ способно реализовать численные расчеты для широкого спектра математических моделей. Чтобы избегать ошибочных трактовок результатов расчета, представленных в виде численных и графических данных, специалистам необходимо глубокое понимание физической сути изучаемого явления.

Вторая, наибольшая по объему часть курса именуется «Теория линейных электрических цепей». В ней излагаются свойства линейных электрических цепей и методы расчета процессов в таких цепях. В основном в этой части рассмотрены методы анализа цепей, т. е. определение процессов в заданных цепях, но также уделяется внимание и синтезу и диагностике цепей, т. е. вопросам о построении электрических цепей с наперед заданными свойствами и методам экспериментального определения параметров реальных устройств. Линейными называют цепи, параметры всех элементов которых не зависят от тока и напряжения. По отношению к ним применим важный принцип, называемый принципом наложения. По принципу наложения следствия, вызываемые в некоторой физической обстановке совместным действием нескольких однородных причин, являются суммой следствий, вызываемых в той же физической обстановке каждой из этих причин в отдельности. Использование этого принципа дает возможность распространить результаты, полученные для простых случаев, на случаи более сложные. И наоборот, применение этого принципа позволяет расчленить сложную задачу на несколько более простых. Мы будем широко пользоваться принципом наложения при изучении линейных электрических цепей, а также при изучении электромагнитных полей в линейных средах, параметры которых не зависят от интенсивности процесса.

Третья часть имеет наименование «Теория нелинейных электрических и магнитных цепей». В ней излагаются свойства нелинейных электрических и магнитных цепей и методы расчета происходящих в них процессов. Параметры таких цепей зависят от тока, напряжения или магнитного потока, и это приводит к существенному усложнению математического анализа процессов в этих цепях. Вместе с тем эти вопросы имеют большое значение в связи с широким использованием элементов цепей с нелинейными характеристиками в современных устройствах.

Последняя, четвертая, часть имеет наименование «Теория электромагнитного поля». Многие электротехнические проблемы не могут быть полностью рассмотрены при помощи теории цепей и могут быть решены лишь методами теории электромагнитного поля. Прежде всего, для расчета параметров электрических и магнитных цепей необходимо знать электрические и магнитные поля, связанные с этими цепями. Это вполне закономерно, так как параметры элек-

трических и магнитных цепей, фактически, отражают в себе в интегральной форме конфигурацию электрических и магнитных полей, связанных с рассматриваемыми цепями, и физические свойства среды, в которой существуют эти поля. Ряд весьма важных вопросов может быть решен только методами, развиваемыми только в теории поля. К таким вопросам относятся, например, излучение электромагнитных волн антенной и распространение их в пространстве.

Наличие основных закономерностей, сформулированных в первой части курса, дает возможность начать рассмотрение теории электромагнитного поля с общих уравнений, характеризующих это поле в целом, и показать, что случаи, в которых выявляется только электрическое или только магнитное поле, представляют собой частные случаи, когда условия наблюдения таковы, что в некоторой ограниченной области пространства обнаруживается только одна сторона электромагнитного процесса. Этим ярко выделяется мысль о единстве электрических и магнитных явлений.

В учебник введено большое количество новых методических материалов в виде вопросов, указаний и примеров решения наиболее типичных задач, а также сборник задач. Эти новые разделы помогут восполнить ущерб, нанесенный непосредственному общению студентов с преподавателями в связи с уменьшением аудиторных часов. Они могут быть полезными для более сознательного и эффективного освоения тех разделов курса, которые должны быть изучены самостоятельно.

Вопросы, упражнения и задачи группируются так, чтобы они охватывали несколько разделов теоретического курса. Например, группа новых методических материалов следует после первой части курса (физические основы электротехники). Следующая группа вопросов, упражнений и задач объединяет второй раздел курса — основные понятия теории электрических и магнитных цепей. Таким образом, при изучении курса появляется возможность, используя эти методические материалы, закрепить полученные теоретические знания.

Сложность предлагаемых вопросов и упражнений различна, вопросы и упражнения по разделу курса расположены по мере возрастания их сложности. Наиболее сложные упражнения выделены в группы задач.

Подбор вопросов, упражнений и задач осуществлялся из соображений не только усвоения теоретической части курса, но и более углубленного понимания и изучения наиболее сложных идей и методов теоретической электротехники. Некоторые из предлагаемых вопросов и задач могут оказаться трудными для изучающих курс студентов, но будут полезными не только для них, но и для аспирантов и инженеров.

Заключенные в скобки буквы (О) и (Р) в разделах «Вопросы, упражнения, задачи...» означают, что в конце тома приведены ответ на соответствующий вопрос и решение упражнения или задачи.

Содержание, расположение и изложение этого методического материала в учебнике таковы, что существенно облегчается процесс самостоятельного или заочного освоения курса ТОЭ.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ

Глава первая

Обобщение понятий и законов электромагнитного поля

1.1. Общая физическая основа задач теории электромагнитного поля и теории электрических и магнитных цепей

Электромагнитное поле является тем основным физическим агентом, который широко применяется в технических и физических устройствах для передачи и преобразования энергии или сигналов. Связанные с электромагнитным полем процессы характерны тем, что требуют описания электромагнитного поля во времени и в пространстве. Это предопределяет необходимость развития методов теории электромагнитного поля. Сложный характер описания электромагнитных явлений в конкретных устройствах заставляет изыскивать способы расчета этих процессов главным образом в зависимости от времени, что связано с развитием теории электрических цепей.

Выделив определенные устройства, в которых проявляются те или иные особенности электромагнитного поля, в качестве элементов электрических цепей, мы получаем возможность использовать теорию электрических цепей для создания новых сложных приборов и устройств, выполняющих заданные функции.

Теория электрических цепей получила исключительно большое развитие именно благодаря тому обстоятельству, что она дает возможность упростить расчеты электромагнитных процессов. Вместе с тем эти упрощения в своей основе содержат ряд допущений и предположений, которые необходимо осознать и оценить, для чего необходимо располагать четкими знаниями основных физических законов электромагнитных явлений и их широких обобщений.

Первые две главы первой части курса и предназначены служить таким физическим фундаментом для последующих частей, в которых будут излагаться математические методы расчета электрических и магнитных цепей и электромагнитных полей. Наличие такого фундамента обеспечит критическое отношение к исходным положениям формальных математических методов и исключит воз-

Чувашский
гос. университет
БИБЛИОТЕКА

можные ошибки при их формулировании. Это обеспечит также рассмотрение физической стороны процессов в электрических цепях и электромагнитных полях, описываемых формальными методами. В конце первой части, в ее третьей главе, мы сможем при таком подходе ввести основные понятия теории электрических и магнитных цепей, основываясь на физических представлениях об электромагнитных явлениях и, следовательно, давая себе ясный отчет в принимаемых при этом допущениях.

1.2. Заряженные элементарные частицы и электромагнитное поле как особые виды материи

Исследования в области электромагнитных явлений дали основные идеи и инструменты для создания современных представлений о строении вещества. Особо важное место в этих исследованиях заняли элементарные заряженные частицы — с положительным элементарным электрическим зарядом (например, протон и позитрон) и отрицательным элементарным электрическим зарядом (например, электрон). Элементарные заряженные частицы входят в состав атомов и молекул веществ, а также могут быть и в свободном состоянии. Они находятся в непрерывном движении и окружены, как мы говорим, электромагнитным полем, которое в зависимости от характера этого движения может проявляться в виде электрического или магнитного поля. Обладающие электрическим зарядом частицы и их электромагнитное поле представляют собой особый вид материи в том смысле, что им присущи свойства, не учитываемые при рассмотрении других, например механической, форм движения материи.

Электрический заряд этих частиц является их важнейшим физическим свойством, характеризующим взаимосвязь частиц с собственным электромагнитным полем и их взаимодействие с внешним электромагнитным полем. Электрический заряд — основное отличительное свойство этих частиц материи, обладающих также и другими свойствами: массой, энергией и т. д., — присущими и другим формам движения материи, изучаемым, например, в механике.

Движение материи, с которым мы связываем понятие об электрически заряженной частице, а также понятие об электромагнитном поле не может быть сведено к механическому движению, и электромагнитные явления не могут быть сведены к явлениям, изучение которых составляет предмет механики. В механике рассматривается движение в пространстве материальных тел, обладающих инертной массой. То, что эти тела могут обладать электрическими зарядами, а также то, что сами тела состоят из положительно и отрицательно заряженных элементарных частиц, совершенно не входит в круг вопросов, рассматриваемых в механике. Поэтому и естественно, что из законов механики не могут быть выведены более глубокие законы электромагнитных явлений.

Для характеристики электромагнитных явлений необходимо ввести новые понятия, которые не рассматриваются механикой и принципиально не могут быть полностью определены только через величины, достаточные для построения механики, например только через массу, длину и время. Необходимо ввести четвертую основную величину, отражающую специфику электромагнитных явлений. Таковой может быть выбрана любая электромагнитная величина, например электрический заряд. Количественно электрический заряд частицы материи

или тела может быть определен только по их взаимодействию с другой электрически заряженной частицей или другим заряженным телом или же по их взаимодействию с внешним электромагнитным полем.

Точно так же не представляется возможным при определении понятия об электромагнитном поле обойтись без использования понятия о заряженной частице, так как основным отличительным от других видов материи свойством электромагнитного поля является его силовое воздействие на заряженные частицы. Силовое воздействие электромагнитного поля на заряженные частицы носит векторный характер и зависит от скорости движения частиц и значения их электрического заряда. В соответствии со сказанным выше можно дать следующие определения.

Электромагнитное поле есть вид материи, определяющийся во всех точках двумя векторными величинами, которые характеризуют две его стороны, называемые «электрическое поле» и «магнитное поле», оказывающий силовое воздействие на заряженные частицы, зависящее от их скорости и значения их заряда.

Элементарный электрический заряд есть свойство электрона или протона, характеризующее их взаимосвязь с собственным электрическим полем и их взаимодействие с внешним электрическим полем, определяемое для электрона и протона численными значениями, равными по абсолютной величине, но противоположными по знаку (при этом условно отрицательный знак приписывается заряду электрона, а положительный — заряду протона).

В свете этих определений любая заряженная частица, содержащая один или несколько элементарных электрических зарядов, является носителем заряда. Например, носителями заряда являются электрон, протон, ион, а также условно и «дырка» в полупроводнике.

По сути дела, заряженные элементарные частицы и их электромагнитное поле представляют собой единое целое. Строго говоря, мы не можем указать точной границы между частицей с электрическим зарядом и ее электромагнитным полем. Вместе с тем все же можно полагать, что частица и ее электрический заряд, например заряд электрона, протона и т. д., сосредоточены в весьма малой области пространства. Именно для этой весьма малой области пространства характерна та форма движения материи, с которой связывается понятие об электрически заряженной частице. Вне этой области на первый план выступает то физическое явление, та форма движения материи, с которыми мы связываем понятие об электромагнитном поле. Это обстоятельство дает возможность ввести представление о том, что электрический заряд элементарной частицы, как и сама частица, занимает только некоторую ограниченную область пространства. Согласно такому представлению, в пространстве, окружающем эту область, существует только связанное с обладающей зарядом частицей электромагнитное поле.

При такой широко используемой научной абстракции возникает необходимость дать наименование той области пространства, в которой существует электромагнитное поле, но в которой отсутствуют известные нам частицы материи. В дальнейшем для обозначения такой области пространства условимся применять термин пустота. Этот термин будем относить только к понятию о пространстве как форме существования материи в виде поля, но не к происходящим в этом пространстве физическим процессам, помня при этом, что пространство

неотделимо от происходящих в нем материальных процессов, что абсолютно пустого пространства, не заполненного физической материей, нет и не может быть и что в той области пространства, которую будем называть пустотой, всегда существует электромагнитное поле, а также поле тяготения, представляющие собой особые виды материи.

Нередко, стремясь избежать слова «пустота», используют в аналогичном смысле термин в а к у у м. Однако слово «вакуум» находит широкое применение в вакуумной технике, где понимается в ином смысле, а именно как степень разрежения. Говорят о низком, среднем или высоком вакууме, о вакуумметрах — приборах для измерения вакуума. Термин «пустота» в этом отношении является более определенным — он означает предельное значение вакуума при указанной выше абстракции, когда предполагается, что в некоторой области пространства материя существует только в форме поля.

Следует отметить, что если обладающую зарядом элементарную частицу вещества нельзя мыслить без ее электромагнитного поля, то электромагнитное поле может существовать в свободном состоянии, отделенное от частицы. Таковыми являются фотон, а также электромагнитное поле, излученное антенной. Электромагнитное поле в свободном состоянии, не связанное с частицами вещества, распространяется в пустоте при отсутствии весьма сильных гравитационных полей с естественной для него скоростью $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ м/с $\approx 3 \cdot 10^8$ м/с.

В веществе, а также при наличии весьма сильных гравитационных полей, т. е. вблизи весьма больших масс вещества, скорость распространения электромагнитного поля меньше величины c.

Для измерения электромагнитных величин будем пользоваться международной системой единиц СИ (система интернациональная). Эта система содержит семь основных единиц: *метр* — единица длины, *килограмм* — единица массы, *секунда* — единица времени, *ампер* — единица силы электрического тока, *кельвин* — единица термодинамической температуры, *моль* — единица количества вещества, *кандела* — единица силы света. Она охватывает единицы механических, электромагнитных, тепловых и световых величин.

Для измерения электромагнитных величин необходимо и достаточно иметь четыре основные единицы соответственно тому, что было сказано ранее о необходимости принятия четырех основных величин в области учения об электромагнитных явлениях. Остальные электромагнитные величины и, соответственно, их единицы являются производными от выбранных четырех основных, т. е. могут быть установлены с помощью тех или иных закономерностей. В системе единиц СИ в качестве четвертой основной единицы для электромагнитных величин принят *ампер* — единица силы электрического тока. Это сделано потому, что именно единица силы тока может быть в настоящее время определена абсолютным методом с наибольшей точностью на основе измерения механического взаимодействия электрических токов в пустоте с помощью токовых весов.

Система единиц МКСА (метр, килограмм, секунда, ампер) является частью системы СИ. Система МКСА связана с рационализованной системой уравнений электромагнитного поля, в которой множитель 4π расположен в уравнениях в наиболее естественном месте, а именно: он явно входит в те зависимости, кото-

рые соответствуют случаям, характеризующимся сферической симметрией. Весьма существенно также, что при рационализованной форме уравнений электромагнитного поля достигается симметрия зависимостей, относящихся к электрическим и магнитным величинам.

Единицей электрического заряда (количества электричества) является *кулон* (Кл).

1.3. Связь между электрическими и магнитными явлениями. Электрическое и магнитное поля как две стороны единого электромагнитного поля

Любое электромагнитное явление, рассматриваемое в целом, характеризуется двумя сторонами — электрической и магнитной, между которыми существует тесная связь. Так, электромагнитное поле имеет две взаимосвязанные стороны — электрическое поле и магнитное поле. Важнейшей нашей задачей в первой главе будет рассмотрение связи между электрическими и магнитными явлениями. Вместе с тем можно создать условия, когда в некоторой области пространства обнаруживаются только электрические или только магнитные явления. Например, вне заряженных неподвижных проводящих тел обнаруживается только электрическое поле. Аналогично в пространстве, окружающем неподвижные постоянные магниты, обнаруживается только магнитное поле. Однако и в этих случаях, если рассматривать явление в целом, нетрудно усмотреть как электрическую, так и магнитную его стороны. Так, заряды неподвижных заряженных тел образуются совокупностью зарядов элементарных заряженных частиц, движущихся хаотически около поверхностей тел. Каждая такая частица окружена электромагнитным полем, но вследствие хаотического движения частиц их результирующее магнитное поле практически исчезает уже на ничтожных расстояниях от поверхностей тел. Электрические же поля частиц при избытке на теле частиц с зарядами того или иного знака суммируются и обнаруживаются в окружающем тела пространстве. В окружающем неподвижные постоянные магниты пространстве, наоборот, взаимно компенсируются электрические поля элементарных частиц, образующих вещество магнитов, вследствие равенства суммарных зарядов положительно и отрицательно заряженных частиц. Магнитные поля вследствие согласованного движения частиц, возникшего при намагничивании магнитов, суммируются в пространстве, окружающем магниты. Таким образом, и в этих особых случаях, когда в некоторой области пространства обнаруживается только электрическое поле или только магнитное поле, явление в целом оказывается электромагнитным. Но весьма важно в этом смысле, и это будет особо рассмотрено дальше, что в переменном электромагнитном поле само электрическое поле возникает вследствие изменения во времени магнитного поля и, в свою очередь, возникновение магнитного поля является результатом изменения во времени электрического поля.

Электрическое поле создается электрическими зарядами, а также изменяющимся магнитным полем. Магнитное поле создается движущимися заряженными частицами, а также изменяющимся электрическим полем.

Для обнаружения электрического и магнитного полей можно воспользоваться тем или иным их проявлением.

Электрическим полем называют одну из сторон электромагнитного поля, характеризующуюся воздействием на электрически заряженную частицу с силой, пропорциональной заряду частицы и не зависящей от ее скорости.

Для выявления электрического поля достаточно взять неподвижное заряженное тело, так как независимость силы от скорости позволяет выбирать любые скорости, в том числе и нулевую.

Для исследования электрического поля, которое характеризуется непрерывным распределением в пространстве, необходимо взять пробное точечное заряженное тело, имеющее столь малые линейные размеры, что в пределах малого объема, занимаемого этим телом, исследуемое поле можно рассматривать как однородное. Это условие обеспечивается, если линейные размеры пробного тела пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием от него до других тел. Кроме того, заряд пробного тела должен быть достаточно малым, чтобы его внесение не вызвало сколь-нибудь заметного перераспределения зарядов на других телах.

В соответствии с тем, что электрическое поле непрерывно распределено в пространстве, в каждой точке пространства и в каждый момент времени пробное заряженное тело будет испытывать вполне определенную по значению и направлению механическую силу. Пользуясь этим, можно определить *основную физическую величину,* характеризующую электрическое поле в каждой его точке и называемую напряженностью электрического поля.

Напряженность электрического поля есть векторная величина, характеризующая электрическое поле и определяющая силу, действующую на заряженную частицу со стороны электрического поля.

(Везде далее буквы, обозначающие векторные величины, набраны жирным курсивным шрифтом.)

Напряженность электрического поля изображают вектором $\boldsymbol{E}$, по направлению совпадающим с вектором $\boldsymbol{f}$ механической силы, действующей на положительно заряженное пробное тело. Имеем

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{f}}{q_0}.$$

Полное отсутствие влияния заряда q_0 на распределение зарядов, определяющих исследуемое поле, будет при q_0, стремящемся к нулю. Соответственно, можно дать следующее точное определение.

Напряженность электрического поля есть векторная величина, равная пределу отношения силы, с которой электрическое поле действует на неподвижное точечное заряженное тело, внесенное в рассматриваемую точку поля, к заряду этого тела, когда этот заряд стремится к нулю, и имеющая направление, совпадающее с направлением силы, действующей на положительно заряженное точечное тело:

$$\boldsymbol{E} = \lim_{q_0 \to 0} \frac{\boldsymbol{f}}{q_0}.$$

Определив напряженность поля во всех его точках, можно провести ряд линий так, чтобы в каждой точке этих линий касательные к ним совпадали по направлению с вектором напряженности поля (рис. 1.1). Эти линии называют л и -

ниями напряженности электрического поля. На чертеже их изображают со стрелками, указывающими направление вектора $\boldsymbol{E}$. Совокупность таких линий образует картину электрического поля.

Вообразим замкнутый контур, ограничивающий некоторую поверхность, и проведем через все точки этого контура линии напряженности поля. Совокупность этих линий образует трубчатую поверхность. Область электрического поля, ограниченную такой трубчатой поверхностью, называют трубкой напряженности поля.

На рис. 1.1 изображена картина электростатического поля около двух заряженных тел с равными и противоположными по знаку зарядами. На рисунке показан также ряд линий напряженности электрического поля, проходящих через точки контура, ограничивающих поверхность s и образующих трубку напряженности поля.

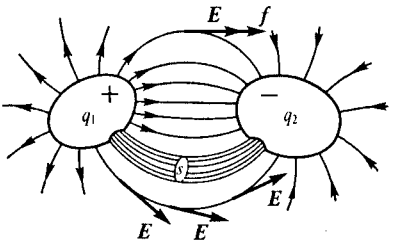


Рис. 1.1

В соответствии с вышеизложенным любое неподвижное точечное тело с зарядом q испытывает в электромагнитном поле силу

$$\boldsymbol{f}_1 = q\boldsymbol{E}.$$

Эта сила, согласно данному выше определению, возникает под действием электрического поля.

Если сила, действующая на движущуюся заряженную частицу, зависит и от скорости движения, то это означает, что кроме силы электрического поля на частицу действует также и дополнительная сила f_2, возникновение которой приписываем наличию магнитного поля.

В соответствии с этим *магнитным полем называют одну из двух сторон электромагнитного поля, характеризующуюся воздействием на движущуюся электрически заряженную частицу с силой, пропорциональной заряду частицы и ее скорости.*

Отсюда следует, что магнитное поле действует только на движущиеся заряженные частицы и тела.

Значение дополнительной силы f_2 пропорционально заряду q движущихся частиц, и ее направление зависит от направления вектора $\boldsymbol{v}$ их скорости. В каждой точке магнитного поля в каждый момент времени есть определенное направление (обозначим его единичным вектором $\boldsymbol{n}$), характеризующееся тем, что сила f_2 оказывается наибольшей, когда вектор скорости $\boldsymbol{v}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{n}$ (рис. 1.2), т. е. лежит в плоскости s, перпендикулярной $\boldsymbol{n}$. При любом другом направлении вектора скорости $\boldsymbol{v}$ сила f_2 будет меньше — она пропорциональна проекции v_t (рис. 1.3) вектора $\boldsymbol{v}$ на эту плоскость. Вектор силы $\boldsymbol{f}_2$ перпендикулярен к указанному направлению, т. е. вектору $\boldsymbol{n}$, а также, как уже было отмечено, перпендикулярен вектору скорости $\boldsymbol{v}$.

Пользуясь этим, определим *основную физическую величину*, характеризующую магнитное поле в каждой его точке и называемую магнитной индукцией. Магнитная индукция есть векторная величина. Она изображается векто-

ром $\boldsymbol{B}$, имеющим направление, совпадающее с направлением $\boldsymbol{n}$ (рис. 1.2 и 1.3). Сила f_2 пропорциональна значению магнитной индукции. Существует равенство

$$\boldsymbol{f}_2 = q[\boldsymbol{vB}],$$

где $[\boldsymbol{vB}]$ — векторное произведение векторов $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{B}$.

Это выражение и может служить определением значения и направления век-

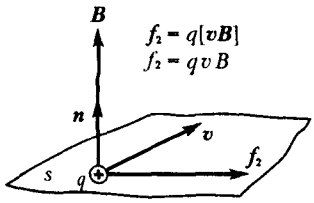


Рис. 1.2

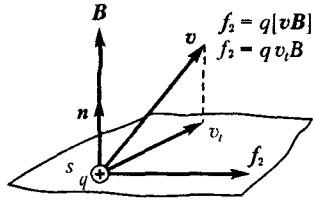


Рис. 1.3

тора $\boldsymbol{B}$. Сила f_2 перпендикулярна $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{B}$. Если еще выбрать такое направление скорости $\boldsymbol{v}$, чтобы было $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{B}$ (рис. 1.2), то значение силы f_2, как уже было сказано, будет наибольшим. При этом все три вектора, f_2, $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{B}$, будут взаимно перпендикулярны и взаимно ориентированы, как показано на рис. 1.2. Это определяет направление вектора $\boldsymbol{B}$. Зная в этих условиях значения v и f_2, значение магнитной индукции B находим из выражения

$$B = \frac{f_2}{qv}.$$

Следовательно, *магнитная индукция есть векторная величина, характеризующая магнитное поле и определяющая силу, действующую на движущуюся заряженную частицу со стороны магнитного поля.*

Магнитная индукция численно равна отношению силы, действующей на заряженную частицу, к произведению заряда и скорости частицы, если направление скорости таково, что эта сила максимальна, и имеет направление, перпендикулярное направлению векторов силы и скорости, совпадающее с поступательным перемещением правого винта при вращении его от направления силы к направлению скорости частицы с положительным зарядом.

Магнитную индукцию можно определять также по воздействию на отрезок проводника длиной l с электрическим током i. Соответствующее выражение легко может быть получено из только что написанного. Пусть $\boldsymbol{l}$ — вектор, имеющий длину, равную длине отрезка проводника, и направленный по оси проводника в направлении тока i. Пусть q — заряд в объеме отрезка проводника, движущийся упорядоченно вдоль оси проводника со скоростью $\boldsymbol{v}$ и образующий при своем движении ток i. Если заряд q проходит путь l за время t, то $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{l}/t$. Так как при этом сквозь сечение проводника за время t проходит заряд q, то $i = q/t$. Имеем

$$q\boldsymbol{v} = q\frac{\boldsymbol{l}}{t} = \frac{q}{t}\boldsymbol{l} = i\boldsymbol{l}$$

и, следовательно,

$$f_2 = q[\boldsymbol{vB}] = i[\boldsymbol{lB}].$$

Если $\boldsymbol{l} \perp \boldsymbol{B}$, то сила при данных i, l и B имеет наибольшее значение, равное

$$f_2 = ilB.$$

В этом случае

$$B = \frac{f_2}{il}$$

и направление вектора $\boldsymbol{B}$ определяется согласно рис. 1.4.

Для неоднородного поля необходимо взять отношение силы Δf_2 к отрезку проводника Δl, когда этот отрезок стремится к нулю:

$$B = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta f_2}{i \Delta l}.$$

Использование элемента проводника с током для определения вектора магнитной индукции имеет то преимущество по сравнению с использованием движущейся заряженной частицы, что суммарный заряд элемента проводника может быть равен нулю, так как заряд движущихся в нем частиц равен и противоположен по знаку заряду неподвижной решетки, образующей тело проводника. При этом сила f_1 со стороны электрического поля равна нулю и вся сила, действующая на такой проводник в электромагнитном поле, определяется только магнитным полем.

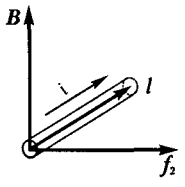


Рис. 1.4

Для частицы же с зарядом q, движущейся в электромагнитном поле со скоростью $\boldsymbol{v}$, результирующая сила имеет обе составляющие, определяемые одна — электрическим, а другая — магнитным полем:

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 = q\boldsymbol{E} + q[\boldsymbol{vB}].$$

Эту силу часто именуют силой Лоренца. Она является векторной величиной и имеет две составляющие: электрическую, не зависящую от скорости частицы, обусловленную электрическим полем, и магнитную, пропорциональную скорости частицы, действующую со стороны магнитного поля.

Действие сил $\boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{f}_2$ существенно различно. Сила $\boldsymbol{f}_1$ со стороны электрического поля может изменять как направление скорости заряженной частицы, так и значение этой скорости, т. е. изменять кинетическую энергию частицы. Сила же $\boldsymbol{f}_2$ со стороны магнитного поля, направленная всегда перпендикулярно вектору скорости частицы, изменяет только направление движения частицы, но не изменяет значения скорости и, соответственно, ее кинетической энергии.

Эти обстоятельства широко используются для ускорения заряженных частиц и управления их движением в электронных осциллографах, электронных микроскопах и ускорителях заряженных частиц.

Выражение для результирующей силы $\boldsymbol{f}$ позволяет сделать весьма существенный, имеющий принципиальное значение вывод, что деление единого электромагнитного процесса на две его составляющие — электрическую и магнитную — относительно. Действительно, говорить о скорости $\boldsymbol{v}$ частицы можно только по отношению к некоторой системе координат, т. е. к некоторой системе отсчета. Если наблюдатель неподвижен в этой системе координат, то $\boldsymbol{v}$ есть скорость час-

тицы по отношению к наблюдателю. Если такой наблюдатель обнаруживает обе составляющие, f_1 и f_2, силы f, то, согласно данным выше определениям, он утверждает, что существует как электрическое поле с напряженностью $\boldsymbol{E}$, так и магнитное поле с магнитной индукцией $\boldsymbol{B}$.

Представим теперь другую систему отсчета, движущуюся относительно первой со скоростью $\boldsymbol{v}$. Наблюдатель, неподвижный в этой новой системе координат, будет воспринимать в тот же момент времени частицу с зарядом q как неподвижную и, следовательно, всю силу f будет относить за счет действия электрического поля с напряженностью $\boldsymbol{E}'$

$$f = q\boldsymbol{E}'.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + [\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}].$$

Таким образом, напряженность электрического поля в одной и той же точке и в один и тот же момент времени для разных движущихся относительно друг друга наблюдателей оказывается различной. То же положение, как нетрудно показать, относится и к магнитной индукции.

Все это еще раз подчеркивает главную мысль, что мы всегда имеем дело с единым, объективно существующим электромагнитным явлением, не зависящим от условий наблюдения. Деление же его на электрическую и магнитную составляющие относительно. Эти две составляющие находятся друг с другом в тесной взаимосвязи.

Отметим здесь, что, рассматривая то или иное электромагнитное явление, будем относить его к некоторой определенной системе отсчета, хотя специально это и не оговаривая.

В заключение приведенных выше основных положений еще раз обратим внимание на важное обстоятельство, что в определениях первых понятий электромагнитного поля и электрического заряда принципиально нельзя было обойти зависимость одного от другого. Точно такое же положение имеет место и в отношении полных определений электрического и магнитного полей, поскольку эти поля являются двумя сторонами единого электромагнитного поля.

Определения всех последующих понятий должны содержать в себе только понятия, ранее уже определенные на основе использования тех или иных количественных закономерностей.

1.4. Связь заряда частиц и тел с их электрическим полем. Теорема Гаусса

Введем понятие о потоке вектора сквозь некоторую поверхность, в данном случае о потоке вектора напряженности электрического поля.

Представим в электрическом поле поверхность s, ограниченную некоторым контуром (рис. 1.5). Обозначим через β угол между вектором $\boldsymbol{E}$ и условно выбранной положительной нормалью N к поверхности в некоторой ее точке. Условимся также, что при замкнутой поверхности положительная нормаль всегда будет направлена во внешнее пространство. Составляющая вектора $\boldsymbol{E}$, нормальная к элементу поверхности ds, равна $E_n = E\cos\beta$. Интеграл от произведений элемен-

тов поверхности на составляющие вектора, нормальные к этим элементам, распространенный по всей поверхности s, носит название поток вектора сквозь эту поверхность. Поток вектора напряженности электрического поля сквозь поверхность s, который обозначим через Ψ_E, равен

$$\Psi_E = \int_s E \cos\beta ds.$$

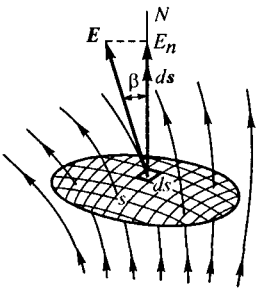


Рис. 1.5

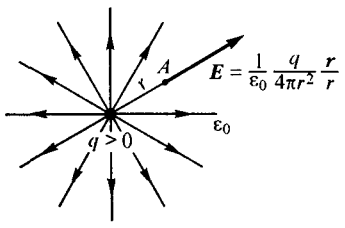


Рис. 1.6

Обозначив через $d\boldsymbol{s}$ вектор, длина которого численно равна площади поверхности элемента ds, а направление совпадает с направлением положительной нормали к этому же элементу, напишем выражение потока сокращенно в векторной форме:

$$\Psi_E = \int_s \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{s},$$

где $\boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{s} = E \cos\beta\, ds$ есть скалярное произведение векторов $\boldsymbol{E}$ и $d\boldsymbol{s}$. Поток вектора — величина скалярная.

Пусть точечный заряд q расположен в пустоте. Из опытного закона Кулона $\boldsymbol{f} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ следует выражение для напряженности электрического поля точечного заряженного тела (рис. 1.6):

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q}{4\pi r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

Величина ε_0, называемая электрической постоянной, является характеристикой пустоты и равна величине, обратной произведению постоянной $4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м на квадрат скорости света в пустоте:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi\cdot10^{-7}c^2},$$

где ε_0 вычисляется в *фарадах на метр*.

Если принять, что $c = 2{,}998\cdot10^8 \approx 3\cdot10^8$ м/с — числовое значение скорости света в пустоте, то

$$\varepsilon_0 \approx \frac{1}{4\pi\cdot9\cdot10^9} \approx 8{,}85\cdot10^{-12}\ \text{Ф/м}.$$

Рассмотрим замкнутую поверхность s, ограничивающую часть пространства, в которой находится точечный заряд q. Замкнутая кривая, изображенная на рис. 1.7 штриховой линией, представляет собой след такой поверхности в плоскости рисунка.

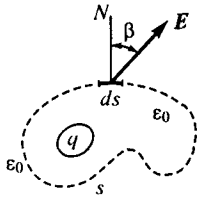


Рис. 1.7

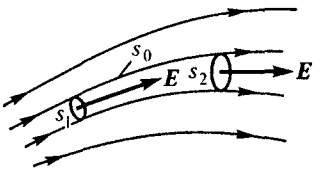


Рис. 1.8

Выражение для потока вектора $\boldsymbol{E}$ сквозь замкнутую поверхность s в рассматриваемом случае имеет вид

$$\oint_s \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{s} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_s \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\,d\boldsymbol{s}.$$

Подынтегральное выражение определяет телесный угол, под которым видна площадка ds от точки, где расположен заряд. Поскольку вся поверхность замкнута, то суммарный угол равен 4π, и поэтому для точечного заряда имеем

$$\oint_s \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Полученное соотношение является математическим выражением теоремы Гаусса, которая гласит: *поток вектора напряженности электрического поля сквозь замкнутую поверхность в пустоте равен отношению электрического заряда, заключенного внутри этой поверхности, к электрической постоянной.*

То существенное обстоятельство, что результат получается не зависящим от места расположения заряженного точечного тела внутри объема, ограниченного замкнутой поверхностью s, позволяет обобщить это выражение для любого числа точечных заряженных тел, а следовательно, и для любого числа заряженных тел произвольной формы.

Таким образом, теорема Гаусса устанавливает связь между потоком вектора $\boldsymbol{E}$ сквозь замкнутую поверхность и суммарным зарядом тел, заключенных внутри объема, ограниченного поверхностью s.

Применяя теорему Гаусса к поверхности, ограничивающей отрезок трубки напряженности поля (рис. 1.8), имеем

$$\oint_s \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{s} = \int_{s_1} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{s} + \int_{s_2} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{s} + \int_{s_0} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{s} = 0.$$

Но $\int_{s_0} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{s} = 0$, так как вектор $\boldsymbol{E}$ касателен к боковой поверхности s_0 трубки.

Следовательно, $\int_{s_1} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{s} = -\int_{s_2} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{s}$, т. е. *поток сквозь различные поперечные сечения трубки напряженности поля имеет одно и то же значение.*

Из теоремы Гаусса вытекает важное следствие, что электрический заряд на заряженном проводящем теле любой формы распределяется на его поверхности, или, точнее, в весьма тонком слое вблизи поверхности. Напряженность поля внутри проводника при статическом состоянии зарядов должна быть равна нулю. Действительно, при наличии электрического поля в проводящей среде свободные электрически заряженные частицы придут в движение и, следовательно, статическое состояние установится только тогда, когда напряженность поля внутри проводника во всем его объеме станет равной нулю. Поэтому, проводя любую замкнутую поверхность внутри проводящего тела, получим поток $\Psi_E = \oint_s \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{s}$ сквозь эту поверхность равным нулю. Таким образом, согласно теореме Гаусса, заряд внутри такой поверхности также равен нулю. Отсюда следует, что внутри тела суммарный заряд равен нулю и заряд тела распределен только на его поверхности.

1.5. Поляризация веществ. Электрическое смещение. Постулат Максвелла

Рассмотрим процессы, которые происходят в веществе под воздействием электрического поля при условии отсутствия в веществе свободных носителей заряда. Заряженные частицы, входящие в состав молекул вещества, испытывают со стороны поля механические силы. Эти силы вызывают внутри молекул смещение частиц с положительными зарядами в сторону поля и частиц с отрицательными зарядами — в противоположном направлении. Если напряженность поля не чрезмерно велика, то частицы с положительными и отрицательными зарядами совершенно разойтись не могут, так как они удерживаются внутриатомными, внутримолекулярными или межмолекулярными силами.

Существует ряд веществ, молекулы которых при отсутствии внешнего поля электрически нейтральны, т. е. заряды, входящие в состав такой молекулы, в среднем не создают электрического поля во внешнем по отношению к молекуле пространстве, иными словами, центр электрического действия всех электронов в молекуле совпадает с центром действия положительных ядер.

В результате смещения под действием внешнего поля положительно и отрицательно заряженных частиц, входящих в состав молекулы, в противоположных направлениях центры электрического действия первых и вторых уже не будут совпадать и во внешнем пространстве молекула будет восприниматься как электрический диполь, т. е. как система двух равных, противоположных по знаку точечных зарядов q и $-q$, смещенных друг относительно друга на некоторое расстояние d. Произведение qd называют электрическим моментом диполя. Электрический момент диполя рассматривают как векторную величину, направленную в сторону смещения положительного заряда, и обозначают $\boldsymbol{p}$.

Под действием внешнего электрического поля каждая молекула обращается в диполь, и вещество оказывается в *поляризованном* состоянии. Рассмотренные диполи именуют квазиупругими диполями. К веществам, молекулы которых обладают такими свойствами, относятся, например, газы: водород, кислород, азот.

Существует другой класс изолирующих веществ, молекулы которых обладают отличным от нуля электрическим моментом даже при отсутствии внешнего поля. Такие молекулы называют полярными. В качестве примера назовем газ хлористый водород (HCl), молекулы которого состоят из положительного иона водорода и отрицательного иона хлора, находящихся на некотором расстоянии друг от друга, т. е. являющихся диполями. Тепловое движение приводит диполи в хаотическое расположение, и электрические поля отдельных диполей взаимно нейтрализуются во внешнем пространстве. Если внести такое вещество во внешнее поле, то диполи будут стремиться расположиться своими осями вдоль линий поля. Однако этому упорядоченному расположению препятствует тепловое движение. В результате происходит лишь некоторый поворот диполей в направлении поля, и вещество оказывается в определенной мере поляризованным. При этом к эффекту ориентации осей диполей обычно добавляется рассмотренный выше эффект деформации молекул.

Электрическим моментом некоторого объема поляризованного вещества называют векторную величину, равную геометрической сумме электрических моментов всех диполей, заключенных в этом объеме.

Степень электрической поляризации вещества в данной точке характеризуют векторной величиной, называемой поляризованностью или интенсивностью поляризации, и обозначают буквой $\boldsymbol{P}$.

Поляризованность равна пределу отношения электрического момента некоторого объема вещества, содержащего данную точку, к этому объему, когда последний стремится к нулю.

В веществах с квазиупругими диполями при наличии электрического поля оси всех диполей имеют одинаковое направление, и можно написать

$$P = N_1 p = N_1 q d,$$

где $N_1 = dN/dV$ — число диполей (молекул), отнесенное к единице объема вещества, причем dN число диполей в объеме dV. Опыт показывает, что в полях, с которыми мы имеем дело на практике, для всех таких веществ поляризованность пропорциональна напряженности поля, т. е. $P = \chi E$.

Эта пропорциональность характерна и для веществ с полярными молекулами. При этом она нарушается лишь при очень сильных полях, когда почти все диполи ориентируются вдоль внешнего поля.

Коэффициент χ называют абсолютной диэлектрической восприимчивостью вещества. Отношение $\chi_r = \chi/\varepsilon_0$ называют относительной диэлектрической восприимчивостью, или просто диэлектрической восприимчивостью.

Вещество, основным электрическим свойством которого является способность поляризоваться под воздействием электрического поля, называется диэлектриком.

Существует особая группа диэлектриков, так называемые сегнетоэлектрики, у которых величина χ сильно зависит от напряженности поля и при некоторых значениях напряженности поля и температуры достигает весьма больших значений.

Поляризованность диэлектрика можно охарактеризовать также несколько иначе, связав определение поляризованности с фактом смещения в диэлектрике положительно и отрицательно заряженных частиц под действием поля. Пусть изолирующее вещество помещено в однородное электрическое поле между двумя заряженными металлическими пластинами. При установлении поля частицы с положительными зарядами в диэлектрике смещаются по направлению к отрицательно заряженной пластине в среднем на расстояние x. Частицы с отрицательными зарядами при этом перемещаются по направлению к положительно заряженной пластине на расстояние $d - x$, где d — среднее расстояние, отсчитываемое по линии напряженности поля, на которое расходятся по отношению друг к другу частицы с положительными и отрицательными зарядами. Для квазиупругих диполей d есть расстояние между центрами зарядов диполя, т. е. длина оси диполя. Для полярных молекул d — среднее значение проекций осей диполей на направление напряженности поля.

Рассечем мысленно диэлектрик плоскостью, нормальной к линиям напряженности поля, и рассмотрим поверхность s, являющуюся частью этой плоскости. На рис. 1.9 след $a - b$ поверхности s показан жирными штрихами. За время изменения напряженности поля от нуля до конечного значения сквозь поверхность s проходят в направлении сил поля все положительные заряды, которые до начала установления поля были заключены в объеме xs, и против сил поля — все отрицательные заряды, которые до установления поля были заключены в объеме $(d - x)s$ (рис. 1.9). Если q — положительный заряд диполя и N_1 — число диполей в единице объема, то в процессе установления поля сквозь поверхность s смещается в направлении вектора $\boldsymbol{E}$ положительный заряд qN_1xs и в противоположном направлении — отрицательный заряд $-qN_1(d - x)s$.

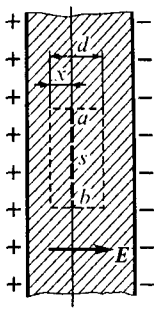


Рис. 1.9

Так как смещение отрицательного заряда против сил поля эквивалентно смещению положительного в направлении сил поля, то общий заряд, сместившийся сквозь поверхность s, равен

$$Q' = qN_1xs + qN_1(d - x)s = N_1qds = Ps,$$

так как $N_1qd = P$. Стало быть,

$$P = \frac{Q'}{s}.$$

В общем случае для неоднородного поля следует записать

$$P = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta Q'}{\Delta s} = \frac{dQ'}{ds},$$

т. е. *поляризованность равна пределу отношения электрического заряда, переносимого заряженными частицами, сместившимися в веществе диэлектрика в процессе установления поля сквозь элемент поверхности, нормальный к направлению смещения частиц, к размеру этого элемента при стремлении последнего к нулю.*

В анизотропных кристаллических телах диэлектрическая восприимчивость по различным главным осям имеет различные значения, и если вектор $\boldsymbol{E}$ не направлен по одной из главных осей кристалла, то вектор $\boldsymbol{P}$ уже не совпадает по

направлению с вектором $\boldsymbol{E}$. Физически это объясняется тем, что заряженные элементарные частицы в молекулах кристаллов смещаются не в сторону действия внешнего поля, а несколько уклоняются в том направлении, в котором противодействующие смещению межмолекулярные силы наиболее слабы и диэлектрическая восприимчивость наибольшая. При произвольном, но заданном расположении осей $0X$, $0Y$ и $0Z$ по отношению к главным осям кристалла связь между составляющими векторов $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{E}$ по осям $0X$, $0Y$ и $0Z$ может быть записана в виде

$$P_x = \chi_{xx}E_x + \chi_{xy}E_y + \chi_{xz}E_z;$$
$$P_y = \chi_{yx}E_x + \chi_{yy}E_y + \chi_{yz}E_z;$$
$$P_z = \chi_{zx}E_x + \chi_{zy}E_y + \chi_{zz}E_z;$$

т. е. диэлектрическая восприимчивость (как абсолютная, так и относительная) является при этом тензорной величиной.

Рассмотрим, как и в § 1.4, тело любой формы с зарядом q (рис. 1.10), но теперь будем считать, что тело окружено диэлектриком, в общем случае неоднородным и анизотропным. Окружим мысленно тело замкнутой поверхностью s, расположенной в диэлектрике. При увеличении свободного заряда q тела от нуля до его конечного значения в диэлектрике усиливается электрическое поле и увеличивается поляризация диэлектрика. В процессе установления поля происходит смещение элементарных, обладающих электрическим зарядом частиц, входящих в состав вещества диэлектрика, и сквозь поверхность s этими частицами переносится заряд Q'. Согласно изложенному выше, этот заряд может быть представлен в виде

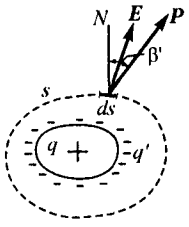


Рис. 1.10

$$Q' = \oint_s P\cos\beta'\,ds = \oint_s \boldsymbol{P}d\boldsymbol{s},$$

где $\boldsymbol{P}$ — вектор поляризованности в точках поверхности s. При этом, если $q > 0$, то и $Q' > 0$, так как в этом случае положительно заряженные частицы смещаются в направлении положительной внешней нормали к поверхности s.

В объеме пространства, ограниченного поверхностью s, помимо свободного заряда q появится так называемый *связанный заряд* q', т. е. заряд частиц, связанных внутримолекулярными силами, но уже не компенсирующийся зарядом другого знака. При однородном диэлектрике связанный заряд появляется на границе диэлектрика около поверхности заряженного проводника, где как бы обнажаются заряды диполей одного знака, противоположного знаку заряда q проводника. В общем случае у неоднородного диэлектрика связанные заряды появляются также на границах раздела частей диэлектрика, обладающих различными диэлектрическими проницаемостями. Существенно отметить, что независимо от того, где размещены связанные заряды, должно иметь место очевидное равенство

$$q' = -Q'.$$

Действительно, до образования электрического поля объемная плотность электрического заряда в диэлектрике всюду была равна нулю и связанный заряд q' также был равен нулю. Поэтому появление избыточного связанного заряда q' одного знака в объеме, ограниченном поверхностью s, после установления поля возможно только вследствие того, что сквозь поверхность s смещающимися в процессе поляризации заряженными частицами переносится заряд Q'. При этом абсолютные значения $|q'|$ и $|Q'|$ должны быть равны друг другу, но сами величины q' и Q' должны быть противоположны по знаку, так как, если положительный заряд смещается сквозь поверхность s изнутри наружу, то в объеме, ограниченном этой поверхностью, образуется избыток отрицательного заряда.

Итак, имеем

$$q' = -Q' = -\oint_s \boldsymbol{P} d\boldsymbol{s}.$$

Учитывая, что в результате поляризации появляется связанный заряд q', мы должны рассматривать поле как существующее в пустоте, но созданное не только свободным зарядом q тела, но и связанным зарядом q'. Соответственно, можно написать теорему Гаусса в форме

$$\oint_s \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{s} = \frac{q+q'}{\varepsilon_0}.$$

Умножив правую и левую части равенства на ε_0, получаем:

$$\oint_s \varepsilon_0 \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{s} = q + q' = q - \oint_s \boldsymbol{P}\, d\boldsymbol{s}.$$

Отсюда находим

$$\oint_s \varepsilon_0 \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{s} + \oint_s \boldsymbol{P}\, d\boldsymbol{s} = \oint_s (\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) d\boldsymbol{s} = q.$$

Обозначим через $\boldsymbol{D}$ вектор, равный сумме векторов $\varepsilon_0 \boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P},$$

и назовем его вектором электрического смещения. Имеем

$$\oint_s \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{s} = \oint_s D \cos\beta\, ds = q,$$

т. е. *поток вектора электрического смещения сквозь замкнутую поверхность в направлении внешней нормали равен свободному электрическому заряду, заключенному в части пространства, ограниченной этой поверхностью.*

В последнем соотношении β есть угол между вектором $\boldsymbol{D}$ и нормалью к элементу ds поверхности s.

Единицей электрического смещения является *кулон на квадратный метр* (Кл/м^2).

Воспользуемся соотношением $P = \chi E$, тогда

$$D = \varepsilon_0 E + \chi E = (\varepsilon_0 + \chi) E = \varepsilon E; \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \chi.$$

В анизотропных кристаллических телах при произвольном, но заданном расположении осей $0X$, $0Y$, $0Z$ по отношению к главным осям кристалла связь меж-

ду проекциями на оси координат векторов $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$ может быть записана в форме, аналогичной той, в которой была записана выше связь между проекциями векторов $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{E}$. При этом диэлектрическая проницаемость является тензорной величиной.

Величина ε является основной характеристикой диэлектрика и называется абсолютной диэлектрической проницаемостью. Она характеризует диэлектрические свойства вещества, является скалярной величиной для изотропного вещества, равна отношению модуля электрического смещения к модулю напряженности электрического поля и является тензорной величиной для анизотропного вещества. Отношение $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$ называют относительной диэлектрической проницаемостью:

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{\chi}{\varepsilon_0} = 1 + \chi_r.$$

Для однородной изотропной среды имеем

$$\oint_s \boldsymbol{D}\,d\boldsymbol{s} = \oint_s \varepsilon \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{s} = \varepsilon \oint_s \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{s} = q \quad \text{или} \quad \oint_s \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{s} = q/\varepsilon.$$

Последнее выражение является теоремой Гаусса для любого однородного изотропного диэлектрика.

Понятие об электрическом смещении в диэлектрике и о векторе электрического смещения было введено Максвеллом.

Вторая составляющая $\boldsymbol{P}$ вектора электрического смещения была нами представлена как результат смещения элементарных, обладающих зарядом частиц, входящих в состав вещества диэлектрика, сквозь поверхность, нормальную к направлению смещения этих частиц.

Первая составляющая $\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ вектора электрического смещения, которую обозначим через $\boldsymbol{D}_0$, не является результатом смещения электрически заряженных частиц сквозь некоторую поверхность, так как она относится к электрическому полю в пустоте, т. е. к той области пространства, в которой отсутствуют заряженные частицы.

Величина $\boldsymbol{D}_0 = \varepsilon_0\boldsymbol{E}$, так же как и напряженность поля $\boldsymbol{E}$, характеризует само электрическое поле в данной его точке. Важно отметить, что физическая размерность величины D_0 та же, что и поляризованности P диэлектрика, т. е. электрического заряда, отнесенного к единице поверхности. Это обстоятельство дает возможность сделать весьма важные обобщения, относящиеся к изменяющемуся во времени электрическому полю. Они будут развиты далее в параграфах об электрическом токе и его магнитном поле.

Соотношение

$$\oint_s \boldsymbol{D}\,d\boldsymbol{s} = q,$$

устанавливающее равенство потока вектора электрического смещения сквозь любую замкнутую поверхность *свободному* заряду, заключенному в объеме, ограниченном этой поверхностью, называют иногда обобщенной теоремой Гаусса, поскольку оно справедливо уже для любой среды.

Мы получили это соотношение, использовав теорему Гаусса. Однако теорема Гаусса доказывается лишь для *электростатического* поля. Соотношение же $\oint_s \boldsymbol{D}d\boldsymbol{s} = q$, следуя Максвеллу, полагают справедливым во всех без исключения случаях и для сколько угодно быстро изменяющихся *переменных* электрических полей.

При таком широком обобщении это соотношение следует рассматривать как основной постулат теории электромагнитного поля. Все выводы этой теории, принимающей его в качестве одного из главных положений, полностью подтверждаются опытом. Будем называть его постулатом Максвелла.

Определив вектор электрического смещения во всех точках поля, можно провести ряд линий таким образом, чтобы в каждой точке этих линий касательные к ним совпадали по направлению с вектором смещения (рис. 1.11). Эти линии называют линиями электрического смещения. На рисунках их изображают со стрелками, указывающими направление вектора $\boldsymbol{D}$. Совокупность линий смещения, проходящих через все точки контура, ограничивающего некоторую поверхность s (рис. 1.11), образует трубчатую поверхность, которая выделяет из всего поля так называемую трубку электрического смещения. Линии и трубки смещения начинаются на положительных зарядах и кончаются на отрицательных.

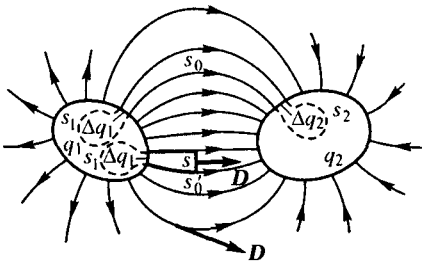


Рис. 1.11

Установим связь между зарядами Δq_1 и Δq_2 на концах трубки смещения.

Применяя постулат Максвелла к замкнутой поверхности, образованной боковой поверхностью s_0 трубки и поверхностями s_1 и s_2 внутри заряженных проводящих тел (рис. 1.11), будем иметь

$$\int_{s_1} \boldsymbol{D}d\boldsymbol{s} + \int_{s_0} \boldsymbol{D}d\boldsymbol{s} + \int_{s_2} \boldsymbol{D}d\boldsymbol{s} = \Delta q_1 + \Delta q_2.$$

Но $\int_{s_1} \boldsymbol{D}d\boldsymbol{s} + \int_{s_2} \boldsymbol{D}d\boldsymbol{s} = 0$, так как поле внутри заряженных проводящих тел отсутствует, и $\int_{s_0} \boldsymbol{D}d\boldsymbol{s} = 0$, так как вектор $\boldsymbol{D}$ касателен к поверхности s_0. Таким образом,

$$\Delta q_1 = -\Delta q_2,$$

т. е. *трубка электрического смещения опирается своими концами на равные и противоположные по знаку заряды.*

1.6. Электрические токи проводимости, переноса и смещения

Явление направленного движения свободных зарядов и/или явление изменения вектора электрического смещения во времени, сопровождаемые магнитным полем, называют полным электрическим током.

Термин «электрический ток» применяют не только для характеристики явления, но и для определения интенсивности этого явления в качестве синонима термина «сила электрического тока».

Чтобы исключить двойное толкование термина «электрический ток», принято прилагательное «электрический» приписывать только явлению.

Полный электрический ток принято разделять на следующие основные виды: ток проводимости, ток переноса и ток смещения.

Электрическим током проводимости принято называть явление направленного движения свободных носителей электрического заряда в некотором объеме V вещества или пустоты, когда $\sum q_i \boldsymbol{v}_i \neq 0$. Здесь q_i и $\boldsymbol{v}_i$ — величина и скорость движения i-го заряда, входящего в совокупность N свободных зарядов объема V.

Некоторые вещества обладают свойством, называемым электропроводностью, проводить под действием не изменяющегося во времени электрического поля не изменяющийся во времени электрический ток. Соответственно, вещества, обладающие таким свойством, принято называть проводниками или проводящими веществами. Для них основным электрическим свойством является электропроводность. Существует ряд веществ, для которых характерна сильная зависимость электропроводности от воздействия внешних факторов (например, от температуры, света, электрических и магнитных полей и т. д.).

Ток проводимости сквозь некоторую поверхность s определяется количеством зарядов q, проходящих через нее за единицу времени. В произвольный момент времени ток проводимости равен производной по времени от электрического заряда, переносимого носителями заряда сквозь некоторую рассматриваемую поверхность s, т. е.

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

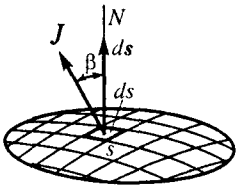


Рис. 1.12

Электрический ток — величина скалярная. В разных элементах поверхности s направление движения заряженных частиц может быть самым различным. Однако, рассматривая весьма малый элемент поверхности Δs, можно считать направление движения заряженных частиц во всех точках элемента одинаковым, причем это положение становится все более строгим по мере уменьшения Δs, т. е. когда $\Delta s \to 0$. В связи с этим вводят в рассмотрение векторную величину — *плотность тока, равную пределу отношения тока Δi сквозь элемент поверхности Δs, нормальный к направлению движения заряженных частиц, к этому элементу, когда последний стремится к нулю,*

$$J = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta i}{\Delta s} = \frac{di}{ds},$$

и имеющую направление, совпадающее с направлением движения положительно заряженных частиц или, соответственно, противоположное направлению движения отрицательно заряженных частиц.

Если вектор $\boldsymbol{J}$ (рис. 1.12) составляет с положительной нормалью к поверхности угол β, то существует соотношение

$$di = J\cos\beta\, ds = \boldsymbol{J}\, d\boldsymbol{s}.$$

Ток, проходящий сквозь поверхность s конечных размеров, поэтому равен

$$i = \int_s J\cos\beta\, ds = \int_s \boldsymbol{J}\, d\boldsymbol{s}.$$

Только в том случае, когда плотность тока во всех точках поверхности одинакова по значению и составляет с нормалью к поверхности всюду один и тот же угол, можно написать

$$i = J\cos\beta\int_s ds = J\cos\beta s.$$

Если, кроме того, направление тока нормально к поверхности, то $i = Js$. Такое условие соблюдается при постоянном во времени токе для линейных проводников, поперечные размеры которых малы по сравнению с их длиной. Поэтому при изучении процессов в электрических цепях, составленных из линейных проводников, обычно говорят о направлении всего тока в том или ином участке цепи.

В общем случае л и н и я м и т о к а называют линии, к которым векторы плотности тока всюду касательны, и т р у б к а м и т о к а — область, ограниченную трубчатой поверхностью, образованной линиями тока.

Единицей тока является *ампер* (А) и единицей плотности тока — *ампер на квадратный метр* (А/м^2).

Характерным отличием тока проводимости в проводниках от других видов тока является то, что плотность тока проводимости при постоянной температуре проводника пропорциональна напряженности электрического поля. При этом в изотропной среде вектор плотности тока $\boldsymbol{J}$ совпадает по направлению с вектором напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$ и линии тока совпадают с линиями напряженности электрического поля. Поэтому для плотности тока проводимости в проводящих средах можно написать

$$\boldsymbol{J} = \gamma\boldsymbol{E}.$$

Величину γ называют у д е л ь н о й э л е к т р и ч е с к о й п р о в о д и м о с т ь ю в е щ е с т в а.

Величину $\rho = 1/\gamma$, обратную удельной проводимости, называют у д е л ь н ы м э л е к т р и ч е с к и м с о п р о т и в л е н и е м в е щ е с т в а.

Следовательно, связь между напряженностью электрического поля и плотностью тока может быть представлена в виде

$$\boldsymbol{E} = \rho\boldsymbol{J}.$$

Единицей удельного сопротивления является *ом-метр* (Ом·м). Действительно, из соотношения $\rho = E/J$ имеем для этой единицы $1\ \frac{\text{В}}{\text{м}}\cdot\frac{\text{м}^2}{\text{А}} = 1\frac{\text{В}\cdot\text{м}}{\text{А}} = 1$ Ом·м, так как 1 В/А = 1 Ом есть единица электрического сопротивления. Соответственно, единицей удельной проводимости является *сименс на метр* (См/м).

Возможность характеризовать проводящее вещество определенной величиной γ (или ρ) является результатом того, что в проводящем веществе средняя скорость заряженных частиц при заданной температуре, а следовательно,

и плотность тока остаются в постоянном электрическом поле постоянными, так как кинетическая энергия, приобретаемая этими частицами при ускорении их в электрическом поле, передается атомам вещества и переходит в тепловое движение.

Электрический ток в металлах представляет собой движение электронов проводимости. К проводящим веществам относятся также уголь и электролиты. В электролитах проводимость осуществляется положительными и отрицательными ионами.

Удельная проводимость γ и, соответственно, удельное сопротивление ρ проводящих веществ зависят от температуры.

Рассмотрим другой вид электрического тока проводимости, именуемый электрическим т о к о м п е р е н о с а, под которым понимают явление переноса электрических зарядов движущимися в свободном пространстве заряженными частицами или телами. Ток переноса отличается от тока проводимости в проводниках тем, что его плотность не может быть представлена соотношением $\boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E}$, где удельная проводимость γ есть определенная величина, характеризующая среду, проводящую ток. В случае *свободного* движения обладающих электрическим зарядом частиц или заряженных тел в электрическом поле их скорость не пропорциональна напряженности поля E. Действительно, сила, действующая на частицу с зарядом q в электрическом поле, равна qE. Ускорение такой частицы пропорционально напряженности поля. Соответственно, движение ее в свободном пространстве будет равноускоренным, так как отсутствует сопротивление среды.

Важным видом электрического тока переноса является движение в пустоте элементарных частиц, обладающих зарядом. Не менее важным видом электрического тока переноса является электрический ток в газах. Выразим плотность тока переноса через среднюю объемную плотность ρ заряда движущихся частиц и их скорость v. С этой целью выделим в пространстве прямоугольный параллелепипед, имеющий объем $dl\,ds$ (рис. 1.13). Пусть ребро dl параллельно вектору скорости. Заряд внутри параллелепипеда $dq = \rho\, dl\, ds$. Весь этот заряд пройдет через поверхность ds за такой промежуток времени dt, в течение которого элементарные заряженные частицы проходят путь dl. Этот промежуток времени определяется условием $dl = v\,dt$. Следовательно, ток сквозь поверхность ds равен $di = dq/dt = \rho v\, ds$, и для плотности тока имеем $J = di/ds = \rho v$. При движении частиц с отрицательным зарядом ($\rho < 0$) условное положительное направление тока противоположно направлению движения, и между абсолютными значениями J и v существует соотношение $J = -\rho v$. Оба соотношения для любого знака ρ объединяются в векторной форме:

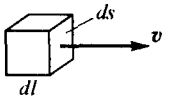


Рис. 1.13

$$\boldsymbol{J} = \rho \boldsymbol{v}.$$

При $\rho > 0$ векторы $\boldsymbol{J}$ и $\boldsymbol{v}$ совпадают по направлению. При $\rho < 0$ они противоположны.

Если одновременно имеет место движение положительно заряженных частиц со скоростью $\boldsymbol{v}_+$ при объемной плотности зарядов ρ_+ и движение отрицательно

заряженных частиц со скоростью $\boldsymbol{v}_-$ при объемной плотности зарядов ρ_-, то плотность тока переноса

$$\boldsymbol{J}_{\text{пер}} = \rho_+\boldsymbol{v}_+ + \rho_-\boldsymbol{v}_- .$$

Рассмотрим теперь третий вид электрического тока, называемый током электрического смещения. С этим видом тока приходится считаться при переменном электрическом поле в диэлектрике.

При всяком изменении электрического поля во времени изменяется поляризованность P диэлектрика. При этом в веществе диэлектрика движутся элементарные частицы с электрическими зарядами, входящие в состав атомов и молекул вещества. Этот вид электрического тока в диэлектрике называют электрическим током поляризации. Так как в диэлектрике заряженные частицы не являются свободными и могут смещаться под действием электрического поля, то ток поляризации называют также электрическим током смещения, причем он составляет, как будет отмечено, дальше, только часть общего тока смещения в диэлектрике. Нетрудно связать плотность J' этого тока с изменением поляризованности P вещества.

В § 1.5 величина P была выражена через электрический заряд dQ', перенесенный связанными заряженными частицами, сместившимися в веществе диэлектрика в процессе установления электрического поля, сквозь элемент поверхности ds, нормальный к направлению смещения частиц, в виде $P = dQ'/ds$. Если элемент поверхности ds ориентирован по отношению к направлению смещения заряженных частиц произвольно, то, соответственно, будет $P_n = dQ'/ds$, где P_n — составляющая вектора $\boldsymbol{P}$, нормальная к элементу поверхности ds.

При изменении величины $\boldsymbol{P}$ во времени сквозь элемент поверхности ds будет проходить ток

$$di = \frac{d}{dt}\left(P_n ds\right) = \frac{dP_n}{dt} ds.$$

С другой стороны, $di = J'_n ds$, где J'_n — нормальная к элементу ds составляющая вектора плотности тока $\boldsymbol{J}'$. Таким образом,

$$J'_n = \frac{dP_n}{dt}.$$

Так как расположение элемента поверхности ds может быть выбрано произвольно, то приходим к выводу, что составляющая вектора плотности тока $\boldsymbol{J}'$ по какому-либо направлению равна производной по времени от составляющей вектора поляризованности вещества $\boldsymbol{P}$ по этому направлению. В частности, имеем

$$J'_x = \frac{dP_x}{dt};\ J'_y = \frac{dP_y}{dt};\ J'_z = \frac{dP_z}{dt}.$$

Вектор плотности тока

$$\boldsymbol{J}' = \boldsymbol{i}\frac{dP_x}{dt} + \boldsymbol{j}\frac{dP_y}{dt} + \boldsymbol{k}\frac{dP_z}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{i}P_x + \boldsymbol{j}P_y + \boldsymbol{k}P_z\right),$$

где $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — единичные векторы по осям $0X$, $0Y$ и $0Z$.

Так как $\boldsymbol{i}P_x + \boldsymbol{j}P_y + \boldsymbol{k}P_z = \boldsymbol{P}$, то

$$\boldsymbol{J}' = d\boldsymbol{P}/dt.$$

Итак, рассматриваемая часть вектора плотности тока смещения равна производной вектора поляризованности вещества по времени.

Выше было отмечено, что ток смещения и, соответственно, плотность тока смещения J', обязанные своим появлением изменению поляризованности вещества, составляют только часть всего тока смещения и, следовательно, плотности тока смещения в диэлектрике. Действительно, вектор электрического смещения $\boldsymbol{D}$ в диэлектрике имеет две составляющие, $\boldsymbol{D}_0$ и $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_0 + \boldsymbol{P},$$

где $\boldsymbol{D}_0 = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$. При изменении электрического поля изменяются обе составляющие; таким образом,

$$\frac{d\boldsymbol{D}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{D}_0}{dt} + \frac{d\boldsymbol{P}}{dt}.$$

Вторая составляющая в последнем выражении, как только что было установлено, есть вектор плотности тока $\boldsymbol{J}'$ смещения, обязанного своим появлением движению обладающих зарядами элементарных частиц в веществе диэлектрика. Очевидно, и первая составляющая имеет физическую размерность плотности тока. Она характеризует физический процесс в самом электрическом поле при его изменении во времени. Область пространства, рассматриваемого как форма существования материи в виде поля, т. е. область, в которой отсутствуют известные нам частицы материи, ранее была названа пустотой. Следовательно, первую составляющую можно назвать плотностью тока смещения в пустоте, обозначим ее

$$\boldsymbol{J}_0 = \frac{d\boldsymbol{D}_0}{dt}.$$

Таким образом, вектор плотности *всего* тока смещения в диэлектрике, который обозначим $\boldsymbol{J}_{\text{см}}$, равен

$$\boldsymbol{J}_{\text{см}} = \frac{d\boldsymbol{D}}{dt} = \boldsymbol{J}_0 + \boldsymbol{J}' = \frac{d\boldsymbol{D}_0}{dt} + \frac{d\boldsymbol{P}}{dt}.$$

Производную вектора электрического смещения $\boldsymbol{D}$ по времени следует понимать в векторном смысле. Если в точке A вектор смещения изменяется не только по величине, но и по направлению (рис. 1.14), то вектор плотности тока $\boldsymbol{J}_{\text{см}}$ уже не будет совпадать по направлению с вектором смещения. Направление вектора $\boldsymbol{J}_{\text{см}}$ есть направление, к которому стремится приращение $\Delta\boldsymbol{D}$ вектора смещения $\boldsymbol{D}$, происходящее за промежуток времени Δt, когда $\Delta t \to 0$. На рис. 1.15 и 1.16 приведены частные случаи, когда $\boldsymbol{D}$ меняется только по величине или только по направлению.

Для составляющих вектора плотности тока смещения имеем во всех случаях выражения

$$J_{\text{см}x} = \frac{dD_x}{dt};\quad J_{\text{см}y} = \frac{dD_y}{dt};\quad J_{\text{см}z} = \frac{dD_z}{dt}.$$

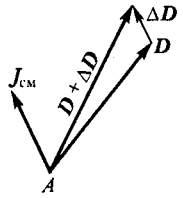


Рис. 1.14

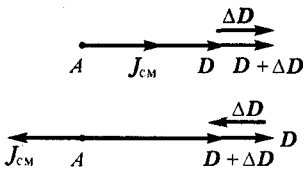


Рис. 1.15

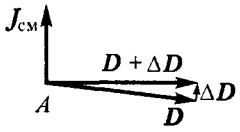


Рис. 1.16

При переменном поле ток смещения, принципиально говоря, существует не только в диэлектриках, но также и в полупроводящих и проводящих веществах. Действительно, под действием внешнего поля молекулы этих веществ должны поляризоваться так же, как и молекулы диэлектрика, и, кроме того, должно возникать смещение в пустоте. В полупроводящих веществах с токами смещения приходится считаться только при достаточно высоких частотах изменения электрического поля. В проводящих же веществах токи смещения ничтожно малы по сравнению с токами проводимости даже при весьма высоких частотах. С другой стороны, в изолирующем веществе наряду с токами смещения обычно существуют токи проводимости, хотя они весьма малы по сравнению с первыми уже при низких частотах.

В отношении первой составляющей $\boldsymbol{J}_0$ вектора плотности тока смещения, т. е. плотности тока смещения в пустоте, наглядная интерпретация при современном состоянии науки не может быть дана, так как мы еще не имеем сколь-нибудь детального представления о внутреннем строении электромагнитного поля, о тех внутренних процессах, которые в нем совершаются. Однако, даже не имея для первой составляющей $\boldsymbol{J}_0$ плотности тока смещения представления столь же наглядного, как для второй его составляющей $\boldsymbol{J}'$, можно высказать чрезвычайно важное предположение, а именно: следует ожидать, что важнейшее проявление электрического тока — появление связанного с ним магнитного поля — будет одинаковым для обеих составляющих. Опыт полностью подтверждает такое предположение.

Эти идеи впервые были высказаны Максвеллом и привели к созданию им теории электромагнитного поля. Действительно, согласно этим идеям, при всяком изменении электрического поля, даже в предположении отсутствия в нем частиц вещества ($\boldsymbol{P} = 0$), должно возникать в том же пространстве связанное с электрическим полем магнитное поле, т. е. образуется единое электромагнитное поле. Эти важные представления будут нами развиты подробнее в дальнейшем.

В свете сказанного ранее количественно полный электрический ток, или полный ток, есть скалярная величина, равная сумме тока проводимости и тока смещения сквозь рассматриваемую поверхность, т. е.

$$i = \frac{dq}{dt} + \frac{d}{dt}\int_s \boldsymbol{D}_0\, d\boldsymbol{s}.$$

В этом выражении в q входят и заряды свободных носителей, и суммарный связанный заряд, проходящий сквозь поверхность при поляризации вещества. Второй член в выражении для тока представляет собой ток смещения в пустоте,

являющийся скалярной величиной и равный производной по времени от потока электрического смещения сквозь рассматриваемую поверхность.

1.7. Принцип непрерывности электрического тока

Вообразим в диэлектрике замкнутую поверхность s (рис. 1.17) и представим, что заряжается тело A, расположенное внутри этой поверхности. При увеличении заряда q тела усиливается окружающее его электрическое поле и возрастает электрическое смещение в диэлектрике. Поэтому сквозь поверхность s изнутри наружу протекает ток смещения. Поток вектора смещения сквозь поверхность s равен свободному заряду q, заключенному внутри поверхности:

$$\oint_s \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{s} = q.$$

Возьмем производную от этого равенства по времени. Получим:

$$\oint_s \frac{d\boldsymbol{D}}{dt}\, d\boldsymbol{s} = \frac{dq}{dt}.$$

Величина

$$\oint_s \frac{d\boldsymbol{D}}{dt}\, d\boldsymbol{s} = \oint_s \boldsymbol{J}_{\text{см}}\, d\boldsymbol{s} = i_{\text{см}}$$

есть ток смещения сквозь поверхность s изнутри наружу.

Величина dq/dt есть скорость нарастания свободного заряда, заключенного внутри поверхности s. Увеличение свободного положительного заряда в объеме пространства, ограниченного поверхностью s, возможно только путем переноса положительных зарядов из внешнего пространства внутрь объема или отрицательных зарядов — в обратном направлении. Этот перенос может быть осуществлен либо при токе проводимости $i_{\text{пр}}$ в проводниках, пересекающих поверхность s, либо при токе переноса $i_{\text{пер}}$, когда заряды переносятся сквозь поверхность на заряженных телах или движущимися в пространстве заряженными частицами. Если $dq/dt > 0$, то положительные заряды переносятся из внешнего пространства внутрь объема, ограниченного поверхностью s, а следовательно, сумма токов $(i_{\text{пр}} + i_{\text{пер}})$ будет отрицательна, так как положительной считаем внешнюю нормаль. Таким образом,

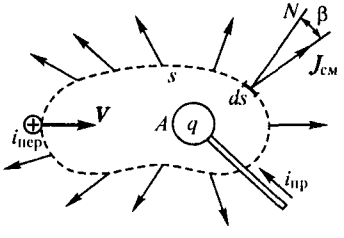


Рис. 1.17

$$\frac{dq}{dt} = -(i_{\text{пр}} + i_{\text{пер}}).$$

Равенство $\oint_s \frac{d\boldsymbol{D}}{dt}\, d\boldsymbol{s} = \frac{dq}{dt}$ теперь может быть переписано в виде

$$i_{\text{см}} = -(i_{\text{пр}} + i_{\text{пер}}) \quad \text{или} \quad i_{\text{см}} + i_{\text{пр}} + i_{\text{пер}} = 0.$$

Следовательно, *сумма токов всех родов — проводимости, переноса и смещения — сквозь любую замкнутую поверхность равна нулю.*

Если обозначить через $\boldsymbol{\delta}$ плотность полного тока ($\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_{см}$) и через i — весь ток сквозь поверхность, то для любой замкнутой поверхности будем иметь

$$i = \oint_s \boldsymbol{\delta}\, d\boldsymbol{s} = 0,$$

что и является общим выражением принципа непрерывности электрического тока. Этот важный принцип гласит: *полный электрический ток сквозь взятую в какой угодно среде замкнутую поверхность равен нулю*. При этом выходящий из поверхности ток считается положительным, входящий — отрицательным.

Таким образом, линии тока нигде не имеют ни начала, ни конца, они принципиально являются замкнутыми линиями. Электрический ток протекает всегда по замкнутым путям.

Из всего сказанного ясно, что принцип непрерывности, или, что то же, принцип замкнутости тока, приобретает всеобщее значение только с введением понятия о токе смещения в диэлектрике и именно с учетом тока смещения в пустоте.

В качестве примера рассмотрим, как осуществляется замкнутость линий тока переноса, т. е. движущихся заряженных тел или частиц. Этот случай имеет глубокое принципиальное значение, так как всякий электрический ток, кроме тока смещения в пустоте, представляет собой движение большого числа отдельных заряженных элементарных частиц.

Рассмотрим уединенный точечный заряд q, движущийся в пустоте со скоростью v (рис. 1.18). В каждый момент времени вектор $\boldsymbol{D}$ в любой точке пространства направлен по радиальной прямой, исходящей из центра заряда, и имеет величину, равную $D = \varepsilon_0 E = q/(4\pi r^2)$ (предполагаем, что v значительно меньше скорости света и, следовательно, поле имеет такой же характер, как и для неподвижного заряда).

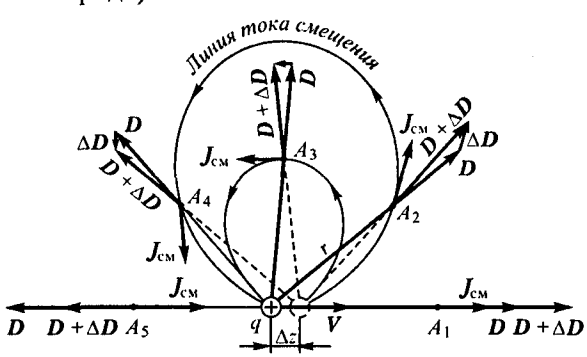


Рис. 1.18

За промежуток времени Δt заряд проходит путь $\Delta z = v\Delta t$. Соответственно новому положению заряда вектор смещения в каждой точке пространства получает новое значение $\boldsymbol{D} + \Delta\boldsymbol{D}$. Вектор плотности тока смещения $\boldsymbol{J}_{см} = d\boldsymbol{D}/dt$ всюду имеет направление, к которому стремится вектор $\Delta\boldsymbol{D}$ при $\Delta t \to 0$. На рис. 1.18 построены векторы плотности тока в некоторых точках пространства $A_1 - A_5$. Если бы мы произвели это построение в достаточно большом числе точек простран-

ства, то получили бы возможность провести линии тока смещения. Они имели бы вид линий, изображенных на рисунке. Мы видим, что ток смещения является продолжением тока переноса и линии тока оказываются замкнутыми.

При большом числе движущихся элементарных заряженных частиц картина линий тока смещения усложняется, но по-прежнему линии тока оказываются замкнутыми, так как эта сложная картина получается наложением простых построений, изображенных на рис. 1.18.

В качестве другого примера рассмотрим линию передачи (рис. 1.19). При переменном напряжении между проводами в диэлектрике возникают токи смещения. Проведем замкнутую поверхность s так, чтобы она охватила часть одного провода линии. Токи в проводе — входящий в поверхность и выходящий из нее — различаются между собой на значение тока смещения в диэлектрике, проходящего сквозь поверхность s. Поэтому переменный ток в проводе в один и тот же момент времени различен в разных поперечных сечениях провода. С этим обстоятельством приходится считаться при быстрых изменениях напряжения между проводами и для очень длинных линий.

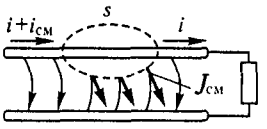


Рис. 1.19

1.8. Электрическое напряжение. Разность электрических потенциалов. Электродвижущая сила

Перейдем к рассмотрению весьма важных величин, связанных с электрическим полем, а именно: электрического напряжения, разности электрических потенциалов и электродвижущей силы.

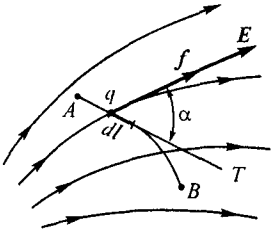


Рис. 1.20

Если частица с зарядом q переносится в электрическом поле вдоль некоторого пути, то действующие на нее силы поля совершают работу. Отношение этой работы к переносимому заряду представляет собой физическую величину, называемую электрическим напряжением. При перемещении частицы по пути dl (рис. 1.20) силы поля совершают работу

$$dA = f \cos\alpha\, dl = qE \cos\alpha\, dl = q\boldsymbol{E}dl.$$

Через dl обозначен вектор, равный по величине элементу пути dl и направленный по касательной T к пути в сторону перемещения заряженной частицы. Угол α есть угол между векторами $\boldsymbol{E}$ и dl.

Работа, совершаемая силами поля при перемещении частицы вдоль всего пути от точки A до точки B (рис. 1.20), равна

$$A = \int_A^B f \cos\alpha\, dl = q\int_A^B E\cos\alpha\, dl = q\int_A^B \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l}.$$

Она пропорциональна линейному интегралу $\int_A^B E\cos\alpha\, dl$ напряженности поля вдоль заданного пути. Этот линейный интеграл равен электрическому напряжению вдоль заданного пути от A к B. Принято обозначать напряжение буквой u. Таким образом,

$$u_{AB} = \int_A^B E\cos\alpha\, dl = \int_A^B \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l}.$$

Следовательно,

$$A = qu_{AB}.$$

В общем случае рассматриваемый путь может проходить в любой среде, в частности он может быть взят целиком в проводнике, целиком в диэлектрике или может проходить частично в проводнике и частично в диэлектрике.

В соответствии с изложенным *электрическое напряжение представляет собой физическую величину, характеризующую электрическое поле вдоль рассматриваемого пути и равную линейному интегралу напряженности электрического поля вдоль этого пути.*

Нередко, говоря о напряжении вдоль некоторого участка пути, употребляют термин падение напряжения вдоль этого участка. Соответственно линейный интеграл напряженности электрического поля вдоль некоторого замкнутого контура $\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l}$ представляет собой сумму падений напряжений вдоль всех участков этого контура.

Единицей напряжения является *вольт* (В).

Из сказанного вытекает, что *значение напряженности электрического поля равно падению напряжения, отнесенного к единице длины линии напряженности поля.* В самом деле, падение напряжения на пути dl равно $du = E\, dl$, если путь dl совпадает с линией напряженности поля, и, следовательно, $E = du/dl$. Поэтому единицей напряженности электрического поля является вольт на метр (1 В/м).

Как было отмечено в § 1.6, в проводящей среде напряженность электрического поля $\boldsymbol{E}$ связана с плотностью тока $\boldsymbol{J}$ соотношением $\boldsymbol{E} = \rho \boldsymbol{J}$, где ρ — удельное сопротивление среды. В простейшем случае для прямолинейного отрезка проводника с постоянным током i, длиной l и сечением s падение напряжения в нем $u = El$, а ток $i = Js$. Таким образом, $u = \rho Jl = \rho li/s = ri$. Величина $r = u/i$ является электрическим сопротивлением рассматриваемого отрезка проводника. Электрическое сопротивление измеряется в *омах* (Ом).

Соотношение $u = ri$ представляет собой *закон Ома* для этого участка проводника. Мощность, определяющая количество энергии, выделяемой в проводнике в виде теплоты в единицу времени, имеет выражение $p = A/t = uq/t = ui = ri^2$. Это соотношение выражает *закон Джоуля–Ленца*. Единицей мощности является *ватт* (Вт).

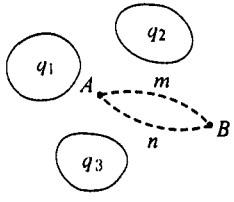


Рис. 1.21

Рассмотрим теперь величины, именуемые электрическим потенциалом и разностью электрических потенциалов.

Пусть имеется электростатическое поле, т. е. поле покоящихся заряженных тел (рис. 1.21). В электростатическом поле линейный интеграл напряженности поля по любому замкнутому контуру равен нулю: $\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = 0$. Это важное свойство электростатического поля вытекает из принципа сохранения энергии. Предположим, что по замкнутому пути $AmBnA$ (рис. 1.21) перемещается

точечное тело с зарядом q. На части замкнутого пути движение будет происходить в направлении сил поля и работа, совершенная силами поля, будет положительной. На другой части замкнутого пути движение будет происходить против сил поля и, соответственно, работа сил поля будет отрицательной. Работа, совершенная силами поля на перемещение тела с зарядом q по всему замкнутому пути, должна быть равна нулю:

$$q\oint \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \oint \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = 0.$$

Действительно, при отсутствии этого условия всегда можно было бы выбрать такое направление обхода контура $AmBnA$, чтобы работа оказалась положительной. Однако после обхода по замкнутому пути система, включая и тело с зарядом q, возвращается в точности в исходное состояние, а это значит, что можно было бы повторять обход контура телом с зарядом q любое число раз и получать при каждом обходе конечную положительную работу. Возможность существования подобного неисчерпаемого источника энергии противоречит принципу сохранения энергии. Таким образом, в электростатическом поле линейный интеграл напряженности поля по любому замкнутому контуру должен быть равен нулю. Отсюда непосредственно вытекает независимость линейного интеграла напряженности поля от выбора пути интегрирования при заданных начальной и конечной точках A и B пути. Действительно,

$$\oint_{AmBnA} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = \int_{AmB} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} + \int_{BnA} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = 0,$$

откуда

$$\int_{AmB} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = -\int_{BnA} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = \int_{AnB} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l},$$

а так как пути m и n взяты произвольно, то, следовательно, интеграл $\int_A^B \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l}$ в электростатическом поле не зависит от выбора пути интегрирования и является только функцией координат точек A и B.

Величину, равную этому интегралу, называют разностью электрических потенциалов точек A и B и обозначают $U_A - U_B$. Имеем $U_A - U_B = \int_A^B \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l}$.

С другой стороны, этот интеграл равен напряжению вдоль некоторого пути от точки A к точке B. Следовательно, в применении к электростатическому полю термины «напряжение» и «разность потенциалов» относятся к одной и той же величине.

В дальнейшем разность потенциалов будем обозначать буквой u, как и напряжение, в соответствии с чем будем применять обозначение $U_A - U_B = u_{AB}$.

Из сказанного выше ясно, что *разность электрических потенциалов двух точек электростатического поля численно равна работе сил поля при перемещении точечного заряженного тела с положительным зарядом, равным единице, из одной данной точки в другую.*

Изберем в качестве конечной точки заданную в пространстве точку P. Тогда значение интеграла $\int_A^P \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l}$ явится функцией только координат x, y, z точки A. Обозначая эту функцию через U_A или $U(x, y, z)$, можем написать

$$\int_A^P \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = U_A = U(x, y, z).$$

Величина U называется электрическим потенциалом рассматриваемой точки поля. Потенциал заданной точки P равен нулю, так как $U_P = \int_P^P \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = 0$.

Электрический потенциал, характеризующий данное поле, может быть определен лишь с точностью до произвольной постоянной, зависящей от произвольного выбора точки P, в которой потенциал принимается равным нулю. Электрическое поле, которое может быть в каждой точке охарактеризовано с точностью до произвольной постоянной скалярной величины, именуемой электрическим потенциалом, носит название потенциального электрического поля. Таковыми, в частности, являются электростатическое поле, а также электрическое поле постоянных токов, протекающих по неподвижным проводникам, при условии, что поле рассматривается вне области действия источников электродвижущих сил. Действительно, распределение зарядов на проводниках при этом остается, как и в электростатике, неизменным во времени. Электрическое поле около неподвижных проводников с постоянными токами и внутри этих проводников будем называть стационарным электрическим полем ($E_{\text{стац}}$). Оговорка о необходимости ограничения областью вне источников ЭДС для того, чтобы поле было потенциальным, будет рассмотрена в конце этого параграфа.

В реальных практических задачах электростатики обычно принимают равным нулю потенциал поверхности земли. При теоретическом исследовании задач, в которых рассматриваются заряженные тела, расположенные в ограниченной области пространства и окруженные бесконечной диэлектрической средой, обычно принимают равным нулю потенциал точек, бесконечно удаленных от заряженных тел, т. е. определяют потенциал как интеграл:

$$U = \int_A^\infty \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l}.$$

Поверхности, которые пересекаются линиями напряженности электрического поля под прямым углом, являются поверхностями равного электрического потенциала. Действительно, вдоль любой линии на этой поверхности имеем $\int_A^B E\cos\alpha\ dl = 0$, так как $\cos\alpha = 0$. Следовательно, разность потенциалов любых двух точек A и B, лежащих на этой поверхности, равна нулю. Уравнение $U(x, y, z) = \text{const}$ определяет совокупность точек, лежащих на поверх-

ности равного потенциала, т. е. является уравнением этой поверхности. Следы поверхности равного потенциала на плоскости чертежа называют линиями равного потенциала. Очевидно, линии равного потенциала пересекаются с линиями напряженности поля всюду под прямым углом.

Напряженность электрического поля внутри проводников при статическом состоянии зарядов должна быть равна нулю, так как при отсутствии тока ($J = 0$) имеем $E = \rho J = 0$. Поэтому в электростатическом состоянии каждое проводящее тело имеет во всем объеме одинаковый потенциал; поверхности этих тел суть поверхности равного потенциала, и линии напряженности поля в диэлектрике нормальны к ним.

Если диэлектрическая проницаемость изолирующей среды, окружающей заряженное проводящее тело, не зависит от напряженности электрического поля, то величина E всюду в диэлектрике, а следовательно, и потенциал U тела будут пропорциональны заряду q тела. Отношение q к U называется электрической емкостью тела:

$$C = \frac{q}{U},$$

причем равным нулю принимается потенциал в бесконечности. Электрическая емкость уединенного тела зависит от геометрических параметров g, определяющих форму и размеры тела, и от абсолютной диэлектрической проницаемости ε окружающего его диэлектрика: $C = F(g, \varepsilon)$. Если диэлектрик однороден, то $C = \varepsilon f(g)$. При указанной оговорке, что ε не зависит от E, величина C не зависит от q и U.

Для двух проводящих тел, окруженных диэлектриком, при условии, что их заряды равны и противоположны по знаку, т. е. $q_1 = -q_2$, разность потенциалов этих тел будет пропорциональна заряду одного из них. При этом величина

$$C = \frac{q_1}{U_1 - U_2} = \frac{q_2}{U_2 - U_1}$$

называется электрической емкостью между этими телами. Она зависит от геометрических величин g, определяющих форму, размеры и взаимное расположение тел, а также от абсолютной диэлектрической проницаемости ε диэлектрика: $C = F(g, \varepsilon)$. Для однородного диэлектрика $C = \varepsilon f(g)$.

Система из двух таких тел, специально созданная для использования ее электрической емкости, называется конденсатором.

В формуле для емкости между телами берется заряд того тела, от которого отсчитывается разность потенциалов. При этом *всегда* $C > 0$.

Единицей электрической емкости служит *фарад* (Ф).

Единицей абсолютной диэлектрической проницаемости, как было отмечено в § 1.4, является фарад на метр (Ф/м). Действительно, из выражения $\varepsilon = D/E$ следует, что единицей величины ε будет

$$1\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} : \frac{\text{В}}{\text{м}} = 1\ \frac{\text{Кл}}{\text{В} \cdot \text{м}} = 1\ \frac{\Phi}{\text{м}}.$$

Перейдем теперь к последнему из рассматриваемой группы понятий, а именно к понятию «электродвижущая сила».

Характерное свойство всякого потенциального электрического поля, и в частности электростатического поля, а именно равенство нулю линейного интеграла напряженности поля вдоль любого замкнутого контура, относится лишь к области пространства, расположенной вне источников так называемых электродвижущих сил (ЭДС).

Появление ЭДС связано с наличием электрических полей неэлектростатического и непотенциального характера.

В общем случае будем говорить, что *в замкнутом контуре действует электродвижущая сила e, если линейный интеграл напряженности электрического поля вдоль замкнутого контура не равен нулю,* причем, как будет сейчас показано, этот линейный интеграл равен ЭДС, действующей в контуре:

$$\oint \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = e \neq 0.$$

Источниками ЭДС могут являться, например, электрические генераторы, гальванические элементы, аккумуляторы, термоэлементы.

Для уяснения сущности величины, к которой принято относить понятие «электродвижущая сила», рассмотрим в виде примера гальванический элемент (рис. 1.22). Тела A и B, подключенные к зажимам элемента, оказываются заряженными под действием ЭДС элемента. Интеграл вектора $\boldsymbol{E}$ по любому пути в диэлектрике между телами A и B равен разности потенциалов этих тел:

$$\int_{AmB} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = U_A - U_B = u_{AB}.$$

Однако если изберем путь интегрирования от тела A по соединительному проводнику к положительному электроду элемента, затем через электролит (путь n) к отрицательному электроду и, наконец, по соединительному проводнику к телу B, то должны признать, что вдоль этого пути интеграл равен нулю: $\int_{AnB} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = 0$. Действительно, этот путь лежит целиком в проводящей среде. В металле проводимость обеспечивается наличием электронов проводимости, в электролите — наличием положительных и отрицательных ионов. Так как $J = 0$, то на всем этом пути $E = \rho J = 0$.

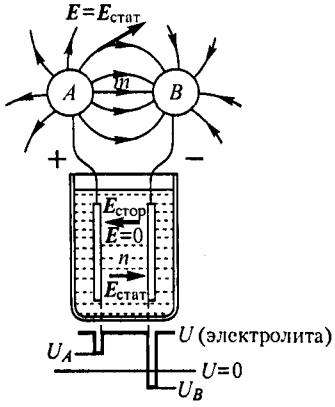


Рис. 1.22

В тонких слоях у поверхностей электродов отсутствие результирующего электрического поля ($\boldsymbol{E} = 0$) является следствием наложения внутри этих слоев на электрическое поле с напряженностью $\boldsymbol{E}_{стат}$, образованное зарядами электродов и электролита, равного и противоположного ему *стороннего* электрического поля с напряженностью $\boldsymbol{E}_{стор}$, имеющего неэлектростатическое происхождение, что можно записать следующим образом:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{стат} + \boldsymbol{E}_{стор} = 0 \quad \text{или} \quad \boldsymbol{E}_{стат} = -\boldsymbol{E}_{стор}.$$

Соответственно, будем иметь

$$\int_{AnB} \boldsymbol{E}_{\text{стат}}\, d\boldsymbol{l} = -\int_{AnB} \boldsymbol{E}_{\text{стор}}\, d\boldsymbol{l} = \int_{BnA} \boldsymbol{E}_{\text{стор}}\, d\boldsymbol{l}.$$

Величина

$$\int_{BnA} \boldsymbol{E}_{\text{стор}}\, d\boldsymbol{l} = e$$

и представляет собой ЭДС гальванического элемента, стремящуюся обладающие зарядом частицы внутри элемента привести в движение против сил электростатического поля $\boldsymbol{E}_{\text{стат}}$.

Обратим внимание на то, что ЭДС будет положительной, если путь интегрирования внутри источника проходит от его отрицательного зажима к положительному.

Природа этой электродвижущей силы заключается в том, что под действием давления растворения положительные ионы (атомы металла, лишенные электронов проводимости) стремятся выйти из электрода в электролит. Этому переходу противодействует осмотическое давление, которое испытывают положительные ионы металла со стороны электролита. Под действием разности этих давлений и происходит переход положительных ионов из электрода в электролит или в обратном направлении в зависимости от того, с какой стороны давление преобладает. В итоге электрод оказывается заряженным в первом случае — отрицательно (избытком оставшихся в металле электронов проводимости), во втором случае — положительно, а электролит приобретает заряд противоположного знака. Между электродом и электролитом устанавливается разность потенциалов и образуется электростатическое поле $\boldsymbol{E}_{\text{стат}}$, препятствующее переходу ионов. Переход прекращается, когда разность давлений уравновешивается силами электростатического поля.

Действие на ион механической силы $\boldsymbol{f}$, обусловленной разностью давлений, эквивалентно наличию электрического поля напряженностью $\boldsymbol{E}_{\text{стор}} = \boldsymbol{f}/q$, где q — заряд иона, что находится в полном соответствии с общим определением напряженности электрического поля. Таким образом, равновесное состояние наступает при условии

$$\boldsymbol{E}_{\text{стат}} + \boldsymbol{E}_{\text{стор}} = \boldsymbol{E} = 0.$$

На рис. 1.22 векторы $\boldsymbol{E}_{\text{стор}}$ и $\boldsymbol{E}_{\text{стат}}$ условно изображены в пространстве между электродами в области, занятой электролитом, хотя, как ясно из изложенного, они отличны от нуля только в тонких слоях между электродами и электролитом.

Если электроды выполнены из разных материалов, то разности потенциалов между ними и электролитом будут различны, что приводит к появлению разности потенциалов между электродами. Это поясняется эпюрой распределения потенциала внизу на рис. 1.22.

Составляя линейный интеграл вектора $\boldsymbol{E}$ по замкнутому контуру $AmBnA$, проходящему своей частью *внутри* источника ЭДС, получаем

$$\oint_{AmBnA} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = \int_{AmB} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} + \int_{BnA} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = U_A - U_B, \text{ так как } \int_{BnA} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = 0.$$

С другой стороны,

$$\oint_{AmBnA} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = \oint \boldsymbol{E}_{\text{стат}}\,d\boldsymbol{l} + \oint \boldsymbol{E}_{\text{стор}}\,d\boldsymbol{l} = e,$$

так как

$$\oint \boldsymbol{E}_{\text{стат}}\,d\boldsymbol{l} = 0, \text{ а } \oint \boldsymbol{E}_{\text{стор}}\,d\boldsymbol{l} = \int_{BnA} \boldsymbol{E}_{\text{стор}}\,d\boldsymbol{l} = e.$$

Следовательно,

$$e = U_A - U_B,$$

т. е. *электродвижущая сила элемента равна разности потенциалов или,* что в данном случае одно и то же, *напряжению на его зажимах при разомкнутой внешней цепи* (при отсутствии тока в цепи).

Из сказанного видно, что условие $\oint \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = 0$ справедливо только в области пространства вне источников ЭДС.

В примере с гальваническим элементом при отсутствии тока результирующее поле (при макроскопическом рассмотрении явления) внутри элемента всюду отсутствует, что является следствием действия неэлектростатических, в данном случае электрохимических, причин. Соответственно напряжение вдоль пути *BnA* внутри элемента при отсутствии тока равно нулю.

Введение понятия стороннего электрического поля как составляющей результирующего поля и, соответственно, понятия ЭДС $e = \oint \boldsymbol{E}_{\text{стор}}\,d\boldsymbol{l}$ имеет смысл в том отношении, что именно этой ЭДС определяется работа, затрачиваемая на перенесение обладающих зарядами элементарных частиц, связанная с электрохимическими процессами. Следовательно, именно ЭДС характеризует при прохождении тока преобразование энергии внутри элемента. В связи с этим, говоря об *источниках* ЭДС, будем употреблять также термин *источник энергии*.

Весьма важным обстоятельством является то, что ЭДС элемента почти не зависит от электрического тока в его цепи.

Электродвижущие силы возникают также при соприкосновении разнородных металлов. В этом случае возникновение ЭДС, называемых *контактными* ЭДС, связано с переходом электронов проводимости в месте контакта из одного металла в другой и образованием вследствие этого в одном металле избыточного положительного, в другом — избыточного отрицательного электрического заряда. Этот переход электронов может рассматриваться как результат действия в месте контакта стороннего электрического поля, имеющего неэлектростатический характер. Появление на соприкасающихся металлах зарядов разных знаков приводит к возникновению так называемой контактной разности потенциалов, равной при отсутствии тока контактной ЭДС. Контактная ЭДС зависит от рода соприкасающихся металлов и от температуры.

Последнее обстоятельство используется в так называемых термоэлементах. Если составить замкнутую цепь из двух разнородных проводников, то при различных температурах t и t_0 двух мест спаев этих проводников контактные ЭДС в местах спаев будут различными и не будут взаимно компенсироваться вдоль цепи. В итоге в замкнутой цепи будет действовать результирующая ЭДС, назы-

ваемая термоэлектродвижущей силой. В общее значение термоэлектродвижущей силы войдут также еще дополнительные ЭДС, которые возникают вдоль каждого из двух однородных проводников вследствие того, что один конец их находится в среде более высокой температуры, чем другой. Эти дополнительные ЭДС являются результатом некоторого перехода электронов проводимости от более нагретого конца проводника к менее нагретому вследствие того, что интенсивность теплового движения электронов возрастает с увеличением температуры.

В термоэлементе действие ЭДС при прохождении тока связано с преобразованием тепловой энергии в электромагнитную. Обычно применяемые термопары имеют ЭДС порядка нескольких милливольт или десятых милливольта при температурах холодного и горячего спаев соответственно 0 и 100 °С.

В следующих параграфах понятие «электродвижущая сила» будет расширено включением в него ЭДС, индуцируемых при изменении во времени магнитного потока, и тогда будет дано общее определение этого важного понятия.

Обратим особое внимание на то, что при определении ЭДС, как уже было сказано, путь интегрирования берется *внутри* источника энергии от отрицательного зажима к положительному $\left(e = \int_{BnA} \boldsymbol{E}_{\text{стор}}\, dl \right)$, а при определении напряжения на его зажимах B и A интегрирование ведется по пути *вне* источника от положительного зажима к отрицательному:

$$u_{AB} = U_A - U_B = \int_{AmB} \boldsymbol{E}\, dl.$$

1.9. Магнитный поток. Принцип непрерывности магнитного потока

Поток вектора магнитной индукции сквозь некоторую поверхность s (рис. 1.23) называют кратко магнитным потоком сквозь эту поверхность и обозначают Ф. Имеем

$$\Phi = \int_s B\cos\beta\, ds = \int_s \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{s}.$$

Магнитная индукция является плотностью магнитного потока в данной точке поля. Действительно, проведя поверхность нормально к вектору $\boldsymbol{B}$, будем иметь $\cos\beta = 1$; $d\Phi = B\, ds$; $B = d\Phi/ds$.

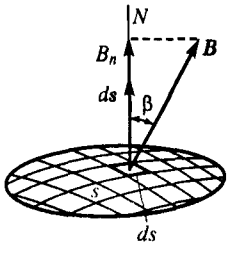


Рис. 1.23

Единицей магнитного потока является *вебер* (Вб). Единицей магнитной индукции — *тесла*, равная *веберу на квадратный метр* (1 Тл = 1 Вб/м²).

Линиями магнитной индукции называют линии, проведенные так, чтобы касательные к ним в каждой их точке совпадали по направлению с вектором $\boldsymbol{B}$. Эти линии изображают со стрелками, указывающими направление вектора $\boldsymbol{B}$.

Часть пространства, ограниченная трубчатой поверхностью, образованной совокупностью линий магнитной индукции, называется трубкой магнитной индукции.

Можно представить все магнитное поле подразделенным на трубки магнитной индукции и условиться изображать каждую такую трубку одной линией магнитной индукции, совпадающей с осью трубки.

Трубки магнитной индукции, поток сквозь поперечное сечение которых равен единице, называются единичными трубками. Соответственно линии магнитной индукции, изображающие единичные трубки, называются единичными линиями магнитной индукции.

Принцип непрерывности магнитного потока, имеющий в теории электромагнитных явлений фундаментальное значение, гласит, *что линии магнитной индукции нигде не имеют ни начала, ни конца — они всюду непрерывны.*

Мы убеждаемся в справедливости этого важного принципа во всех без исключения случаях, когда магнитное поле существует в воздухе или вообще в такой среде, в которой поле может быть непосредственно исследовано опытным путем. Так, например, линии магнитной индукции около прямолинейного провода с током являются окружностями, имеющими центры на оси провода (рис. 1.24). Направление линий связано с направлением тока правилом правого винта. На рис. 1.24 изображено нормальное сечение провода, причем ток уходит от наблюдателя, что показано косым крестом, изображающим хвост стрелки. В том случае, когда ток направлен на наблюдателя, ставят условную точку, изображающую острие стрелки.

Как бы ни была сложна форма контура электрического тока, линии магнитной индукции, окружающие этот контур, всегда оказываются непрерывными. В виде примера можно указать поле соленоида с током, картина линий которого изображена на рис. 1.25.

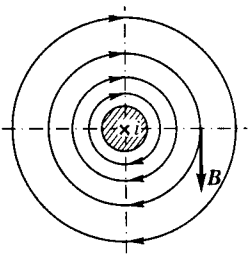


Рис. 1.24

Требует особого рассмотрения вопрос о непрерывности линий магнитной индукции в том случае, когда в магнитном поле расположены твердые тела и мы лишены возможности непосредственно исследовать поле внутри этих тел. Так, например, поле постоянного магнита изучить непосредственно опытным путем можно только в пространстве вне магнита. Поэтому необходимо установить на основе каких-либо дополнительных фактов или каких-либо соображений, продолжаются ли линии магнитной индукции и внутри тела самого магнита. Действительно, существование поля вне магнита можно было бы объяснить наличием на поверхности полюсов магнита особых источников магнитного поля, называемых магнитными массами. Согласно такому представлению, на северном полюсе магнита, где, как нам кажется, начинаются линии магнитной индукции, должна быть расположена положительная магнитная масса, и на южном, где линии кончаются — отрицательная магнитная масса. Такое представление о природе магнитных явлений и сложилось исторически до эпохи, началом которой явилось открытие магнитного поля электрических токов.

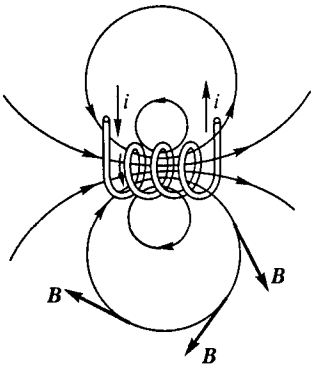


Рис. 1.25

Если бы поле создавалось магнитными массами m, то поле внутри магнита должно было бы выглядеть так, как это изображено на рис. 1.26, — линии магнитной индукции внутри магнита, так же как и вне его, оказались бы направленными от северного полюса к южному.

В настоящее время намагниченность магнита, или вообще намагниченность тела, объясняют существованием элементарных токов внутри вещества тела, являющихся результатом движения электронов по орбитам в атомах, а также существованием магнитных моментов элементарных частиц. Хотя внутреннее строение элементарных частиц и, соответственно, природа их магнитных моментов в настоящее время еще не изучены, но можно высказать предположение, что и магнитные моменты элементарных частиц являются результатом внутреннего движения в этих частицах, имеющего характер электрических токов.

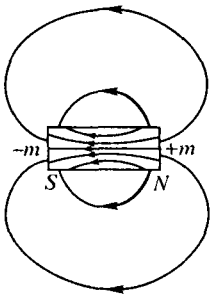


Рис. 1.26

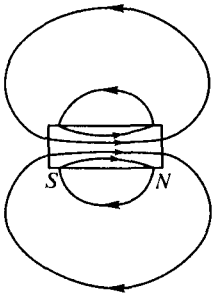


Рис. 1.27

Исходя из этих представлений, приходим к заключению, что внутри магнита линии магнитной индукции должны идти так же, как в соленоиде (см. рис. 1.25), — они должны представлять собой продолжение линий, расположенных вне магнита. Такая правильная картина поля изображена на рис. 1.27.

Эти соображения приводят к выводу, что магнитных масс в действительности не существует. Такой вывод подтверждается опытом с ломанием магнита. На какие бы мелкие части ни дробили магнит, никогда невозможно получить такие его части, на которых наблюдалось бы наличие избытка магнитной массы одного знака.

Все эти соображения остаются в силе по отношению к любому телу, через которое проходит магнитный поток.

Итак, *магнитное поле всегда связано с электрическим током. Во всех без исключения случаях линии магнитной индукции непрерывны.*

Математически принцип непрерывности магнитного потока формулируется следующим образом:

$$\oint_s \boldsymbol{B}d\boldsymbol{s} = 0,$$

т. е. *магнитный поток сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю.*

Применяя уравнение $\oint_s \boldsymbol{B}d\boldsymbol{s} = 0$ к поверхности произвольного отрезка трубки магнитной индукции (рис. 1.28), нетрудно убедиться, что поток, входящий сквозь сечение s_1 трубки, равен потоку, выходящему через сечение s_2. Следовательно, поток сквозь различные поперечные сечения трубки имеет одно и то же значение.
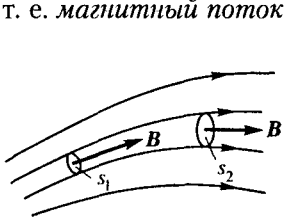


Рис. 1.28

1.10. Закон электромагнитной индукции

Явление электромагнитной индукции открыто в 1831 г. Фарадеем, который в итоге серии опытных исследований установил основной закон, характеризующий это явление количественно.

Рассмотрим замкнутый контур *abcda* из тонкого проводника, расположенный во внешнем магнитном поле (рис. 1.29). Пусть Ф — магнитный поток сквозь поверхность *s*, ограниченную этим контуром. Предположим, что этот контур перемещается за время *dt* в магнитном поле так, что каждый его элемент *dl* проходит путь $d\xi$, после чего контур занимает новое положение *a'b'c'd'a'*. Сквозь поверхность $[d\xi\, dl]$, *очерчиваемую элементом dl* при его движении, проходит магнитный поток

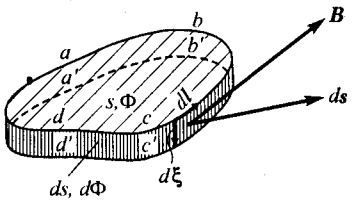


Рис. 1.29

$$\boldsymbol{B}[d\xi dl] = -[d\xi\, \boldsymbol{B}]\, dl.$$

Магнитный поток $d\Phi$, проходящий через всю поверхность *ds* полоски, очерчиваемую всем контуром *abcda* при его перемещении,

$$d\Phi = -\oint_l [d\xi\, \boldsymbol{B}]\, dl, \qquad (*)$$

где $\oint_l$ означает интеграл по замкнутому контуру *abcda*.

Вместе с проводником переносятся находящиеся в нем свободные электрически заряженные частицы. При движении в магнитном поле со скоростью $\boldsymbol{v} = d\xi/dt$ частицы с электрическим зарядом *q* на нее действует со стороны магнитного поля механическая сила (см. § 1.3)

$$\boldsymbol{f}_2 = q[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}] = q\left[\frac{d\xi}{dt}\boldsymbol{B}\right].$$

В соответствии со сказанным в § 1.3 движущийся вместе с проводником наблюдатель, для которого частицы с зарядом *q* неподвижны, воспринимает эту силу как результат действия на частицы электрического поля с напряженностью

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{f}_2}{q} = [\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}] = \left[\frac{d\xi}{dt}\boldsymbol{B}\right].$$

Назовем это электрическое поле индуктированным электрическим полем и будем обозначать его напряженность $\boldsymbol{E}_{\text{инд}}$. Интеграл величины $\boldsymbol{E}_{\text{инд}}$ вдоль рассматриваемого нами контура равен

$$\oint_l \boldsymbol{E}_{\text{инд}}\, d\boldsymbol{l} = \oint_l [\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]\, dl = \oint_l \left[\frac{d\xi}{dt}\boldsymbol{B}\right] dl.$$

Если под $d\xi$ понимать путь, проходимый элементом *dl* за время *dt*, *одинаковое для всех элементов контура*, то величину *dt* можно вынести за знак интеграла, и будем иметь

$$\oint_l \boldsymbol{E}_{\text{инд}}\, d\boldsymbol{l} = \frac{\oint_l [d\boldsymbol{\xi}\, \boldsymbol{B}]\, d\boldsymbol{l}}{dt}$$

или согласно выражению (*)

$$\oint_l \boldsymbol{E}_{\text{инд}}\, d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Этот вывод был сделан в предположении, что контур *abcda* движется во внешнем магнитном поле, т. е. движется по отношению к источникам этого магнитного поля — постоянным магнитам или проводникам с током, создающим это поле.

Однако в контуре *abcda* индуцируется ЭДС и в том случае, когда контур неподвижен и поток Ф изменяется вследствие движения источников магнитного поля — постоянных магнитов или проводников с токами или же вследствие изменения токов в проводниках, создающих это поле. Важно лишь, чтобы было относительное движение контура и внешнего магнитного поля, приводящее к изменению потока Ф.

В § 1.8 было высказано общее положение, что если линейный интеграл напряженности электрического поля вдоль замкнутого контура не равен нулю, то в контуре действует ЭДС, равная этому интегралу. Таким образом, последнее равенство свидетельствует, *что во всех случаях, когда магнитный поток* Ф, *проходящий сквозь поверхность, ограниченную некоторым контуром, изменяется во времени, в этом контуре индуцируется ЭДС, равная взятой со знаком минус скорости изменения этого потока:*

$$e = \oint \boldsymbol{E}_{\text{инд}}\, d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (**)$$

Это уравнение и выражает закон электромагнитной индукции в формулировке, данной Максвеллом.

В общем случае поток Ф является функцией геометрических координат контура и времени, и можно написать

$$e = \oint \boldsymbol{E}_{\text{инд}}\, d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \oint_l [\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]\, d\boldsymbol{l},$$

где составляющая $-\partial\Phi/\partial t$ определяется изменением магнитного поля во времени, т. е. изменением потока Ф в неподвижном контуре, а составляющая $\oint_l [\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]\, d\boldsymbol{l}$ определяется движением контура в магнитном поле. Соответственно, и величина $[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]$ представляет собой только одну составляющую напряженности $\boldsymbol{E}_{\text{инд}}$ индуцированного электрического поля, определяемую движением элемента $d\boldsymbol{l}$ во внешнем поле со скоростью $\boldsymbol{v}$. Можно было бы определить всю величину $\boldsymbol{E}_{\text{инд}}$ из аналогичной формулы:

$$\boldsymbol{E}_{\text{инд}} = [\boldsymbol{v}'\boldsymbol{B}],$$

но величина $\boldsymbol{v}'$ здесь уже должна представлять не скорость $\boldsymbol{v}$ элемента $d\boldsymbol{l}$ в рассматриваемой системе координат, а его скорость относительно магнитного поля.

Мы предполагали, что контур *abcda* образован тонким проводником. Максвелл обобщил равенство (**) на контур, расположенный в любой среде. Мы также считаем это равенство справедливым для любого замкнутого контура, не обязательно образованного проводником. В общем случае этот контур может быть и воображаемым контуром, расположенным целиком в диэлектрике или частично в проводящей среде и частично в диэлектрике. Во всех без исключения случаях при изменении во времени магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную любым контуром, в последнем возникает ЭДС. В проводящей среде ЭДС может вызвать токи проводимости, в диэлектрике переменная ЭДС вызывает токи электрического смещения. При таком обобщении равенство (**) свидетельствует, что *при изменении во времени магнитного поля появляется в том же пространстве связанное с ним электрическое поле, причем электрическое напряжение вдоль любого замкнутого контура равно ЭДС, индуцируемой в этом контуре.*

По сути дела, *оба эти поля — магнитное и электрическое — являются при этом двумя сторонами единого электромагнитного поля.*

Понимаемое в таком широком смысле уравнение (**) является одним из основных уравнений электромагнитного поля.

В случае, когда контур образован проводником, в нем под действием ЭДС возникает ток проводимости, и этот ток создает вокруг контура свое магнитное поле. При этом Ф в выражении (**) является потоком, созданным внешними источниками и током i в самом контуре. Если в контуре нет других источников ЭДС, а именно сторонних ЭДС, рассмотренных в § 1.8, то и для напряженности результирующего поля $\boldsymbol{E}$ имеем

$$\oint \boldsymbol{E}_{\text{инд}}\, d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Величина $\oint \boldsymbol{E}_{\text{инд}}\, d\boldsymbol{l}$ есть сумма падений напряжения вдоль всего замкнутого контура, равная току i в контуре, умноженному на электрическое сопротивление r контура. Следовательно, в этом случае

$$ir = -\frac{d\Phi}{dt}$$

или $i\,dt\,r = -\,d\Phi$, $r\,dq = -\,d\Phi$, т. е. $dq = -\,d\Phi/r$.

Для конечного изменения потока на величину $\Delta\Phi$ получаем

$$\Delta q = -\frac{\Delta\Phi}{r}.$$

В этой форме закон электромагнитной индукции и был установлен экспериментально Фарадеем.

Приведенные формулировки предполагают изменение потока Ф сквозь поверхность s, ограниченную контуром, в котором индуцируется ЭДС. Так как конечная незамкнутая поверхность ограничивается всегда замкнутым контуром, то только по отношению к замкнутым контурам, но отнюдь не к их отрезкам, применимы вышеприведенные формулировки.

Линии магнитной индукции всюду непрерывны. Поэтому линия магнитной индукции может войти внутрь контура индуцированного тока или выйти из него, только пересекая где-либо контур. Таким образом, изменение $\Delta\Phi$ потока, охватываемого контуром, должно равняться числу единичных линий магнитной индукции ΔN, пересеченных контуром: $\Delta\Phi = \Delta N$ и также $d\Phi = dN$.

Закон электромагнитной индукции может быть представлен теперь в формах

$$\Delta q = -\frac{\Delta N}{r} \quad \text{и} \quad e = -\frac{dN}{dt},$$

т. е. *электродвижущая сила, индуцируемая в контуре, равна скорости пересечения контура единичными линиями магнитной индукции, взятой с обратным знаком.*

Эту формулировку закона электромагнитной индукции будем называть фарадеевой формулировкой, так как она связана с основной идеей Фарадея о пересечении проводника магнитными линиями.

В применении к замкнутым контурам формулировки Максвелла и Фарадея тождественны, и для ЭДС, возникающей в замкнутом контуре, всегда можно написать

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dN}{dt}.$$

Однако, если максвеллово выражение для индуцированной ЭДС по своему существу может быть применено только к замкнутым контурам, то фарадеево выражение для ЭДС, в котором все внимание обращается на акт пересечения контура единичными линиями магнитной индукции, может быть применено и к отрезкам контура. В этом отношении последнее выражение оказывается более универсальным.

Пусть отрезок проводника $d\boldsymbol{l}$ движется с произвольно направленной скоростью $\boldsymbol{v}$ в общем случае в неоднородном, неизменном во времени магнитном поле. Пусть $\boldsymbol{B}$ есть вектор магнитной индукции в месте расположения отрезка $d\boldsymbol{l}$ в данный момент времени (рис. 1.30). ЭДС, индуцируемая на отрезке $d\boldsymbol{l}$,

$$de = \boldsymbol{E}_{\text{инд}}\, d\boldsymbol{l} = [\boldsymbol{vB}]\, d\boldsymbol{l}.$$

В данном частном случае, когда прямолинейный проводник длиной l движется со скоростью v в однородном магнитном поле так, что направления величин l, B и v взаимно перпендикулярны, получаем для индуцируемой в отрезке l ЭДС выражение

$$e = vBl.$$

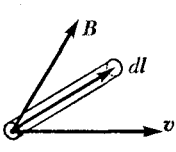


Рис. 1.30

Направление ЭДС можно определить, пользуясь правилом правой руки. Если большой, указательный и средний пальцы правой руки расположить взаимно перпендикулярно и так, чтобы большой палец был направлен в сторону движения, а указательный — в сторону поля, то средний палец будет указывать направление ЭДС. Это правило легко запоминается, если обратить внимание на то, что порядок пальцев на руке — большой, указательный, средний — соответствует порядку по алфавиту начальных букв слов: движение, поле, ЭДС или движение, поле, ток.

1.11. Потокосцепление. ЭДС самоиндукции и взаимной индукции. Принцип электромагнитной инерции

Магнитный поток Ф сквозь поверхность s, ограниченную контуром, например контуром проводящей цепи, равен поверхностному интегралу вектора магнитной индукции, распространенному по поверхности s: $\Phi = \int_s \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{s}$. Это выражение справедливо для любой поверхности, ограниченной сколь угодно сложным контуром. В общем случае такая поверхность может иметь весьма сложную форму. Так, на рис. 1.31 штриховкой показана поверхность, «натянутая» на контур, расположенный по винтовой линии и образующий катушку из трех витков. Отдельные линии магнитной индукции пронизывают эту поверхность несколько раз: линии *4, 5, 6, 7* и *8* — три раза, линия *3* — два раза.

Целесообразно в таких сложных случаях ввести понятие о потокосцеплении Ψ. Термин «потокосцепление» необходимо ввести в связи с тем, что отдельные линии магнитной индукции несколько раз сцепляются со всем контуром. Значение Ψ можно получить, умножая поток каждой единичной линии магнитной индукции на число витков цепи, с которыми она сцепляется, и складывая полученные результаты. Сложение следует производить алгебраически, причем положительными следует считать линии магнитной индукции, направление которых связано с положительным направлением тока в контуре электрической цепи правилом правого винта.

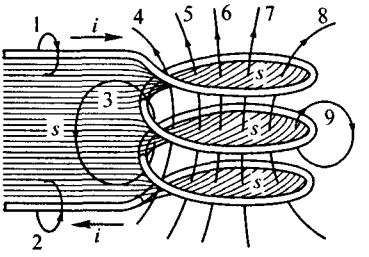


Рис. 1.31

Ясно, что ЭДС, индуцируемая во всей цепи, определяется потокосцеплением Ψ. Действительно, при уменьшении потока до нуля каждая линия магнитной индукции столько раз пересечет контур тока, сколько раз она с ним сцепляется. Поэтому должно быть равенство

$$e = -\frac{dN}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}.$$

Потоки, сцепляющиеся с отдельными витками катушки, различны. Поэтому различны и ЭДС, индуцируемые в отдельных витках. В ряде случаев приближенно можно считать, что все линии магнитной индукции сцепляются со всеми w витками катушки. Тогда потокосцепление катушки связывается с потоком Ф в одном витке простым соотношением $\Psi = w\Phi$. В таком случае ЭДС, индуцируемая в катушке,

$$e = -\frac{d\Psi}{dt} = -w\frac{d\Phi}{dt}.$$

Таким упрощенным расчетом обычно можно пользоваться при вычислении ЭДС, индуцируемых в катушках с замкнутыми сердечниками из ферромагнитных материалов.

В простейшем случае для одного контура с электрическим током магнитный поток, сцепляющийся с этим контуром, определяется током i, протекающим

в этом же контуре. Такой поток называют потоком самоиндукции. Потокосцепление самоиндукции некоторого электрического контура или, что то же, некоторой неразветвленной электрической цепи, обозначают Ψ_L. Можно представить его в виде

$$\Psi_L = Li.$$

Величину L называют собственной индуктивностью или просто индуктивностью контура. Индуктивность зависит от геометрических величин g, определяющих размеры и форму контура, а также от абсолютной магнитной проницаемости μ среды, в которой существует магнитное поле: $L = F(g, \mu)$. Для однородной среды с μ = const имеем $L = \mu f(g)$.

При изменении потока самоиндукции в контуре возникает электродвижущая сила самоиндукции. Изменение потока Ψ_L может происходить как вследствие изменения тока, так и вследствие изменения индуктивности. Поэтому в общем случае ЭДС самоиндукции e_L может быть представлена в виде суммы двух членов:

$$e_L = -\frac{d\Psi_L}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} = -L\frac{di}{dt} - i\frac{dL}{dt}.$$

При L = const

$$e_L = -L\frac{di}{dt}.$$

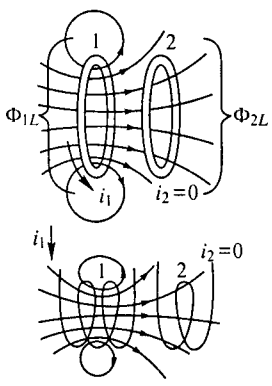


Рис. 1.32

Для двух или нескольких контуров с токами магнитный поток, сцепляющийся с одним из этих контуров, определяется токами во всех контурах. Рассмотрим два контура и предположим, что ток протекает только в первом из них (рис. 1.32). Может оказаться, что часть линий магнитной индукции потока самоиндукции первого контура сцепляется также и со вторым контуром. При этом поток, сцепляющийся со вторым контуром и определяемый током в первом контуре, называют потоком взаимной индукции. Потокосцепление взаимной индукции со вторым контуром будем обозначать Ψ_{2M} или Ψ_{21}. Первый индекс всегда будет указывать, с какой цепью рассматривается сцепление потока. Второй индекс (M или 1) указывает, что поток определяется током, протекающим в другой, в данном случае в первой, цепи. Можно написать

$$\Psi_{2M} = M_{21}i_1.$$

Величину M_{21} называют взаимной индуктивностью контуров. Она зависит от геометрических величин g, определяющих размеры и формы контуров и их взаимное расположение, а также от абсолютной магнитной проницаемости μ среды: $M = f(g, \mu)$. Если μ = const, то $M = \mu f(g)$.

Единицей индуктивности и взаимной индуктивности является *генри* (Гн).

При изменении потока взаимной индукции, сцепляющегося со вторым контуром, в этом контуре возникает электродвижущая сила взаимной

индукции. Поток Ψ_{2M} может изменяться либо вследствие изменения тока i_1, либо вследствие изменения взаимной индуктивности M_{21}. Соответственно, ЭДС взаимной индукции, возникающая во втором контуре, может быть представлена в виде

$$e_{2M} = -\frac{d\Psi_{2M}}{dt} = -\frac{d(M_{21}i_1)}{dt} = -M_{21}\frac{di_1}{dt} - i_1\frac{dM_{21}}{dt}.$$

Если $M_{21} = \text{const}$, то $e_{2M} = -M_{21}\dfrac{di_1}{dt}$.

Остановимся еще на общем характере индуцированных ЭДС. Знак «минус» в выражении для индуцированной ЭДС свидетельствует о том, что эта ЭДС стремится вызвать токи, направленные таким образом, чтобы воспрепятствовать изменению магнитного потока. Это положение выражает сформулированный Ленцем принцип электромагнитной инерции. В самом деле, предположим, что поток, сцепляющийся с контуром, убывает, т. е. $d\Psi < 0$. В таком случае $e = -d\Psi/dt > 0$, и следовательно, возникающая в контуре ЭДС стремится вызвать ток в положительном направлении и тем самым воспрепятствовать убыванию потока. Наоборот, если поток возрастает, то $d\Psi > 0$ и $e < 0$. В этом случае ЭДС в контуре стремится вызвать ток в отрицательном направлении и этим воспрепятствовать увеличению потока. Мы видим, что индуцированные ЭДС имеют характер сил инерции.

На основании сказанного можно сформулировать принцип электромагнитной инерции в отношении электромагнитных процессов, совершающихся в системе контуров с электрическими токами, а именно: *в системе контуров с электрическими токами существует тенденция к сохранению неизменными магнитных потоков, сцепляющихся с отдельными контурами системы. При всякой попытке изменить потоки, сцепляющиеся с контурами, в контурах возникают электродвижущие силы, стремящиеся воспрепятствовать этому изменению.* В простейшем случае для одного контура с током возникает ЭДС самоиндукции, равная

$$e = -\frac{d(Li)}{dt} = -L\frac{di}{dt}.$$

В простейшем случае, который рассматривается в динамике, а именно, при движении свободной материальной точки, принцип инерции заключается в том, что свободной материальной точке свойственно сохранять свое количество движения. Если под действием внешних сил изменяется количество движения точки, то, вводя в рассмотрение силы инерции, равные и противоположные внешним силам, можно рассматривать эти силы инерции как препятствующие изменению количества движения. Если направление силы совпадает с направлением скорости v, то сила инерции имеет выражение

$$f = -\frac{d(mv)}{dt} = -m\frac{dv}{dt},$$

где m — масса материальной точки.

Мы видим, что магнитный поток можно рассматривать как количество движения в электромагнитном процессе, индуктивность контура — как коэффици-

ент электромагнитной инерции, ток — как электрическую скорость. Электрической координатой системы при этом является электрический заряд q, перенесенный через поперечное сечение контура от некоторого начального момента времени, так как $i = dq/dt$.

Силы инерции наиболее полно проявляются в системе, не имеющей трения. Соответственно, и электромагнитная инерция выявляется наиболее полно в контурах, электрическое сопротивление которых равно нулю. Такую сверхпроводящую цепь можно осуществить на опыте. Явление сверхпроводимости заключается в том, что некоторые металлы, например свинец, олово, ртуть, и сплавы — ниобий—титан, ниобий—олово при весьма низких температурах (порядка нескольких Кельвинов) имеют удельное сопротивление, практически равное нулю.

Положим, что кольцо из одного из перечисленных материалов внесено во внешнее магнитное поле (рис. 1.33) и заморожено, т. е. сделано сверхпроводящим. Пусть при этом с кольцом сцепляется внешний поток $\Psi_M = \Psi_0$ (линии *1– 6*). Будем теперь выносить кольцо из внешнего поля. В кольце возникает внешняя ЭДС $e_M = - d\Psi_M/dt$, под действием которой в контуре кольца появляется ток i и образуется поток самоиндукции Ψ_L. Сумма внешней ЭДС и ЭДС самоиндукции должна быть равна падению напряжения ir в контуре. Так как $r = 0$, то получаем

$$-\frac{d\Psi_M}{dt} - \frac{d\Psi_L}{dt} = 0,$$

откуда следует, что

$$\Psi_M + \Psi_L = \text{const}.$$

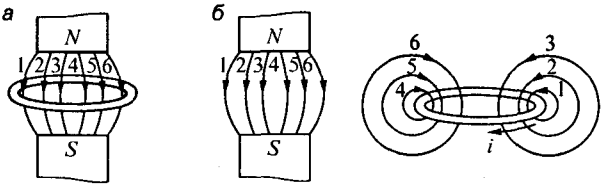


Рис. 1.33

В начальном положении контура $\Psi_M = \Psi_0$ и $\Psi_L = 0$ (рис. 1.33, *а*). Следовательно, $\Psi_M + \Psi_L = \Psi_0$. Когда контур будет вынесен за пределы внешнего поля (рис. 1.33, *б*), будем иметь $\Psi_M = 0$ и $\Psi_L = Li = \Psi_0$.

Мы видим, что при $r = 0$ электромагнитная инерция проявляется в полной мере — результирующее потокосцепление остается постоянным и лишь совершается преобразование внешнего потока в поток самоиндукции.

1.12. Потенциальное и вихревое электрические поля

Вернемся к основным определениям терминов «электродвижущая сила», «электрическое напряжение» и «разность электрических потенциалов», чтобы ясно себе представить, в каких случаях можно пользоваться тем или иным из них.

ЭДС, действующая вдоль некоторого пути, равна линейному интегралу вдоль этого пути напряженности стороннего электрического поля, а также электрического поля, индуцированного изменяющимся магнитным полем. Появление ЭДС может быть обусловлено различными причинами. Если в электрической цепи содержатся участки с электролитической проводимостью, то ЭДС может возникать вследствие электрохимических процессов. В месте контакта двух проводников из различных металлов возникает контактная ЭДС. При изменении магнитного потока в контурах, расположенных в любой среде, возникают ЭДС индукции.

Понятие «электрическое напряжение», или «падение напряжения», связано с результирующим электрическим полем. *Электрическое напряжение вдоль некоторого пути от точки A до точки B равно линейному интегралу напряженности результирующего электрического поля (электростатического, стационарного, стороннего, индуцированного) вдоль этого пути.*

Необходимо подчеркнуть, что напряжение между двумя точками A и B (рис. 1.34) при переменном магнитном поле зависит от выбора пути, по которому составляем линейный интеграл напряженности электрического поля от точки A к точке B. Действительно, для замкнутого контура $AmBnA$ в переменном магнитном поле имеем

$$\oint_{AmBnA} \boldsymbol{E}d\boldsymbol{l} = \int_{AmB} \boldsymbol{E}d\boldsymbol{l} + \int_{BnA} \boldsymbol{E}d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где Φ — магнитный поток сквозь поверхность, ограниченную этим контуром. Следовательно,

$$\int_{AmB} \boldsymbol{E}d\boldsymbol{l} = \int_{AnB} \boldsymbol{E}d\boldsymbol{l} - \frac{d\Phi}{dt}.$$

В виде примера рассмотрим цепь переменного тока (рис. 1.35). Магнитное поле, окружающее проводники такой цепи, изменяется во времени. Поэтому в контурах, которые можно представить мысленно в диэлектрике, индуцируются электродвижущие силы. Вследствие этого напряжение между точками A и B цепи зависит от выбора пути от точки A к точке B. И действительно, показание вольтметра в этом случае, в принципе, зависит от положения вольтметра и соединительных проводников по отношению к контуру цепи. Отсюда ясно, что по отношению к цепям переменного тока, если подходить строго, нельзя говорить о напряжении между двумя точками цепи или о напряжении на зажимах цепи, не делая оговорки, вдоль какого пути определяется напряжение. Однако мы часто пользуемся выражением «напряжение на зажимах цепи переменного тока» без всяких оговорок, так как указанная неопределенность в обычных цепях при низких частотах и не слишком больших токах практически незначительна, если, конечно, не выбирать путей интегрирования в мес-

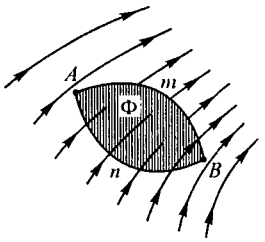


Рис. 1.34

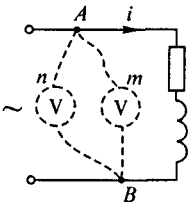


Рис. 1.35

тах, где переменные магнитные поля особенно сильны. Эта неопределенность становится практически ощутимой при очень высоких частотах и при весьма больших токах в цепи. В таких случаях можно говорить только о напряжении между двумя точками цепи вдоль определенного заданного пути.

Как ранее было показано, линейный интеграл напряженности электрического поля совершенно не зависит от выбора пути между точками A и B в электростатическом поле и электрическом поле постоянных токов, протекающих в неподвижных проводниках, если путь интегрирования не проходит через источники ЭДС. В таких полях ЭДС в любом замкнутом контуре, не проходящем через источники ЭДС, равна нулю. Такие поля могут быть полностью охарактеризованы скалярным электрическим потенциалом, т. е. являются потенциальными полями. По отношению к ним применим термин «разность потенциалов в точках A и B».

Таким образом, понятие «разность потенциалов», применимое только к потенциальным полям или соответственно к потенциальным составляющим результирующего поля, имеет более узкий смысл, чем понятие «напряжение», применимое к любым электрическим полям.

Разность электрических потенциалов двух точек равна линейному интегралу напряженности потенциального (электростатического и стационарного) электрического поля от одной данной точки до другой.

Для потенциального поля понятия «напряжение между точками A и B» и «разность потенциалов в точках A и B», по существу, совпадают.

Рассмотрим несколько подробнее только что высказанные общие положения на конкретном примере цепи, изображенной на рис. 1.35.

Если бы ток в этой цепи был постоянным, то электрическое поле было бы стационарным и потенциальным, т. е. при этом можно было бы написать

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\text{стац}} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\text{пот}}.$$

Это электрическое поле связано с зарядами на поверхности проводов и в данном случае является результатом падения напряжения в сопротивлении цепи.

Электрическое напряжение между точками A и B в этом случае, как только что было отмечено, не зависит от выбора пути, и напряжение вдоль любого замкнутого контура равно нулю: $\oint \boldsymbol{E}dl = 0$. Последнее согласуется с тем, что ЭДС в любом заданном контуре $e = -d\Phi/dt$ в таком поле равна нулю, так как $\Phi = \text{const}$.

Если ток в проводах цепи станет изменяться во времени, то физически это приведет к изменению электромагнитного поля около проводов. В этом переменном поле напряжение между точками A и B в каждый момент времени зависит от выбора пути между этими точками. При этом формально можно результирующее электрическое поле рассматривать как наложение двух полей — стационарного (потенциального) электрического поля, так же, как при постоянном токе, связанного с зарядами на поверхности проводов, и индуцированного (так называемого вихревого) электрического поля, вызванного изменяющимся магнитным полем, и соответственно имеем

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\text{стац}} + \boldsymbol{E}_{\text{инд}} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\text{пот}} + \boldsymbol{E}_{\text{вихр}}.$$

Для стационарного (потенциального) поля для любого замкнутого контура

$$\oint \boldsymbol{E}_{\text{стац}} d\boldsymbol{l} = 0.$$

Для индуцированного (вихревого) поля

$$\oint \boldsymbol{E}_{\text{инд}} d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \neq 0$$

и для результирующего поля

$$\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = \oint \left(\boldsymbol{E}_{\text{стац}} + \boldsymbol{E}_{\text{инд}}\right) d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \neq 0.$$

При принятом определении понятия «электродвижущая сила» только величина $\oint \boldsymbol{E}_{\text{инд}} d\boldsymbol{l}$ рассматривается как электродвижущая сила. Ее можно представить как сумму ЭДС на отдельных участках контура, например (см. рис. 1.35) в виде

$$\oint_{AmBnA} \boldsymbol{E}_{\text{инд}} d\boldsymbol{l} = \int_{AmB} \boldsymbol{E}_{\text{инд}} d\boldsymbol{l} + \int_{BnA} \boldsymbol{E}_{\text{инд}} d\boldsymbol{l}.$$

Пользуясь принятыми определениями понятий «напряжение» и «электродвижущая сила», для замкнутого контура имеем

$$\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = \oint \boldsymbol{E}_{\text{инд}} d\boldsymbol{l}, \qquad (*)$$

т. е. *напряжение вдоль замкнутого контура равно ЭДС, индуцируемой в этом контуре.* Это получается всегда, так как $\oint \boldsymbol{E}_{\text{стац}} d\boldsymbol{l} = 0$. Для отдельных же участков контура напряжение и ЭДС на участке не равны друг другу, например

$$u_{AmB} = \int_{AmB} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = \int_{AmB} \boldsymbol{E}_{\text{стац}} d\boldsymbol{l} + \int_{AmB} \boldsymbol{E}_{\text{инд}} d\boldsymbol{l} \neq \int_{AmB} \boldsymbol{E}_{\text{инд}} d\boldsymbol{l},$$

так как

$$\int_{AmB} \boldsymbol{E}_{\text{стац}} d\boldsymbol{l} \neq 0.$$

Если рассматривать некоторый замкнутый контур электрической цепи, то в нем, помимо ЭДС $e_{\text{инд}}$, индуцируемых изменяющимся во времени магнитным потоком, могут действовать также сторонние ЭДС $e_{\text{стор}}$, например электрохимического или контактного происхождения. При этом вместо уравнения (*) будем иметь

$$\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = \oint \boldsymbol{E}_{\text{инд}} d\boldsymbol{l} + \oint \boldsymbol{E}_{\text{стор}} d\boldsymbol{l}.$$

1.13. Связь магнитного поля с электрическим током

Магнитное поле во всех без исключения случаях связано с электрическим током. Электрический ток и его магнитное поле всегда существуют одновременно и, по сути дела, являются лишь разными характеристиками единого физического процесса. В настоящем параграфе поставим перед собой задачу установить связь между ними.

Рассмотрим проводящий контур произвольной формы, по которому протекает электрический ток i (рис. 1.36). Вокруг него существует магнитное поле. Предположим, что контур находится в пустоте.

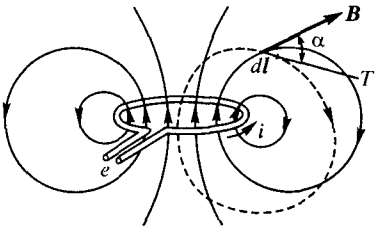


Рис. 1.36

Составим линейный интеграл магнитной индукции вдоль некоторого замкнутого контура, охватывающего контур с током и изображенного на рисунке штриховой линией. Назовем этот контур контуром интегрирования. Опыт показывает, что независимо от формы контура интегрирования интеграл магнитной индукции вдоль него пропорционален току, охватываемому этим контуром, т. е. имеет место равенство

$$\oint B\cos\alpha\, dl = \oint \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{l} = \mu_0 i.$$

Величину μ_0 назовем магнитной постоянной. Она имеет физическую размерность, связанную с размерностью электрической постоянной ε_0. Действительно, левая часть равенства имеет следующую размерность:

$$[Bl] = \left[\frac{\Phi}{l}\right] = \left[\frac{ut}{l}\right] = [Et] = \left[\frac{qt}{\varepsilon_0 l^2}\right].$$

Учитывая размерность электрического тока $[i] = [q/t]$, получаем размерность магнитной постоянной:

$$[\mu_0] = \left[\frac{t^2}{\varepsilon_0 l^2}\right] = \left[\frac{1}{\varepsilon_0 v^2}\right].$$

Следовательно, размерность μ_0 равна размерности величины, обратной произведению электрической постоянной ε_0 на квадрат скорости. Числовое значение величины μ_0 зависит от выбора системы единиц. Единицей магнитной постоянной в системе СИ является *генри на метр* (Гн/м). Действительно, из приведенной связи между интегралом магнитной индукции по замкнутому контуру и током i видно, что единицей μ_0 является $\text{Тл}\frac{\text{м}}{\text{А}} = \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2}\frac{\text{м}}{\text{А}} = \frac{\text{Вб}}{\text{А}\cdot\text{м}}$. Но Вб/А есть единица индуктивности — генри. В этой системе единиц магнитная постоянная имеет значение

$$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7} \approx 1{,}257\cdot 10^{-6}\ \text{Гн/м}.$$

Справедливость равенства

$$\oint \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{l} = \mu_0 i$$

может быть проверена следующим опытом.

Возьмем тонкую гибкую ленту из изолирующего материала. Обовьем эту ленту равномерно по всей ее длине тонкой проволокой (рис. 1.37). Пусть w_1 — число витков обмотки на единицу длины ленты, s — сечение ленты, нормальное к ее оси, и dl — элемент длины ленты. Магнитный поток сквозь сечение ленты

$\Phi = \int_s \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{s}$. Ввиду малости сечения ленты можно считать в пределах каждого сечения в отдельности поле однородным, т. е. при вычислении потока считать индукцию постоянной. Следовательно, $\Phi = B\cos\beta s$, где β — угол между нормалью к сечению s и направлением вектора $\boldsymbol{B}$. Но нормаль к сечению совпадает по направлению с dl. Следовательно, угол β равен углу α между направлением вектора $\boldsymbol{B}$ и касательной T к оси ленты. Итак, поток, пронизывающий один виток обмотки,

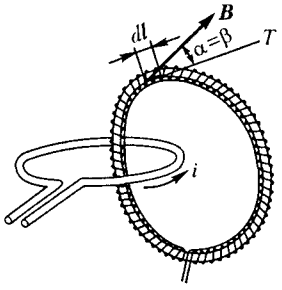


Рис. 1.37

$$\Phi = B\cos\alpha\, s.$$

Потокосцепление с витками на отрезке dl ленты

$$d\Psi = \Phi w_1 dl = B\cos\alpha\, s w_1 dl.$$

Потокосцепление со всеми витками обмотки ленты на всей ее длине

$$\Psi = s w_1 \oint B\cos\alpha\, dl.$$

Таким образом, измеряя потокосцепление Ψ и зная величины s и w_1, получаем возможность измерить интеграл $\oint B\cos\alpha\, dl$ вдоль оси ленты. Описанную ленту для краткости будем называть магнитным поясом. Потокосцепление Ψ при постоянном токе i можно измерить с помощью баллистического гальванометра, выключая ток или размыкая ленту и быстро удаляя ее за пределы поля. При переменном токе амплитуду потока можно определить, измеряя амплитуду ЭДС, индуцируемой в обмотке ленты.

Производя опыты с магнитным поясом, убеждаемся, что *интеграл* $\oint \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{l}$ *по замкнутому контуру, охватывающему контур с током i, не зависит от формы контура интегрирования и пропорционален току i.* Заметим при этом, что если положительное направление обхода контура интегрирования связано с положительным направлением тока i правилом правого винта, то $\oint \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{l}$ и i получаются одного знака. Если контур интегрирования не охватывает тока, то интеграл $\oint \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{l}$ вдоль него равен нулю независимо от формы контура интегрирования.

Соотношение $\oint \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{l} = \mu_0 i$ выражает неразрывную связь магнитного поля и тока. Действительно, если совместить в магнитном поле контур интегрирования с любой линией магнитной индукции, которая всегда замкнута, и выбрать направление обхода вдоль контура интегрирования в направлении вектора $\boldsymbol{B}$, то будем иметь $\oint \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{l} > 0$ и, следовательно, $i > 0$. Таким образом, *каждая линия магнитной индукции обязательно охватывает собой электрический ток. Соответственно, электрический ток всегда окружен магнитным полем.*

Магнитное поле является основным признаком существования электрического тока. О существовании электрического тока можно судить по различным признакам, например по тепловому или по электрохимическому действию тока. Однако эти проявления тока имеют место лишь при надлежащих условиях, маг-

нитное же поле неизменно сопутствует электрическому току. В отдельных случаях можно судить о наличии электрического тока только по его магнитному полю. Таким примером является ток в сверхпроводящем контуре, протекающий без заметного выделения теплоты.

Обобщим соотношение $\oint \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{l} = \mu_0 i$ на более сложные контуры. Пусть имеется несколько контуров с электрическими токами, которые охватываются контуром интегрирования (рис. 1.38). Всегда можно при помощи дополнительных линий разделить этот контур интегрирования на несколько контуров, охватывающих каждый только один ток. Так, изображенный на рис. 1.38 контур *ambncpa*, охватывающий три тока, можно линиями *ad, bd* и *cd* разделить на контуры *ambda*, *bncdb* и *cpadc*, охватывающие каждый по одному току. Имеем

$$\oint_{ambda} \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{l} = \mu_0 i_1; \quad \oint_{bncdb} \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{l} = -\mu_0 i_2; \quad \oint_{cpadc} \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{l} = \mu_0 i_3.$$

Сложим эти равенства. При этом составляющие интегралов вдоль линий *ad, bd* и *cd* попарно скомпенсируются и в левой части останется интеграл вдоль контура *ambncpa*. Получаем

$$\oint_{ambncpa} \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{l} = \mu_0 (i_1 - i_2 + i_3).$$

Правая часть уравнения представляет собой сумму всех токов, проходящих сквозь поверхность, ограниченную контуром интегрирования. На рис. 1.39 эта поверхность заштрихована и обозначена через *s*. Положительными мы должны считать токи, направленные в сторону поступательного движения правого винта, головка которого вращается в направлении выбранного положительного обхода контура интегрирования, так как при этом направление линий магнитной индукции поля тока совпадает с положительным направлением обхода контура интегрирования. В случае, изображенном на рис. 1.39, токи i_1 и i_3 положительны, а ток i_2 отрицателен.

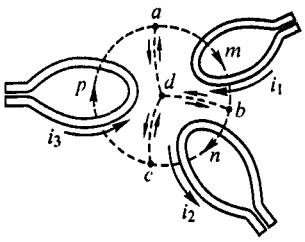


Рис. 1.38

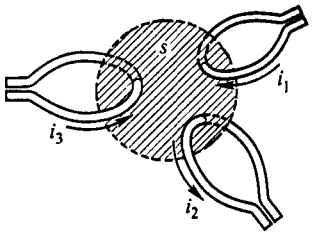


Рис. 1.39

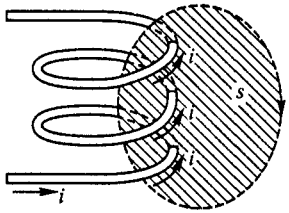


Рис. 1.40

Может оказаться, что условные положительные направления токов в электрических контурах заданы независимо от выбора положительного направления обхода контура интегрирования. В этом случае в правой части перед алгебраическим выражением каждого тока должен быть поставлен знак плюс или минус в зависимости от того, соответствуют или не соответствуют правилу правого винта условные положительные направления тока и обхода контура интегрирования.

Рассмотрим важный частный случай, когда имеется катушка, состоящая из w витков, по которым протекает ток i, и контур интегрирования охватывает все витки катушки (рис. 1.40). Сумма токов, проходящих сквозь поверхность s, ограниченную контуром интегрирования, при этом равна wi. Следовательно,

$$\oint \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{l} = \mu_0 wi.$$

1.14. Намагниченность вещества и напряженность магнитного поля

В предыдущем параграфе был рассмотрен случай, когда магнитное поле контуров с токами существует в пустоте. Опыт показывает, что если те же контуры с теми же токами окружить веществом или хотя бы в части пространства около них расположить тела из того или иного вещества, то магнитное поле в большей или меньшей мере изменяется. Это изменение поля является следствием возникновения в самом веществе под действием внешнего магнитного поля определенной ориентации элементарных внутримолекулярных и внутриатомных электрических токов.

Элементарные токи существуют внутри всякого вещества и при отсутствии внешнего поля. Мы представляем себе эти токи как движение электронов по орбитам внутри атомов вещества и как вращение электронов вокруг своих осей. К понятию «элементарный электрический ток» здесь относим и еще не изученное внутреннее движение в элементарных частицах, которое приводит к появлению магнитных моментов этих частиц, о чем будет сказано в конце этого параграфа. Если элементарные токи внутри вещества ориентированы хаотически, то при макроскопическом рассмотрении явления они не создают магнитного поля. Однако если под действием внешнего поля, в которое вносится вещество, появляется в известной мере согласованная ориентация элементарных токов, то они создают свое дополнительное магнитное поле, которое, налагаясь на внешнее поле, изменяет его.

Существуют вещества, в которых элементарные токи под действием внешнего поля располагаются так, что происходит усиление поля. К ним относятся так называемые парамагнитные и ферромагнитные вещества. Существует другая группа веществ, называемых диамагнитными, в которых под действием внешнего магнитного поля возникают такие дополнительные элементарные токи, которые ослабляют вызвавшее их поле.

Рассмотрим катушку с током i, имеющую w витков, в которую внесено тело из какого-либо вещества (рис. 1.41).

Составим линейный интеграл магнитной индукции вдоль замкнутого контура $AmCnA$, охватывающего все витки катушки. Часть AmC контура интегрирования расположена внутри тела и часть CnA — в пустоте.

Под действием магнитного поля, вызванного током i в катушке, тело намагничивается, т. е. элементарные токи в веществе тела ориентируются в известной мере между собой согласованно и создают свое магнитное поле. Сумма элементарных токов, охватывающих

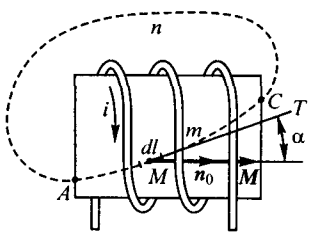


Рис. 1.41

линию AmC, будет отличаться от нуля. Обозначим эту сумму через i'. Будем иметь:

$$\oint \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{l} = \mu_0 w i + \mu_0 i'.$$

Пусть di' — сумма элементарных токов, охватывающих отрезок dl линии AmC. Величина di'/dl представляет собой охватывающий линию AmC элементарный ток, отнесенный к единице длины этой линии в данной ее точке M. Естественно, что величина di'/dl зависит от направления линии AmC, т. е. от направления отрезка dl в рассматриваемой точке M. При некотором определенном направлении, которое обозначим единичным вектором $\boldsymbol{n}_0$, величина di'/dl имеет наибольшее значение. Обозначим отрезок dl в этом направлении через dn и введем векторную величину

$$\boldsymbol{M} = \frac{di'}{dn}\boldsymbol{n}_0,$$

которую назовем намагниченностью вещества.

Намагниченность вещества по значению численно равна сумме элементарных токов, охватывающих единицу длины линии, проведенной через данную точку в таком направлении, чтобы эта сумма была наибольшей. Направление вектора $\boldsymbol{M}$ *и есть такое направление. Оно связано с направлением элементарных токов правилом правого винта.* Для произвольного направления отрезка dl имеем

$$\frac{di'}{dl} = M\cos\alpha,$$

где α — угол между направлением вектора $\boldsymbol{M}$ и положительным направлением касательной T к линии AmC в рассматриваемой точке M. Таким образом, сумма элементарных токов, охватывающих всю линию AmC, имеет значение

$$i' = \int_{AmC} \frac{di'}{dl}\, dl = \int_{AmC} M\cos\alpha\, dl = \int_{AmC} \boldsymbol{M}\, d\boldsymbol{l}.$$

Так как на участке CnA замкнутого контура интегрирования (см. рис. 1.41) нет элементарных токов, то

$$\oint_{AmCnA} \boldsymbol{M}\, d\boldsymbol{l} = \int_{AmC} \boldsymbol{M}\, d\boldsymbol{l} = i'.$$

Итак,

$$\oint \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{l} = \mu_0 w i + \mu_0 i' = \mu_0 w i + \mu_0 \oint \boldsymbol{M}\, d\boldsymbol{l}$$

или

$$\oint \left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} \right) d\boldsymbol{l} = w i.$$

Векторную величину, стоящую в скобках под знаком интеграла, обозначают $\boldsymbol{H}$ и называют напряженностью магнитного поля. Имеем

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}.$$

Для изотропного вещества $\boldsymbol{M} = \varkappa \boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{B} = \mu_0 (1 + \varkappa) \boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H}$, где $\varkappa$ — магнитная восприимчивость, а μ — магнитная проницаемость вещества. В частном случае для пустоты $\boldsymbol{M} = 0$ и $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$.

Вводя обозначение $\boldsymbol{H}$ в выражение под знаком интеграла, получаем

$$\oint \boldsymbol{H} dl = wi.$$

Приведенное определение напряженности магнитного поля для общего случая ценно именно потому, что при этом интеграл напряженности магнитного поля вдоль любого *замкнутого* контура определяется *только макроскопическими токами,* протекающими в проводниках, охватываемых контуром интегрирования. Наличие элементарных токов в веществе *не влияет* на значение интеграла напряженности магнитного поля вдоль *замкнутого* контура.

Определив напряженность во всех точках магнитного поля, можно провести ряд линий, обладающих тем свойством, что во всех точках этих линий направление касательных к ним совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{H}$. Такие линии называют линиями напряженности магнитного поля. Их изображают на рисунках со стрелками, указывающими направление вектора $\boldsymbol{H}$.

Намагниченности вещества $\boldsymbol{M}$ можно дать еще другое определение, связанное с понятием о магнитном моменте элементарного тока. Магнитным моментом m_0 элементарного тока i_0 называют произведение величины i_0 на площадь поверхности s_0, охватываемой этим током. Магнитный момент есть векторная величина. Направление вектора $\boldsymbol{m}_0$ (рис. 1.42) принимают вдоль перпендикуляра к площадке s_0 и связывают с направлением тока i_0 правилом правого винта. Таким образом,

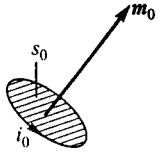


Рис. 1.42

$$\boldsymbol{m}_0 = i_0 \boldsymbol{s}_0,$$

где $\boldsymbol{s}_0$ — вектор, по величине численно равный s_0 и имеющий указанное направление.

Выделим внутри намагниченного вещества цилиндр длиной l с основанием s (рис. 1.43) и предположим, что вещество в объеме цилиндра намагничено в макроскопическом смысле однородно. Пусть $\boldsymbol{m}$ — геометрическая сумма магнитных моментов $\boldsymbol{m}_0$ всех элементарных токов в объеме цилиндра. Векторную величину $\boldsymbol{m}$ называют магнитным моментом данного объема вещества.

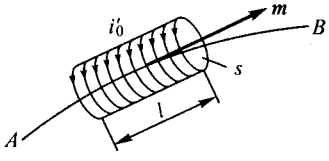


Рис. 1.43

Предположим, что цилиндр выделен так, что вектор $\boldsymbol{m}$ направлен по его оси. Все элементарные токи в объеме цилиндра можно заменить одним эквивалентным током i_0', обтекающим поверхность цилиндра (рис. 1.43), выбрав величину i_0' так, чтобы сохранить значение магнитного момента m, т. е. приняв

$$i_0' s = m.$$

Такой выбор необходимо сделать потому, что магнитное поле элементарных токов полностью определяется их магнитными моментами.

Проведем линию AB, проходящую по оси цилиндра. На длине l цилиндра эту линию охватывает ток i'_0. Следовательно, в соответствии с ранее данным определением намагниченности $\boldsymbol{M}$ вещества имеем $i'_0 = Ml$, т. е. $i'_0 s = m = Mls = MV$ или

$$M = \frac{m}{V} \text{ и } \boldsymbol{M} = \frac{\boldsymbol{m}}{V}.$$

Если вещество намагничено неоднородно, то необходимо перейти к пределу

$$\boldsymbol{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{m}}{\Delta V} = \frac{d\boldsymbol{m}}{dV},$$

где $\Delta \boldsymbol{m}$ — магнитный момент объема ΔV вещества.

Таким образом, *намагниченность вещества в данной точке равна пределу отношения магнитного момента некоторого объема вещества, содержащего данную точку, к этому объему, когда последний стремится к нулю.*

Выше было отмечено, что к понятию «элементарный ток» мы отнесли и еще не изученное внутреннее движение в элементарных частицах, которое приводит к появлению их магнитных моментов. Магнитный момент электрона имеет определенное значение, т. е. имеет квантовый характер. Электрон обладает также определенным моментом количества движения. Магнитный момент и момент количества движения электрона можно рассматривать как проявление вращения (спина) электрона вокруг его оси. Действительно, круговое движение элементов заряда электрона около его оси представляет собой замкнутый круговой элементарный ток, который, как всякий электрический ток, окружен связанным с ним магнитным полем. Однако такое простое представление не дает возможности согласовать между собой значения магнитного момента и момента количества движения электрона с возможными значениями радиуса и угловой скорости вращения электрона. Магнитным моментом обладают также и элементарные частицы, не имеющие электрического заряда, например нейтрон.

Таким образом, приходится признать, что магнитные моменты элементарных частиц являются результатом более сложных внутренних процессов в этих частицах, определяющих природу и основные свойства частиц. Однако здесь совершенно естественно продолжить те логические рассуждения, которые привели в свое время к отказу от представления о реальном существовании магнитных масс, подобных электрическим зарядам. То обстоятельство, что магнитное поле было обнаружено около проводников с макроскопическими электрическими токами, а не только около намагниченных тел, дало основание предположить, что и для намагниченных тел магнитное поле обусловливается также электрическими токами, существующими внутри вещества тела в форме элементарных (молекулярных) замкнутых токов.

В то время, когда Ампером впервые было высказано это предположение, еще не было развито представление об электромагнитном строении атомов и молекул вещества. Продолжая это рассуждение, в настоящее время можно предположить, что и магнитный момент элементарных частиц также является результатом некоторого сложного внутреннего движения в этих частицах, имеющего характер замкнутых электрических токов, но это движение значительно более сложно, чем простое вращение электрона как целого вокруг своей оси. Суще-

ственно отметить, что и в квантовой теории формальное рассмотрение магнитного поля, обусловленного магнитными моментами электронов, приводит к некоторому общему выражению для плотности электрических токов.

Таким образом, имеются все основания понятием «элементарные токи в веществе» охватывать все явления, приводящие к намагниченности вещества, и в этом широком смысле сохранять утверждение, что во всех без исключения случаях магнитное поле связано с электрическими токами.

1.15. Закон полного тока

В соответствии с определением напряженности магнитного поля, данным в предыдущем параграфе, линейный интеграл напряженности магнитного поля вдоль замкнутого контура равен электрическому току, охватываемому этим контуром, т. е. току сквозь поверхность s, ограниченную этим контуром:

$$\oint \boldsymbol{H} dl = i.$$

В общем случае, когда ток i распределен по поверхности s с плотностью δ, различной в разных точках поверхности, имеем соотношение

$$\oint \boldsymbol{H} dl = \int_s \delta \, ds = i.$$

Например, если контур интегрирования охватывает часть сечения проводника с током (рис. 1.44), то в правой части уравнения должна быть учтена только та часть тока в проводнике, которая охватывается контуром интегрирования.

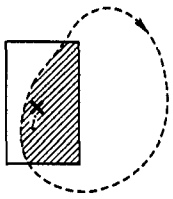


Рис. 1.44

Согласно Максвеллу, в правой части уравнения $\oint \boldsymbol{H} dl = i$ под величиной i следует подразумевать не только токи проводимости, но и токи переноса, а также и токи смещения сквозь поверхность, ограниченную контуром интегрирования. Сумма токов проводимости, переноса и смещения может быть названа полным током сквозь рассматриваемую поверхность. Соответственно, соотношение $\oint \boldsymbol{H} dl = i$ именуют законом полного тока.

Линейный интеграл напряженности магнитного поля вдоль некоторого контура называют магнитодвижущей силой (МДС) вдоль этого контура. Магнитодвижущую силу принято обозначать буквой F.

Используя термин «магнитодвижущая сила», закон полного тока можно выразить следующим образом: *магнитодвижущая сила вдоль замкнутого контура равна полному току, охватываемому этим контуром.*

Уравнение $\oint \boldsymbol{H} dl = i$ при отмеченной широкой трактовке его правой части становится одним из основных уравнений электромагнитного поля.

Действительно, предположим, что токи проводимости и переноса отсутствуют и имеются только токи смещения. Но токи смещения в диэлектрике возникают только при изменении во времени электрического поля. Следовательно, уравнение

$$\oint \boldsymbol{H} dl = i$$

свидетельствует, что *при всяком изменении во времени электрического поля возникает в том же пространстве поле магнитное, тесным образом связанное с электрическим полем и с его изменениями и, по сути, представляющее с ним единое электромагнитное поле.*

Заметим, что понятие «магнитодвижущая сила» может быть применено и к отрезку линии от точки A до точки B. При этом

$$F_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{H} d\boldsymbol{l}.$$

Пользуясь понятием «магнитодвижущая сила», можно придать следующий смысл величине, которую называем напряженностью магнитного поля. Напряженность поля оказывается численно равной магнитодвижущей силе, приходящейся на единицу длины в направлении линии напряженности поля:

$$H = dF/dl.$$

Отсюда видно, что единицей напряженности магнитного поля является *ампер на метр* (А/м).

Из изложенного в предыдущем параграфе следует, что единицей намагниченности вещества также является *ампер на метр* (А/м).

1.16. Основные уравнения электромагнитного поля

Весьма важно при построении любого раздела физики положить в его основу минимальное необходимое число соотношений, принимаемых как опытные факты, рассматриваемых с соответствующими их обобщениями в качестве аксиом. Остальные соотношения должны выводиться из них как следствия, т. е. являться теоремами.

Выше в основу положены, как вытекающие из опыта и соответствующих его обобщений, максвеллов постулат, принцип непрерывности магнитного потока, закон электромагнитной индукции и закон полного тока.

На основании опытного закона Кулона и вытекающей из него для однородной и изотропной среды и электростатического поля теоремы Гаусса, обобщенной затем для любой среды и для любого изменяющегося во времени электрического поля, получили постулат Максвелла:

$$\oint_s \boldsymbol{D} d\boldsymbol{s} = q,$$

связывающий электрическое поле с электрическими зарядами частиц или тел.

Опытный факт непрерывности линий магнитной индукции, непосредственно проверяемый всюду, где это достижимо в магнитном поле, окружающем электрические токи, обобщенный на основе современных физических представлений об элементарных токах в веществе и о магнитных моментах элементарных частиц вещества для магнитного поля внутри любого твердого тела, где непосредственный эксперимент невозможен, сформулирован нами в качестве фундаментального принципа непрерывности магнитного потока:

$$\oint_s \boldsymbol{B} d\boldsymbol{s} = 0.$$

Этот принцип гласит, что магнитных масс как источников линий магнитного поля, аналогичных электрическим зарядам частиц или тел, являющихся источниками линий электрического поля, в природе не существует.

Установленный опытным путем для проводниковой замкнутой электрической цепи закон электромагнитной индукции, обобщенный для любого мысленно взятого контура в изменяющемся магнитном поле в любой среде,

$$\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

дает одно из важнейших уравнений электромагнитного поля, связывающее изменяющееся магнитное поле с возникающим при этом полем электрическим. Линии такого электрического поля являются непрерывными, т. е. замкнутыми.

Также установленный опытным путем для токов проводимости и переноса закон полного тока, обобщенный на все виды электрического тока, включая и токи электрического смещения,

$$\oint \boldsymbol{H} d\boldsymbol{l} = i$$

дает другое важнейшее уравнение электромагнитного поля, связывающее движение электрически заряженных частиц и тел и изменяющееся электрическое поле с возникающим при этом магнитным полем.

Приняв эти соотношения за основные, получаем остальные соотношения как их следствие.

В общем случае эти уравнения необходимо дополнить связями между векторами $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$ и между векторами $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{H}$. Для изотропной среды эти связи имеют вид $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$. Кроме того, необходимо иметь в виду, что в общем случае ток i может быть током проводимости в проводнике, током переноса или током электрического смещения, плотности которых имеют, соответственно, выражения:

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{J} + \frac{d\boldsymbol{D}}{dt}, \quad \text{где} \quad \boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_{\text{пр}} + \boldsymbol{J}_{\text{пер}}, \quad \boldsymbol{J}_{\text{пр}} = \gamma \boldsymbol{E}; \; \boldsymbol{J}_{\text{пер}} = \rho_{+}\boldsymbol{v}_{+} + \rho_{-}\boldsymbol{v}_{-}; \; \frac{d\boldsymbol{D}}{dt} = \boldsymbol{J}_{\text{см}}.$$

В первых же параграфах последней части, посвященной теории электромагнитного поля, увидим, что для полного определения поля любого вектора необходимо знать значения интегралов этого вектора по всем возможным замкнутым контурам, а также истоки линий вектора, т. е. значения интегралов этого вектора по всем возможным замкнутым поверхностям. Это и осуществляется в избранных выше основных соотношениях. Таким образом, их выбор не является случайным. Он тесно связан с сущностью исследуемых явлений. Выразив эти соотношения в последней части курса в дифференциальной форме, получим возможность рассчитывать электромагнитное поле для различных конкретных задач с учетом граничных и начальных условий. Для расчета энергии, переносимой электромагнитным полем, необходимо дополнительно знать распределение энергии в поле, что будет рассмотрено в следующей главе.

Глава вторая

Энергия и механические проявления электрического и магнитного полей

2.1. Энергия системы заряженных тел. Распределение энергии в электрическом поле

Система заряженных тел является носителем определенного запаса энергии. Эта энергия сообщается системе внешними источниками в процессе образования зарядов и может быть вновь возвращена источникам или преобразована в другие виды энергии при уменьшении зарядов.

Для получения выражения для энергии, запасенной в системе заряженных проводящих тел, рассмотрим работу, совершаемую внешними источниками при образовании зарядов системы. Элементарная работа, производимая внешними силами при увеличении заряда q_k некоторого тела на величину dq_k, равна $dA_k = U_k dq_k$, где U_k — потенциал тела. Полная работа при изменении зарядов всех n тел системы от нуля до конечного значения имеет выражение

$$A = \sum_{k=1}^{k=n} A_k = \sum_{k=1}^{k=n} \int_0^{q_k} U_k \, dq_k .$$

Будем предполагать, что система заряжается весьма медленно, теоретически — бесконечно медленно. При этом электрические токи, возникающие при переносе зарядов на поверхность заряжаемых тел, бесконечно малы, а следовательно, бесконечно малы и потери в проводниках конечного сопротивления. Допустим также, что в самом диэлектрике при изменении напряженности поля не совершается необратимых процессов. В таком случае на основании закона сохранения энергии можем утверждать, что вся работа, совершаемая источниками при образовании зарядов, идет на создание запаса электрической энергии $W_э$ в системе: $A = W_э$. Потенциал U_k k-го тела зависит от зарядов $q_1, q_2, \ldots, q_n$ всех тел. При постоянной диэлектрической проницаемости среды эта зависимость имеет линейный характер и, согласно принципу наложения, должна быть выражена в виде

$$U_k = \alpha_{k1} q_1 + \alpha_{k1} q_2 + \ldots + \alpha_{kk} q_k + \ldots + \alpha_{kn} q_n .$$

Коэффициенты α называют потенциальными коэффициентами. Это выражение следует подставить под знак интеграла в выражении для работы A.

На основании закона сохранения энергии можем утверждать, что работа, совершаемая внешними источниками при увеличении зарядов тел от нуля до их конечных значений, не зависит от порядка установления зарядов. Иначе мы всегда могли бы выбрать такой порядок установления зарядов и отличный от него такой порядок уменьшения зарядов, чтобы энергия, затраченная внешними источниками, была меньше энергии, им возвращенной, что явилось бы нарушением закона сохранения энергии. Поэтому мы вправе выбрать порядок установления зарядов по своему усмотрению. Предположим, что все заряды возрастают пропорционально друг другу, т. е. $q_s = \gamma_{ks} q_k$, где $\gamma_{ks} = \text{const}$. Тогда потенциал каждого тела будет возрастать пропорционально его заряду:

$$U_k = (\alpha_{k1}\gamma_{k1} + \alpha_{k2}\gamma_{k2} + \ldots + \alpha_{kn}\gamma_{kn})q_k = m_k q_k,$$

причем m_k = const. Искомая работа

$$A = \sum_{k=1}^{k=n} \int_0^{q_k} U_k dq_k = \sum_{k=1}^{k=n} m_k \int_0^{q_k} q_k dq_k = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_k q_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{U_k q_k}{2}.$$

Используя равенство $A = W_э$, получаем

$$W_э = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n} U_k q_k.$$

Следовательно, *энергия системы заряженных тел равна полусумме произведений потенциалов тел на их заряды.*

Единицей энергии является *джоуль* (Дж).

В весьма важном частном случае для заряженного конденсатора имеем два заряженных тела с зарядами q_1 и q_2, равными по значению и противоположными по знаку. Приняв $q = q_1 = -q_2$, получаем выражение для энергии заряженного конденсатора:

$$W_э = \frac{U_1 q_1}{2} + \frac{U_2 q_2}{2} = \frac{(U_1 - U_2)q}{2}.$$

Обозначая разность потенциалов U_1 и U_2 обкладок через u и пользуясь соотношением $q = Cu$, где C — емкость конденсатора, получаем

$$W_э = \frac{uq}{2} = \frac{Cu^2}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Покажем, что энергию электрически заряженных тел следует рассматривать как распределенную в электрическом поле, окружающем заряженные тела, что соответствует взгляду на электромагнитное поле как на особый вид материи. Предположив это, мы должны считать, что каждый элемент объема диэлектрика является носителем определенного запаса энергии, и следует говорить об объемной плотности энергии в каждой точке поля. Обозначая объемную плотность энергии электрического поля через $W_э'$, можем выразить энергию системы заряженных тел как энергию всего окружающего их электрического поля в виде интеграла:

$$W_э = \int_V W_э' dV,$$

распространенного по всему электрическому полю.

Рассмотрим сначала простейший случай — однородное поле. Таким является поле в средней части между параллельными пластинами (рис. 2.1). Выделим из обеих пластин противоположные друг другу части с поверхностями s. Пусть заряды, расположенные на этих частях пластин, равны: $q_1 = -q_2 = q$. Соответствующая им энергия имеет выражение $W_э = uq/2$, причем u — разность потенциалов пластин. Так как поле однородно, то $u = Ed$, где d — расстояние между пластинами. Поток электрического смещения сквозь любую поверхность s, проведенную в диэлек-

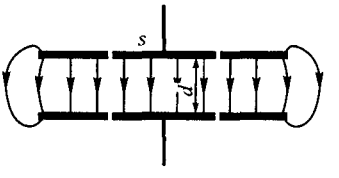


Рис. 2.1

трике между пластинами параллельно поверхностям пластин и рассекающую все трубки смещения, начинающиеся на заряде $q_1 = q$, равен этому заряду (см. § 1.5). Ввиду однородности поля имеем $Ds = q$. Следовательно,

$$W_э = \frac{1}{2} DEsd = \frac{1}{2} DEV,$$

где $V = sd$ — объем диэлектрика, в котором сосредоточено поле зарядов q_1 и q_2. Энергия, отнесенная к единице объема поля, получается равной

$$W'_э = \frac{W_э}{V} = \frac{1}{2} DE = \frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon}.$$

Энергия всего поля, таким образом, может быть представлена в виде интеграла:

$$W_э = \int_V \frac{\varepsilon E^2}{2} dV.$$

Полученное выражение для объемной плотности энергии электрического поля справедливо лишь для изотропной среды, в которой векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{D}$ совпадают по направлению. Покажем, что для анизотропной среды объемная плотность энергии равна

$$W'_э = \frac{\boldsymbol{ED}}{2},$$

где $\boldsymbol{ED} = ED \cos\alpha$ есть скалярное произведение векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{D}$, составляющих друг с другом угол α. Соответственно, энергия всего поля может быть представлена выражением

$$W_э = \int_V \frac{\boldsymbol{ED}}{2} dV.$$

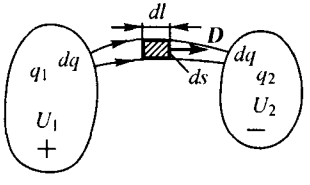


Рис. 2.2

Убедимся в справедливости этого выражения для общего случая — для неоднородного поля в анизотропной среде. С этой целью рассмотрим два проводящих тела, имеющих равные заряды противоположных знаков: $q_1 = -q_2 = q$ (рис. 2.2). Выделим в электрическом поле бесконечно тонкую трубку смещения. В объеме бесконечно малого отрезка dl трубки поле можно считать однородным. Энергия поля в объеме этого отрезка трубки

$$W'_э\, ds\, dl = \frac{1}{2} DE \cos\alpha\, ds\, dl,$$

где ds — нормальное сечение трубки. Интегрируя вдоль всей трубки и вспоминая, что поток смещения Dds одинаков во всех поперечных сечениях трубки и равен заряду dq на конце трубки (см. § 1.5), получаем

$$dW_э = \int_l \frac{1}{2} D\, dsE \cos\alpha\, dl = \frac{1}{2} D\, ds \int_l E \cos\alpha\, dl = \frac{1}{2}(U_1 - U_2)dq,$$

так как интеграл $\int_l E \cos\alpha\, dl$ равен разности потенциалов на концах трубки.

Для трубки конечного сечения, если заряды на ее концах расположены на поверхностях равного потенциала, например на поверхности двух заряженных проводящих тел, будем иметь

$$\Delta W_э = \frac{1}{2}(U_1 - U_2)\Delta q,$$

где Δq — заряд на конце трубки.

Суммируя энергию по всем трубкам смещения и замечая, что для всех трубок величина $U_1 - U_2$ имеет одинаковое значение, получаем

$$W_э = \frac{1}{2}(U_1 - U_2)q = \frac{1}{2}U_1 q_1 + \frac{1}{2}U_2 q_2.$$

Таким образом, выражение энергии в виде интеграла по всему объему поля $W_э = \int_V \frac{\boldsymbol{ED}}{2} dV$ эквивалентно выражению $W_э = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n} q_k U_k$, которое было получено на основании закона сохранения энергии. В том случае, когда поле создается неподвижными зарядами, с формальной точки зрения безразлично, каким из этих выражений пользоваться при вычислении энергии. Однако электрическое поле может возникать при изменяющемся во времени магнитном поле и при полном отсутствии электрических зарядов. Такое поле, например, существует в электромагнитной волне, излученной радиоантенной. В этом случае при вычислении энергии остается единственная возможность рассматривать ее как энергию поля и, следовательно, пользоваться выражением

$$W_э = \int_V \frac{\boldsymbol{ED}}{2} dV.$$

Точно так же энергия электрического поля движущегося электрического заряда может быть определена именно из этого выражения. Пользуясь им, во всех случаях получаем величины, согласующиеся с опытом. Поэтому необходимо признать, что представление о распределении энергии в электрическом поле с объемной плотностью $1/2\,\boldsymbol{ED}$ отвечает сущности рассматриваемого физического явления.

2.2. Энергия системы контуров с электрическими токами. Распределение энергии в магнитном поле

В электрических цепях при установлении в них токов возникают ЭДС индукции. Внешние источники энергии, к которым подключены электрические цепи, при этом совершают работу, так как ЭДС источников должны преодолевать ЭДС индукции, возникающие в контурах цепей. Часть энергии, отдаваемой источниками, запасается в электрических цепях и может быть вновь полностью или частично возвращена при уменьшении токов в контурах цепей.

Напряжение u_k, создаваемое внешним источником энергии на зажимах k-й цепи, должно иметь составляющую, равную падению напряжения в сопротивлении цепи, и составляющую, уравновешивающую ЭДС, индуцируемую в этой цепи:

$$u_k = i_k r_k + \frac{d\Psi_k}{dt}.$$

Предположим, что внутреннее сопротивление источника энергии равно нулю или же что оно учтено в сопротивлении цепи. В таком случае ЭДС e_k источника, подключенного к зажимам цепи, равна напряжению u_k, и работа источника энергии, совершаемая за время dt,

$$u_k i_k dt = i_k^2 r_k dt + i_k d\Psi_k.$$

Первое слагаемое представляет собой энергию, теряемую в проводниках цепи в связи с необратимым процессом выделения теплоты.

Второе слагаемое представляет собой часть работы источника, связанную с изменением потокосцепления Ψ_k. Эта часть работы нас непосредственно и будет интересовать. Обозначим ее

$$i_k d\Psi_k = dA_k.$$

Пусть в рассматриваемой системе цепей имеется n отдельных контуров. Полная работа всех источников энергии, затрачиваемая ими в связи с изменением потокосцеплений во всех n контурах системы от нуля до конечного значения, имеет выражение

$$A = \sum_{k=1}^{k=n} A_k = \sum_{k=1}^{k=n} \int_0^{\Psi_k} i_k d\Psi_k.$$

Предположим, что магнитная проницаемость среды не зависит от напряженности поля и что токи устанавливаются весьма медленно. При этом в среде, окружающей проводники электрических цепей, не совершается никаких необратимых процессов. Все контуры будем считать геометрически неизменяемыми и неподвижными. Следовательно, в системе не совершается механической работы по перемещению контуров. При таких условиях можем утверждать на основании закона сохранения энергии, что вся работа A идет на создание запаса магнитной энергии $W_м$ в системе электрических цепей, т. е. $A = W_м$.

При бесконечно медленном установлении токов магнитное поле, окружающее контуры с токами, может рассматриваться в каждый отдельный момент времени как постоянное поле. Поэтому токи в контурах и потоки, с ними сцепляющиеся, связаны между собой собственными и взаимными индуктивностями, определяемыми при постоянных токах. Эти индуктивности зависят только от геометрических координат системы и от значения магнитной проницаемости.

Поскольку принято, что величина μ не зависит от напряженности поля, можно пользоваться принципом наложения и рассматривать потокосцепление Ψ_k с k-м контуром как сумму потокосцепления самоиндукции, определяемого током в этом же контуре, и потокосцеплений взаимной индукции, определяемых токами в остальных контурах:

$$\Psi_k = L_k i_k + \sum_{p=1}^{p=n} M_{kp} i_p \quad (p \neq k).$$

На основании закона сохранения энергии можно утверждать, что работа A не зависит от порядка установления токов. Иначе всегда можно было бы выбрать

такой порядок установления токов и отличный от него такой порядок уменьшения токов вновь до нуля, чтобы энергия, затраченная внешними источниками, была меньше энергии, им возвращенной, что явилось бы нарушением закона сохранения энергии. Поэтому имеем право выбрать порядок установления токов по своему усмотрению. Интегрирование в выражении для работы A проще всего выполнить, если принять, что все токи возрастают пропорционально друг другу, т. е. $i_p = \alpha_{kp} i_k$, где $\alpha_{kp} = \text{const}$. При этом выражение для потокосцепления можно привести к виду

$$\Psi_k = L_k i_k + \sum_{p=1}^{p=n} M_{kp} \alpha_{kp} i_k = \left(L_k + \sum_{p=1}^{p=n} M_{kp} \alpha_{kp} \right) i_k = m_k i_k,$$

где

$$p \neq k \text{ и } m_k = L_k + \sum_{p=1}^{p=n} M_{kp} \alpha_{kp} = \text{const}.$$

Искомая работа получается равной

$$A = \sum_{k=1}^{k=n} \int_0^{\Psi_k} i_k d\Psi_k = \sum_{k=1}^{k=n} m_k \int_0^{i_k} i_k di_k = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_k i_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{i_k \Psi_k}{2}.$$

Используя равенство $A = W_м$, находим

$$W_м = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} i_k \Psi_k.$$

Следовательно, *энергия системы контуров с токами равна полусумме произведений токов в контурах на потокосцепления контуров.*

Подставим в полученное нами выражение для энергии $W_м$ выражения потокосцеплений Ψ_k через токи в контурах и собственные и взаимные индуктивности контуров. Замечая, что $M_{kp} = M_{pk}$, получим

$$W_м = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + \ldots + \frac{1}{2} L_k i_k^2 + \ldots + M_{12} i_1 i_2 + M_{13} i_1 i_3 + \ldots + M_{kp} i_k i_p + \ldots$$

Таким образом, энергия системы контуров с токами есть квадратичная функция токов в контурах.

Равенство $M_{kp} = M_{pk}$ является выражением принципа взаимности для рассматриваемого случая. Справедливость равенства $M_{kp} = M_{pk}$ можно показать, рассматривая два контура. Устанавливая сначала ток i_1, а затем ток i_2, получим выражение для энергии $L_1 i_1^2/2 + L_2 i_2^2/2 + M_{12} i_1 i_2$. Устанавливая ток i_2, а затем ток i_1, получим $L_1 i_1^2/2 + L_2 i_2^2/2 + M_{21} i_1 i_2$. Так как энергия магнитного поля контуров не зависит от порядка установления токов, то $M_{12} = M_{21}$.

Энергию системы токов представляем распределенной в магнитном поле этих токов. Согласно этому, энергию системы токов всегда можно выразить в виде объемного интеграла:

$$W_м = \int_V W'_м dV,$$

распространенного по всему полю, причем $W'_м$ — объемная плотность энергии магнитного поля.

Рассмотрим сначала простейший случай, когда поле можно считать однородным, а именно, рассмотрим тонкий кольцевой соленоид с равномерно распределенной обмоткой, имеющей w витков (рис. 2.3). Пусть s — поперечное сечение сердечника, l — его длина и μ — абсолютная магнитная проницаемость материала сердечника. Величину μ будем предполагать постоянной. При плотной обмотке все поле сосредоточено внутри сердечника и каждая линия магнитной индукции сцепляется со всеми витками обмотки. Следовательно, потокосцепление Ψ с обмоткой связано с потоком сквозь сечение сердечника соотношением $\Psi = w\Phi$.

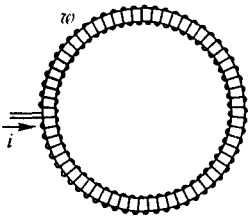


Рис. 2.3

Энергия, запасенная в такой цепи, равна $W_м = \Psi i/2 = \Phi w i/2$. Так как в пределах сечения s можно считать магнитную индукцию постоянной, то можно написать $\Phi = Bs$. Кроме того, на основании закона полного тока имеем $wi = \oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = Hl$, так как $H = \text{const}$ вдоль сердечника. Таким образом, выражение для энергии может быть представлено в виде $W_м = BHsl/2$. Величина $sl = V$ есть объем пространства, занятого магнитным полем. Следовательно, объемная плотность энергии магнитного поля имеет выражение

$$W'_м = \frac{W_м}{V} = \frac{BH}{2} = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu}.$$

Для анизотропной среды объемная плотность энергии поля должна иметь выражение

$$W'_м = \frac{\boldsymbol{BH}}{2},$$

где $\boldsymbol{BH} = BH\cos\alpha$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{H}$, имеющих в общем случае в анизотропной среде различные направления. Угол α есть угол между векторами $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{H}$.

Покажем, что это выражение для объемной плотности энергии поля справедливо в самом общем случае, когда поле неоднородное в анизотропной среде, т. е. что энергия поля может быть представлена в виде интеграла

$$W_м = \int_V \frac{\boldsymbol{BH}}{2}\, dV,$$

распространенного по всему полю.

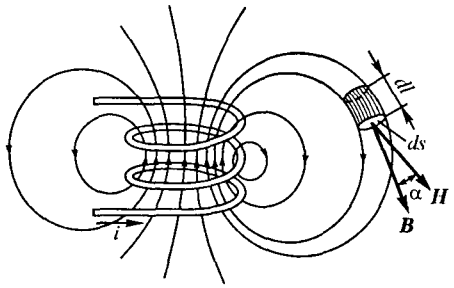


Рис. 2.4

С этой целью рассмотрим поле катушки, изображенной на рис. 2.4. Представим все поле разделенным на элементарные трубки магнитной индукции. Выделим в одной из таких трубок элементарный отрезок длиной dl. Пусть ds есть сечение трубки, нор-

мальное к ее оси. В пределах бесконечно малого объема $dV = dsdl$ отрезка трубки поле можно считать однородным. Пользуясь выражением для объемной плотности энергии, получаем энергию поля в объеме dV:

$$W'_{м}dV = \frac{\boldsymbol{BH}}{2}dV = \frac{BH\cos\alpha\ dl\,ds}{2}.$$

Вычислим теперь энергию $dW_{м}$ в объеме всей элементарной трубки. С этой целью проинтегрируем полученное выражение вдоль оси трубки. Поток $d\Phi = Bds$ сквозь сечение трубки имеет постоянное значение вдоль всей трубки и может быть вынесен за знак интеграла. Получаем

$$dW_{м} = \oint_{l}\frac{BH\cos\alpha}{2}dsdl = \frac{d\Phi}{2}\oint_{l}H\cos\alpha\ dl.$$

На основании закона полного тока имеем

$$\oint H\cos\alpha\ dl = wi,$$

где w — число витков, с которыми сцепляется данная трубка. Замечая, что $wd\Phi = d\Psi$ есть доля потокосцепления, вносимая данной трубкой в значение потокосцепления всей цепи, получаем

$$dW_{м} = \frac{d\Phi}{2}wi = \frac{id\Psi}{2}.$$

Для получения энергии $W_{м}$ всего поля необходимо просуммировать энергии всех элементарных трубок. Выполняя такое суммирование, находим

$$W_{м} = \int\frac{id\Psi}{2} = \frac{i}{2}\int d\Psi = \frac{i\Psi}{2},$$

т. е. приходим к выражению, полученному на основании закона сохранения энергии.

Таким образом, энергия всего магнитного поля в общем случае может быть представлена в виде интеграла:

$$W_{м} = \int_{V}\frac{\boldsymbol{BH}}{2}dV,$$

где интегрирование распространяется по объему всего пространства, в котором существует магнитное поле.

2.3. Силы, действующие на заряженные тела

Механические силы взаимодействия точечных заряженных тел могут быть вычислены при помощи закона Кулона. В случаях, когда заряженные тела нельзя рассматривать как точечные, непосредственное применение закона Кулона невозможно. В общем случае вычисление результирующей силы, действующей на данное заряженное тело, может быть выполнено достаточно просто, если известны емкости тел или емкости между телами как функции геометрических координат.

Ранее было указано, что емкость зависит от диэлектрической проницаемости среды и от геометрических величин, обозначенных через g и определяющих

форму, размеры и взаимное расположение тел. В дальнейшем будем называть величины g обобщенными геометрическими координатами системы. Это могут быть линейные перемещения тел по заданному пути, расстояния между телами, углы поворота тел вокруг некоторой оси, поверхности или объемы тел и т. д. При таком обобщенном понимании координат g точно так же и силы f, стремящиеся изменить координаты, должны рассматриваться как обобщенные силы. Во всех случаях обобщенная сила f должна удовлетворять основному требованию, чтобы произведение силы на производимое ею изменение координаты равнялось работе, совершаемой силой при этом изменении координаты. В зависимости от выбора обобщенной координаты g и обобщенная сила получает тот или иной смысл. Так, если g — линейное перемещение, то f — обычная механическая сила; если g — угол поворота, то f — момент пары сил; если g — поверхность, то f — поверхностное натяжение; если g — объем, то f — давление.

Наименьшее число обобщенных координат, необходимое для определения положения системы, равно, как известно из механики, числу степеней свободы системы. Так, для тела, перемещающегося по некоторой направляющей, достаточно знать путь, пройденный телом вдоль направляющей от начального положения. Для одного тела, закрепленного на оси, достаточно знать только угол поворота тела вокруг этой оси. Если тело закреплено в точке, то его положение может быть определено тремя углами поворота, и т. д. Каждой обобщенной координате соответствует своя обобщенная сила, стремящаяся изменить именно эту координату.

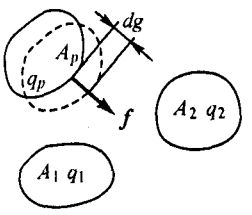


Рис. 2.5

Рассмотрим произвольную систему n заряженных тел (рис. 2.5). Предположим, что все заряженные тела, кроме тела A_p, неподвижно закреплены и только тело A_p может перемещаться так, что изменяется одна его координата g. Это изменение координаты g совершается под действием силы f, являющейся результатом взаимодействия заряженного тела A_p со всеми другими заряженными телами системы.

Будем исходить из предположения, что как возможные изменения зарядов тел, так и перемещение тела A_p происходят весьма медленно, теоретически — бесконечно медленно. При этом электрические токи, возникающие на поверхности тел вследствие перераспределения зарядов, бесконечно малы, и, следовательно, можно считать, что потери энергии в проводниках отсутствуют. Предположим также, что изменение напряженности поля в диэлектрике не сопровождается потерей энергии в нем. При этих условиях работа, затрачиваемая внешними источниками энергии на изменения dq_k зарядов тел, должна покрывать приращение энергии электрического поля и механическую работу, совершаемую силой f, изменяющей положение тела A_p:

$$\sum_{k=1}^{k=n} U_k dq_k = d_g W_э + f\, dg.$$

Индекс g у величины $d_g W_э$ указывает, что рассматривается приращение энергии, соответствующее изменению только одной координаты g системы. Это уравне-

ние справедливо независимо от того, каким образом изменяются заряды и потенциалы тела. Оно является выражением закона сохранения энергии применительно к рассматриваемому нами случаю.

Чтобы получить наиболее простое выражение для силы f, предположим, что заряды всех тел остаются неизменными: $q_k = \text{const}$. Это условие удовлетворяется, если все тела отключены от источников электродвижущей силы. Но тогда $dq_k = 0$ и, соответственно, равна нулю работа внешних источников:

$$\sum_{k=1}^{k=n} U_k dq_k = 0.$$

В этом случае

$$0 = \left(d_g W_э\right)_{q_k=\text{const}} + f\,dg$$

или

$$f dg = -\left(d_g W_э\right)_{q_k=\text{const}}. \qquad (*)$$

Общий индекс $q_k = \text{const}$ у приращения энергии указывает, что заряды сохраняются неизменными.

Если dg есть перемещение, происходящее под действием силы f, то $fdg > 0$. Из последнего равенства следует, что $d_g W_э < 0$, т. е. энергия электрического поля убывает. Действительно, механическая работа при отключенных внешних источниках энергии может совершаться только за счет внутренних запасов энергии в системе, в данном случае за счет энергии электрического поля.

Из равенства (*) получаем

$$f = -\left(\frac{d_g W_э}{dg}\right)_{q_k=\text{const}} = -\left(\frac{\partial W_э}{\partial g}\right)_{q_k=\text{const}},$$

т. е. *механическая сила, стремящаяся изменить данную координату системы, равна уменьшению энергии электрического поля, отнесенному к единице производимого силой изменения координаты, в предположении, что заряды всех тел сохраняются неизменными.*

Единицей силы является *ньютон* (Н).

Рассмотрим еще другой, также весьма важный случай, когда во время движения системы поддерживаются неизменными потенциалы всех тел, т. е. когда $U_k = \text{const}$. Такой режим имеет место, когда все тела подключены к зажимам внешних источников ЭДС, напряжения на зажимах которых остаются неизменными. Так как при изменении геометрической конфигурации системы будут изменяться емкости между телами, то при постоянстве потенциалов тел должны изменяться их заряды. Дополнительные заряды могут сообщаться системе только от внешних источников, которые должны на это затратить некоторую работу. Таким образом, все члены уравнения

$$\sum_{k=1}^{k=n} U_k dq_k = d_g W_э + f dg$$

теперь отличны от нуля. Однако если $U_k = \text{const}$ и диэлектрические проницаемости сред не зависят от напряженности поля, то существует простое соотноше-

ние между работой внешних источников и приращением энергии электрического поля. Действительно, энергия электрического поля системы заряженных тел при этом может быть представлена выражением

$$W_э = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n} U_k q_k,$$

и, следовательно, ее приращение при постоянстве потенциалов

$$\left(d_g W_э\right)_{U_k=\text{const}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n} U_k dq_k,$$

т. е. в точности равно половине работы внешних источников. Остальная половина работы внешних источников идет на совершение механической работы fdg. Таким образом, механическая работа равна приращению энергии электрического поля:

$$fdg = \left(d_g W_э\right)_{U_k=\text{const}}.$$

Если в системе происходит перемещение под действием силы f, то $fdg > 0$. Приращение энергии при $U_k = \text{const}$ также оказывается положительным, и энергия поля возрастает.

Из последнего равенства получаем еще одно выражение для механической силы:

$$f = \left(\frac{\partial W_э}{\partial g}\right)_{U_k=\text{const}},$$

т. е. *механическая сила, стремящаяся изменить данную координату системы, равна увеличению энергии электрического поля, отнесенному к единице производимого силой изменения координаты, в предположении, что потенциалы всех тел поддерживаются постоянными.*

Оба выражения для силы (и это необходимо подчеркнуть) тождественно равны друг другу, т. е. можно написать

$$f = -\left(\frac{\partial W_э}{\partial g}\right)_{q_k=\text{const}} = +\left(\frac{\partial W_э}{\partial g}\right)_{U_k=\text{const}}.$$

Сила зависит только от положения тел и значений их зарядов в данный момент и не может зависеть от того, как будет развиваться энергетический процесс в том случае, если система придет в движение под действием силы.

Продемонстрируем тождественность обоих выражений для силы f на примере силы притяжения обкладок конденсатора. Энергия заряженного конденсатора

$$W_э = \frac{Cu^2}{2} = \frac{q^2}{2C},$$

где $u = U_1 - U_2$ — разность потенциалов обкладок конденсатора. От координат явно зависит емкость C конденсатора. Определяя силу по формуле при $q_k = \text{const}$, воспользуемся выражением энергии через заряд конденсатора. Получаем

$$f = -\frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{q^2}{2C}\right)_{q=\text{const}} = -\frac{q^2}{2}\frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{q^2}{2C^2}\frac{\partial C}{\partial g} = \frac{u^2}{2}\frac{\partial C}{\partial g}.$$

При определении силы по формуле при $U_k = \text{const}$ воспользуемся выражением энергии через разность потенциалов. Находим

$$f = +\frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{Cu^2}{2}\right)_{u=\text{const}} = \frac{u^2}{2}\frac{\partial C}{\partial g}.$$

Итак, действительно, оба выражения для силы совершенно одинаковы. Только при взятии производной следует считать постоянными в одном случае заряды, а в другом — потенциалы.

Так как при движении обкладок конденсатора под действием силы f имеем $fdg > 0$, то из последнего выражения следует, что при таком движении $dC > 0$, т. е. емкость возрастает. Следовательно, механические силы, действующие на обкладки конденсатора, стремятся увеличить емкость конденсатора.

Ценность полученных выражений — в их общности: для вычисления силы нам достаточно только знать, как зависят от координат электрические емкости C, входящие в выражение для энергии электрического поля.

В качестве примера рассмотрим силы взаимного притяжения обкладок заряженного плоского конденсатора. Будем определять силу, действующую на вырезанную центральную часть обкладки, окруженную охранным кольцом, достаточно широким, чтобы поле под центральной частью обкладки можно было считать однородным (см. рис. 2.1). Емкость этой центральной части конденсатора равна $C = \varepsilon s/d$ (см. § 3.5), причем s — внутренняя поверхность вырезанной части обкладки и d — расстояние между обкладками. Сила, стремящаяся изменить расстояние,

$$f = \frac{u^2}{2}\frac{\partial C}{\partial d} = -\frac{u^2}{2}\frac{\varepsilon s}{d^2}.$$

Ввиду однородности поля в рассматриваемой системе имеем $\frac{u^2}{d^2} = E^2$ и, стало быть, $f = -\frac{\varepsilon E^2}{2}s = -\frac{ED}{2}s$. Знак «минус» указывает, что сила действует в сторону уменьшения расстояния d, т. е. стремится сблизить обкладки. Абсолютное значение силы, приходящейся на единицу поверхности обкладки,

$$f' = \frac{|f|}{s} = \frac{ED}{2}$$

численно равно энергии электрического поля в единице объема диэлектрика.

2.4. Электромагнитная сила

Проводники с электрическими токами, расположенные в магнитном поле, испытывают механические силы. Эти механические силы называют электромагнитными силами или электродинамическими силами. Электромагнитные силы возникают не только в контуре с током, расположенном

во внешнем поле, но и в том случае, когда этот контур уединен и поле, его окружающее, определяется током в самом контуре.

К электромагнитным силам относим также механические силы, действующие на тела из ферромагнитного материала, расположенные в магнитном поле, так как, по существу, и в этом случае имеем дело с механическими силами, которые испытывают в магнитном поле электрические токи. В данном случае это элементарные токи, существующие в теле из ферромагнитного материала.

Рассмотрим систему, состоящую из n контуров с токами. Положение контуров определяется необходимым числом обобщенных геометрических координат g. Обобщенной геометрической координатой, как было разъяснено в § 2.3, может быть любая геометрическая величина, определяющая положение системы в пространстве. Механические силы, стремящиеся изменить координаты системы, при этом также должны рассматриваться как обобщенные силы.

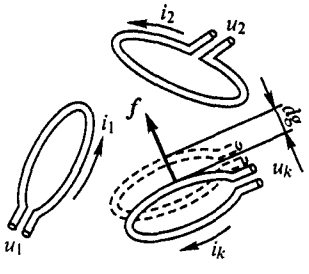


Рис. 2.6

Пусть под действием силы f некоторая координата g системы получает приращение dg в направлении действия силы. Предположим, что все остальные координаты системы остаются неизменными. Например, один из контуров системы (рис. 2.6) перемещается в некотором направлении, все же остальные контуры остаются неподвижными. Сила f при этом совершает работу fdg. В результате изменения координаты g в общем случае произойдет изменение энергии магнитного поля контуров с токами на величину $d_g W_м$. Индексом g отмечаем, что изменяется только одна геометрическая координата.

Предположим, что в среде, окружающей проводники, отсутствуют необратимые процессы. В таком случае работа внешних источников энергии, действующих на зажимах контуров системы, будет расходоваться на выделение теплоты в контурах, на изменение запаса энергии в магнитном поле и на механическую работу fdg, совершаемую электромагнитной силой:

$$\sum_{k=1}^{k=n} u_k i_k dt = \sum_{k=1}^{k=n} i_k^2 r_k dt + d_g W_м + fdg.$$

Для напряжения u_k, создаваемого внешним источником энергии на зажимах k-го контура, имеем

$$u_k = i_k r_k + \frac{d\Psi_k}{dt},$$

где Ψ_k — потокосцепление с этим контуром. Следовательно, сумма работ всех источников энергии может быть представлена также в виде

$$\sum_{k=1}^{k=n} u_k i_k dt = \sum_{k=1}^{k=n} i_k^2 r_k dt + \sum_{k=1}^{k=n} i_k d\Psi_k.$$

Сравнивая между собой оба выражения для суммы работ источников энергии, имеем

$$\sum_{k=1}^{k=n} i_k d\Psi_k = d_g W_м + f dg,$$

т. е. часть работы источников, связанная с изменением потоков в контурах, затрачивается на изменение энергии магнитного поля и на механическую работу.

Последнее уравнение справедливо независимо от того, каким образом изменяются во времени токи в контурах и потокосцепления контуров. Оно является выражением закона сохранения энергии применительно к рассматриваемому случаю.

Наиболее простые выражения для силы f получаются, если предположить, что либо потокосцепления со всеми контурами, либо токи во всех контурах остаются неизменными.

Пусть при движении контура потокосцепления поддерживаются неизменными, т. е. $\Psi_k = \text{const}$. Так как при изменении координаты изменяются зависящие от нее индуктивности, то, очевидно, для поддержания постоянства потокосцеплений необходимо соответствующим образом изменять токи в контурах. Этот частный режим интересен тем, что источники энергии совершают работу только на выделение теплоты в контурах, так как $d\Psi_k = 0$ и $\sum_{k=1}^{k=n} i_k d\Psi_k = 0$. В частности, если бы сопротивления r_k всех контуров были равны нулю, то источники энергии были бы совершенно не нужны, так как в сверхпроводящих контурах потоки сохраняются неизменными согласно принципу электромагнитной инерции. В случае $\Psi_k = \text{const}$ имеем

$$0 = \left(d_g W_м\right)_{\Psi_k = \text{const}} + f dg.$$

Так как мы рассматриваем перемещение dg под действием силы f, то $f dg > 0$ и, следовательно, $d_g W_м < 0$, т. е. энергия магнитного поля убывает. Этого и следовало ожидать, так как положительная работа электромагнитной силы может совершаться в данном случае только за счет энергии магнитного поля. Из последнего уравнения получаем

$$f = -\left(\frac{d_g W_м}{dg}\right)_{\Psi_k = \text{const}} = -\left(\frac{\partial W_м}{\partial g}\right)_{\Psi_k = \text{const}},$$

т. е. *электромагнитная сила, стремящаяся изменить данную координату системы, равна уменьшению энергии магнитного поля, отнесенному к единице производимого силой изменения координаты в предположении, что потокосцепления контуров сохраняются неизменными.*

Предположим теперь, что во всех контурах токи поддерживаются неизменными. При движении под действием электромагнитной силы одного из контуров будут изменяться потокосцепления Ψ_k и часть работы источников, связанная с изменением потокосцеплений контуров, не будет равна нулю, т. е.

$$\sum_{k=1}^{k=n} i_k d\Psi_k \neq 0.$$

Между значением этой работы и приращением энергии $W_м$ магнитного поля в рассматриваемом случае существует простое соотношение. Мы имели выражение для энергии

$$W_м = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n} i_k \Psi_k .$$

При i_k = const получаем

$$\left(d_g W_м\right)_{i_k=\text{const}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n} i_k d\Psi_k .$$

Приходим к замечательному выводу: при постоянстве токов приращение энергии магнитного поля в точности равно половине рассматриваемой части работы, совершаемой источниками энергии. Остальная половина этой части работы источников в соответствии с уравнением

$$\sum_{k=1}^{k=n} i_k d\Psi_k = d_g W_м + f dg$$

идет на совершение механической работы. Поэтому

$$f dg = +\left(d_g W_м\right)_{i_k=\text{const}} .$$

Таким образом, при постоянстве токов получение механической работы связано с неизбежным увеличением запаса энергии в системе, в точности равным совершенной механической работе.

Из последнего равенства получаем еще одно выражение для электромагнитной силы:

$$f = +\left(\frac{\partial W_м}{\partial g}\right)_{i_k=\text{const}},$$

т. е. *электромагнитная сила, стремящаяся изменить данную координату системы, равна увеличению энергии магнитного поля, отнесенному к единице производимого силой изменения координаты, в предположении, что токи в контурах поддерживаются неизменными.*

Необходимо подчеркнуть, что оба полученные нами выражения определяют собой одну и ту же силу, т. е. можно написать

$$f = -\left(\frac{\partial W_м}{\partial g}\right)_{\Psi_k=\text{const}} = +\left(\frac{\partial W_м}{\partial g}\right)_{i_k=\text{const}} .$$

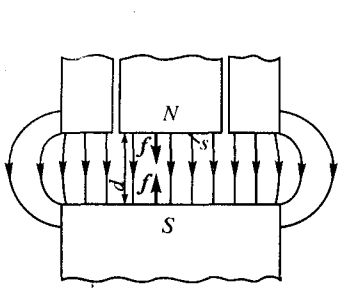


Рис. 2.7

Рассмотрим силу f, действующую на среднюю часть полюса электромагнита, изображенного на рис. 2.7, и стремящуюся изменить расстояние d между полюсами. Из всего полюса вырезаем только его среднюю часть, около которой поле можно считать однородным. Для вычисления силы воспользуемся выражением

$$f = -\left(\frac{\partial W_м}{\partial g}\right)_{\Psi_k = \text{const}}.$$

При бесконечно малом перемещении средней части полюса поле остается однородным. Так как Ψ = const, то неизменной остается и магнитная индукция B, а также объемная плотность энергии поля $W'_м = B^2/(2\mu)$. Поэтому изменение энергии поля происходит только вследствие изменения объема пространства между вырезанной частью северного полюса и южным полюсом. Энергия, заключенная в этом объеме, равна $W_м = W'_м sd$, где s — поверхность вырезанной части полюса. Таким образом, имеем

$$f = -\frac{\partial W_м}{\partial d} = -W'_м s = -\frac{B^2}{2\mu_0} s = -\frac{BH}{2} s,$$

причем абсолютная магнитная проницаемость воздуха принята равной μ_0. Знак «минус» указывает на то, что силы стремятся уменьшить расстояние между полюсами. Абсолютное значение силы, приходящейся на единицу поверхности полюса,

$$f' = \frac{|f|}{s} = \frac{BH}{2},$$

т. е. численно равно энергии магнитного поля в единице объема пространства между полюсами электромагнита.

В простейшем случае для одного контура с током энергия магнитного поля

$$W_м = \frac{Li^2}{2}.$$

Воспользуемся для вычисления электромагнитной силы выражением, полученным в предположении, что i_k = const. Имеем

$$f = \left(\frac{\partial W_м}{\partial g}\right)_{i_k = \text{const}} = \frac{i^2}{2}\frac{\partial L}{\partial g}.$$

Если перемещение dg происходит под действием силы f, то $f\,dg > 0$ и, стало быть, $dL > 0$. Следовательно, в контуре возникают такие силы, которые стремятся так деформировать контур, чтобы его индуктивность увеличилась.

Заметим здесь, что последнее выражение уже не требует никаких оговорок о постоянстве тока. Эта оговорка полностью использована при вынесении i^2 за знак производной. Это выражение пригодно и для вычисления мгновенной электромагнитной силы при данном мгновенном переменном токе.

Выше указывалось, что обе формулы, полученные в предположении, что Ψ_k = const, и в предположении, что i_k = const, тождественны, т. е. можно написать

$$f = -\left(\frac{\partial W_м}{\partial g}\right)_{\Psi_k = \text{const}} = +\left(\frac{\partial W_м}{\partial g}\right)_{i_k = \text{const}}.$$

Продемонстрируем это на примере одного контура. Чтобы воспользоваться первой формулой для силы, следует выразить энергию через потокосцепление самоиндукции. Имеем

$$W_{\text{м}} = \frac{Li^2}{2} = \frac{(Li)^2}{2L} = \frac{\Psi_L^2}{2L}.$$

Получаем

$$f = -\left(\frac{\partial W_{\text{м}}}{\partial g}\right)_{\Psi_L=\text{const}} = -\frac{\Psi_L^2}{2}\frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{1}{L}\right) = \frac{\Psi_L^2}{2L^2}\frac{\partial L}{\partial g} = \frac{i^2}{2}\frac{\partial L}{\partial g},$$

что полностью совпадает с результатом, полученным из выражения

$$f = \left(\frac{\partial W_{\text{м}}}{\partial g}\right)_{i=\text{const}}.$$

Рассмотрим два контура с токами. Для энергии магнитного поля системы, состоящей из двух контуров с токами, имеем выражение

$$W_{\text{м}} = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + Mi_1 i_2.$$

Найдем электромагнитную силу, стремящуюся изменить координату g, определяющую взаимное расположение контуров. От этой координаты зависит только взаимная индуктивность. Поэтому искомая электромагнитная сила

$$f = \left(\frac{\partial W_{\text{м}}}{\partial g}\right)_{i_k=\text{const}} = i_1 i_2 \frac{\partial M}{\partial g}.$$

В этом выражении вынесены за знак производной оба тока. Вынося за знак производной только ток в одном из контуров, получим

$$f = i_1\left[\frac{\partial(Mi_2)}{\partial g}\right]_{i_2=\text{const}} = i_1\left(\frac{\partial \Psi_{1M}}{\partial g}\right)_{i_2=\text{const}}$$

или

$$f = i_2\left[\frac{\partial(Mi_1)}{\partial g}\right]_{i_1=\text{const}} = i_2\left(\frac{\partial \Psi_{2M}}{\partial g}\right)_{i_1=\text{const}}.$$

Если контуры перемещаются под действием силы f, то $fdg > 0$. В таком случае из первого равенства имеем $i_1 d\Psi_{1M} > 0$. Таким образом, при $i_1 > 0$ и $d\Psi_{1M} > 0$, т. е. потокосцепление взаимной индукции Ψ_{1M} увеличивается. Иными словами, если потокосцепление самоиндукции $L_1 i_1$ положительно, то потокосцепление взаимной индукции Mi_2 стремится принять наибольшее возможное положительное значение. При $i_1 < 0$ имеем $d\Psi_{1M} < 0$, т. е. Ψ_{1M} уменьшается. Следовательно, если потокосцепление самоиндукции $L_1 i_1$ отрицательно, то и потокосцепление взаимной индукции Ψ_{1M} стремится стать отрицательным и притом наибольшим по абсолютному значению. Анализируя второе равенство, придем к аналогичным выводам по отношению к потокосцеплению взаимной индукции Mi_1 второго контура.

Итак, *электромагнитные силы стремятся расположить жесткие контуры системы таким образом, чтобы линии магнитной индукции внешнего потока внутри контуров проходили в том же направлении, что и линии магнитной индукции потоков самоиндукции.*

Определим еще вращающий момент f, который испытывает плоский контур с током i во внешнем однородном магнитном поле. Пусть B — магнитная индукция внешнего поля, s — поверхность, ограниченная контуром тока, и α — угол, составляемый положительной нормалью N к этой поверхности с вектором $\boldsymbol{B}$ и отсчитываемый от направления вектора $\boldsymbol{B}$ (рис. 2.8). Положительное направление нормали свяжем с положительным направлением тока i правилом правого винта.

Согласно вышеприведенным выражениям

$$f = i_1\left(\frac{\partial\Psi_{1M}}{\partial g}\right)_{i_2=\text{const}} \quad \text{и} \quad f = i_2\left(\frac{\partial\Psi_{2M}}{\partial g}\right)_{i_1=\text{const}},$$

искомый вращающий момент можно представить как произведение тока i в контуре на производную $\partial\Psi/\partial\alpha$ от внешнего потокосцепления по углу α. Имеем

$$\Psi = Bs\cos\alpha \quad \text{и} \quad f = i\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha} = -isB\sin\alpha = -mB\sin\alpha,$$

где $m = is$ есть магнитный момент замкнутого тока.

В векторной форме последнее выражение имеет вид (рис. 2.8)

$$\boldsymbol{f} = [\boldsymbol{mB}].$$

Мы приходим к замечательному выводу, что вращающий момент не зависит отдельно от i и s, а определяется магнитным моментом m.

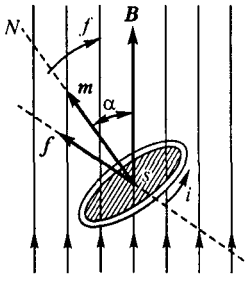


Рис. 2.8

Сказанное полностью относится к любым элементарным токам, так как по определению элементарным называем замкнутый ток, протекающий по столь малому контуру, что в пределах этого контура внешнее поле можно считать однородным.

В заключение определим электромагнитную силу, действующую на прямолинейный отрезок проводника с током i, имеющий длину l, расположенный во внешнем однородном поле нормально к вектору магнитной индукции $\boldsymbol{B}$ (рис. 2.9). Отрезок составляет часть замкнутого контура тока. На рис. 2.9 другая часть контура предполагается расположенной справа. При таком расположении направление линий индукции внешнего потока совпадает с направлением линий индукции потока самоиндукции контура ($M > 0$), поэтому сила должна быть направлена влево, так как при движении отрезка в этом направлении общий поток увеличивается из-за роста внешнего потока (потока взаимной индукции).

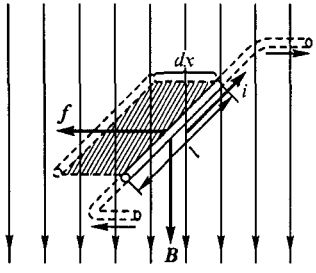


Рис. 2.9

Если теперь считать, что другая часть контура находится слева отрезка, то в этом случае линии индукции потока взаимной индукции (внешнего потока) будут направлены против линий индукции потока самоиндукции контура ($M < 0$). Следовательно, сила должна быть направлена, как и прежде, влево, так как

при движении отрезка в таком направлении уменьшается направленный против потока самоиндукции поток взаимной индукции (внешний поток) и увеличивается суммарный поток.

Направление силы может быть определено и при помощи выражения $\boldsymbol{f} = q[\boldsymbol{vB}]$. Направление $\boldsymbol{v}$ совпадает с направлением тока; поэтому, если, согласно правилу правого винта, вращать винт по направлению от вектора скорости к вектору индукции, получим направление силы f, показанное на рис. 2.9.

Предположим, что отрезок проводника переместится под действием электромагнитной силы на расстояние dx (см. рис. 2.9). Внешнее потокосцепление с контуром тока при этом получает приращение

$$d\Psi = d\Phi = Bl\,dx.$$

Согласно выражениям

$$f = i_1\left(\frac{\partial \Psi_{1M}}{\partial g}\right)_{i_2=\text{const}} \quad \text{и} \quad f = i_2\left(\frac{\partial \Psi_{2M}}{\partial g}\right)_{i_1=\text{const}},$$

искомая сила может быть представлена как произведение тока i в отрезке проводника на производную $d\Psi/dx$ от внешнего потокосцепления по координате. Получаем

$$f = i\frac{d\Psi}{dx} = i\frac{Bldx}{dx} = Bli.$$

Представляет интерес сравнение полученного выражения с выражением для ЭДС, индуцируемой в движущемся проводнике:

$$e = Blv.$$

Механическая сила f, стремящаяся изменить геометрическую координату x проводника, определяется электрической скоростью, т. е. током в проводнике $i = dq/dt$. ЭДС, стремящаяся вызвать ток в проводнике, определяется геометрической скоростью проводника $v = dx/dt$.

Глава третья

Основные понятия и законы теории электрических цепей

3.1. Электрические и магнитные цепи

Изложенное в предыдущих двух главах со всей ясностью показывает, что любое электромагнитное явление, происходящее в системе заряженных тел и контуров с токами, т. е. в любом электротехническом устройстве, определяется не только физическими процессами на самих заряженных телах и в проводниках, образующих контуры с токами, но и не в меньшей мере физическими процессами в диэлектрике, окружающем эти тела и проводники. Даже можно сказать больше — именно электромагнитное поле в диэлектрике, окружающее заряженные тела и проводники с токами, является носителем энергии системы, которая может передаваться от одной части системы к другой. Электрическое поле заряженных тел целиком находится вне этих тел — в окружающем их диэлектрике. Магнитное и электрическое поля электрических токов, протекающих по проводникам, существуют и вне проводников, и внутри их. Однако электрическое поле внутри проводников с током связано только с конечным удельным сопротивлением материала этих проводников и, соответственно, определяет потери энергии в проводниках. Энергия же, передаваемая вдоль проводников, целиком относится к электромагнитному полю в среде, окружающей проводники. Электрическая емкость и индуктивность любых элементов электротехнического устройства определяются их электрическими и магнитными полями при заданных зарядах и токах.

Таким образом, рассматривая явление во всей его полноте, во всех случаях необходимо изучать электромагнитное поле исследуемого устройства.

Математическое описание электромагнитных полей хотя и дает нам полную картину явлений, оказывается сложным; этому будет посвящена последняя, четвертая, часть курса.

В большинстве случаев представляется возможным достаточно точно описать процессы в электротехнических устройствах, пользуясь только такими интегральными величинами, как электродвижущая сила $e = \oint \left(\boldsymbol{E}_{\text{стор}} + \boldsymbol{E}_{\text{инд}} \right) d\boldsymbol{l}$, электрическое напряжение $u = \int_{A}^{B} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l}$, электрический заряд $q = \oint \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{s}$, электрический ток $i = \int_{s} \boldsymbol{\delta}\, d\boldsymbol{s} = \oint \boldsymbol{H} d\boldsymbol{l}$, магнитный поток $\Phi = \int_{s} \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{s}$, не рассматривая распределения в пространстве и изменения во времени величин $\boldsymbol{E}_{\text{стор}}$, $\boldsymbol{E}_{\text{инд}}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{\delta}$, $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{B}$, характеризующих электромагнитное поле во всех его точках. Такая возможность возникает вследствие того, что мы обычно стремимся создать определенные, достаточно узкие пути для электрического тока, располагая вдоль этих путей проводники из материалов с высокой электрической проводимостью, окруженных хорошо изолирующей средой, например в линиях электропередачи, в электрических сетях, в обмотках электрических машин и т. д., или помещая

вдоль этих путей какие-либо другие хорошо проводящие, ограниченные по размерам устройства, например электронные лампы, полупроводниковые приборы, электролитические ванны и т. д.

Совокупность устройств и объектов, образующих пути для электрического тока, электромагнитные процессы в которой могут быть описаны с помощью понятий об электродвижущей силе, токе и напряжении, называют электрической цепью.

Точно так же мы во многих случаях стремимся создать определенный путь, по которому должны замыкаться линии магнитной индукции, располагая вдоль этого пути тела из ферромагнитного материала с высокой магнитной проницаемостью, окруженные средой со значительно меньшей магнитной проницаемостью, например воздухом. В этом случае представляется возможным с достаточной точностью описывать процесс с помощью таких интегральных понятий, как магнитодвижущая сила $iw = \oint \boldsymbol{H} d\boldsymbol{l}$ и магнитный поток $\Phi = \int_s \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{s}$.

Совокупность устройств, содержащих ферромагнитные тела, электромагнитные процессы в которой могут быть описаны с помощью понятий о магнитодвижущей силе и магнитном потоке, называют магнитной цепью.

Переход от полной картины явлений в электромагнитном поле к упрощенной картине процессов в электрических цепях с учетом допускаемых при этом отклонений от действительной сложной картины явлений и, следовательно, принимаемых при этом абстракций и будет нашей основной задачей в этой главе. Здесь же введем основные общие понятия теории электрических цепей, относящиеся ко всем ее разделам, и дадим им определения. Развитию этой теории посвящаются вторая и третья части настоящего курса.

3.2. Элементы электрических цепей. Активные и пассивные части электрических цепей

Основными элементами электрических цепей являются источники электромагнитной энергии, устройства для передачи и преобразования электромагнитной энергии и приемники этой энергии.

Источниками электромагнитной энергии являются различные генерирующие устройства, в которых энергия того или иного вида — тепловая, химическая, ядерная, энергия механического движения и т. д. — преобразуется в электромагнитную. Таковыми являются, например, электрические вращающиеся генераторы, гальванические элементы, аккумуляторы, термоэлементы и т. д. В настоящее время разрабатываются новые устройства для прямого преобразования тепловой, ядерной и химической энергии в электромагнитную, такие, как, например, магнитогидродинамические генераторы и топливные элементы.

Передающими электромагнитную энергию элементами цепи являются, например, линии электропередачи, электрические сети, линии связи.

Преобразование электромагнитной энергии осуществляется с помощью трансформаторов, изменяющих напряжение и ток, преобразователей частоты, усилителей, а также ионных и полупроводниковых инверторов, преобразующих постоянный ток в переменный, выпрямителей, преобразующих переменный ток в постоянный, и т. п.

Приемниками в электрической цепи являются устройства, в которых осуществляется преобразование электромагнитной энергии в энергию другого вида, например в электродвигателях — в механическую работу, в электролизерах и в заряжаемых аккумуляторах — в химическую энергию, в электрических печах и нагревательных устройствах — в тепловую энергию, в радиоприемниках — в акустическую энергию и т. д.

Во всех случаях, когда то или иное устройство — элемент электрической цепи — имеет основным назначением генерирование, передачу, преобразование или потребление электромагнитной энергии, на первый план выдвигается требование его высокого коэффициента полезного действия.

Во многих случаях главным назначением тех или иных элементов электрической цепи является передача или преобразование электрических сигналов, а также выполнение операций измерения тех или иных величин или управления какими-нибудь процессами. Это — телефонные и телеграфные линии связи и их концевые устройства, весьма разнообразные элементы устройств автоматики, электроизмерительных устройств, счетно-решающих и управляющих электронных вычислительных машин, различных радиотехнических устройств и т. д. Для всех них главным требованием является получение определенного качества передаваемого или преобразуемого сигнала. Естественно, и в этих случаях происходят передача и преобразование электромагнитной энергии и имеет значение, хотя и не основное, достижение как можно более высокого коэффициента полезного действия.

Наряду с упомянутыми требованиями элементы электрических цепей должны удовлетворять также многим другим требованиям — надежности работы, долговечности, если необходимо — быстродействию, устойчивости работы, точности действия и т. д.

Соответственно этому электрические цепи современных электротехнических устройств являются весьма сложными. Поэтому и теория электрических цепей все время развивается и ей становятся свойственными все более обобщенные методы. В настоящем курсе, начав с исследования простейших электрических цепей, мы постепенно перейдем к общим методам расчета сложных электрических цепей.

Условимся в дальнейшем часть электрической цепи, в которой действуют источники электромагнитной энергии, называть активной частью цепи, или короче — активной цепью. Ее будем нередко обозначать прямоугольником с буквой **А** в середине и с тем или иным числом выводов (проводников), с помощью которых она присоединяется к остальной части цепи (рис. 3.1).

Часть электрической цепи, в которой нет источников электромагнитной энергии, будем называть пассивной частью цепи, или короче — пассивной цепью. Ее будем обозначать также прямоугольником с соответствующим числом выводов для присоединения к остальной части цепи, но с буквой **П** в середине прямоугольника (рис. 3.2). Предполагается, что внутри этих прямоугольников находятся все элементы рассматриваемой части цепи, со всеми соединениями между ними.

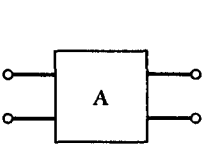


Рис. 3.1

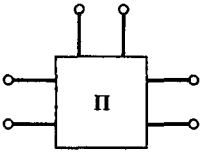


Рис. 3.2

3.3. Физические явления в электрических цепях. Цепи с распределенными параметрами

Наиболее простые явления имеют место в электрических цепях постоянного тока. Длительный постоянный ток в электрической цепи может быть только или током проводимости, или током переноса. Ток смещения в диэлектрике не может быть постоянным сколь угодно долгое время, так как электрическое смещение и поляризованность диэлектрика не могут возрастать беспредельно без нарушения электрической прочности диэлектрика. Поэтому в цепь постоянного тока могут входить только такие устройства, в которых ток существует в виде тока проводимости, например провода линии передачи, обмотки машин, электролитические ванны, гальванические элементы, аккумуляторы и т. д., или такие, в которых ток существует в форме тока переноса, например электронные лампы. Конденсаторы с идеальным диэлектриком, удельная проводимость которого предполагается равной нулю, не проводят постоянного тока.

Хотя вокруг цепи постоянного тока существует магнитное поле, но оно не изменяется во времени и, следовательно, в цепи постоянного тока не индуцируются ЭДС.

Если изолирующая среда между проводами обладает хотя и малой, но конечной удельной проводимостью, то под действием постоянного напряжения между проводами через нее будет протекать ток утечки. Ток утечки будет отходить в изолирующую среду от всех элементов проводов, соприкасающихся с ней, в результате чего ток вдоль провода будет иметь разные значения. Здесь мы имеем простейшую цепь с распределенными вдоль нее параметрами, а именно с распределенной вдоль цепи проводимостью утечки.

При переменных токах и напряжениях явления в электрической цепи оказываются более сложными. Переменный ток, т. е. изменяющийся во времени ток, может существовать и в диэлектрике в виде тока смещения. Поэтому в электрическую цепь переменного тока могут входить также конденсаторы, обкладки которых разделены диэлектриком. При переменном напряжении на конденсаторе возникает переменное электрическое поле между его металлическими обкладками, и следовательно, в разделяющем обкладки диэлектрике возникает ток смещения. С учетом тока электрического смещения линии тока, как было отмечено в § 1.7, оказываются всегда замкнутыми.

Рассмотрим процессы в электрической цепи с последовательно включенным конденсатором, происходящие при зарядке и при разрядке конденсатора. Если не принимать во внимание токов смещения, то эта цепь кажется разомкнутой. Предположим, что при помощи ключа K незаряженный конденсатор включается в некоторый момент времени в цепь источника постоянной ЭДС (рис. 3.3). Конденсатор заряжается; электрические заряды, переносимые от источника ЭДС к обкладкам конденсатора по соединяющим их проводникам, собираются на этих обкладках. По мере увеличения заряда на обкладках возрастает электрическое поле между ними, и в диэлектрике возникают токи электрического смещения. Если охва-

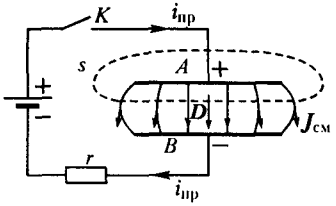


Рис. 3.3

тим одну из обкладок, например обкладку A, замкнутой поверхностью s, то во время, когда по проводнику, пересекающему эту поверхность, протекает к обкладке A ток проводимости $i_{пр}$, в диэлектрике образуется ток смещения, проходящий сквозь поверхность s изнутри наружу и в точности равный току $i_{пр}$ в проводнике. Линии тока смещения в диэлектрике являются продолжением линий тока в проводнике. Действительно, электрическое поле направлено от положительной обкладки A к отрицательной B и при этом возрастает. Следовательно, линии тока смещения направлены также от положительной обкладки к отрицательной. Электрический ток, протекающий в проводнике к положительной обкладке в виде тока проводимости, продолжает протекать в диэлектрике как ток смещения и далее от отрицательной обкладки в проводнике — вновь в виде тока проводимости. Таким образом, цепь электрического тока является замкнутой.

Если отключить заряженный конденсатор от источника ЭДС и затем замкнуть его на резистор с сопротивлением r (рис. 3.4), то конденсатор начнет разряжаться. Ток $i_{пр}$ в проводнике будет протекать от положительной обкладки A к отрицательной B. В диэлектрике электрическое поле по-прежнему остается направленным от положительной обкладки к отрицательной. Однако теперь поле ослабевает, и следовательно, вектор плотности тока направлен против вектора смещения $\boldsymbol{D}$. Линии тока смещения направлены от отрицательной обкладки к положительной и являются продолжением линий тока в проводнике.

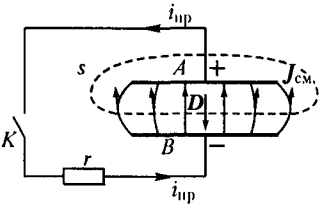


Рис. 3.4

Согласно принципу непрерывности электрического тока (см. § 1.7), в любой момент времени как при зарядке, так и при разрядке конденсатора ток смещения в диэлектрике между обкладками конденсатора в точности равен току $i_{пр}$ в проводниках.

Ток смещения при переменном напряжении возникает не только в конденсаторах, т. е. в устройствах, построенных специально для использования их емкости, но также и в диэлектрике, окружающем любые элементы цепи переменного тока, поскольку между этими элементами существует переменное напряжение, т. е. переменное электрическое поле. Так, например, ток смещения возникает в диэлектрике между проводами линии передачи, если напряжение между проводами изменяется во времени (см. рис. 1.19). Вследствие этого переменный ток в проводах линии неодинаков в разных местах линии, даже если удельная проводимость диэлектрика равна нулю, так как вдоль всей линии ток ответвляется от проводов через диэлектрик в виде тока смещения. Очевидно, поэтому провода линии по отношению друг к другу, так же как и конденсатор, обладают емкостью. Сказанное справедливо для любого устройства при переменном токе. Так, например, в реостате при переменном токе появляется переменное падение напряжения, т. е. в проволоке реостата и в окружающем его диэлектрике возникает переменное электрическое поле. Поэтому между отдельными участками проволоки реостата через диэлектрик проходят токи смещения, вследствие чего, принципиально говоря, ток в разных местах проволоки реостата имеет различные значения. Очевидно, поэтому отдельные участки реостата обладают по отношению друг к другу электрической емкостью.

Если по индуктивной катушке проходит переменный ток, то в катушке в отдельных ее витках индуцируется переменная ЭДС. На зажимах катушки и между ее витками появляется переменное напряжение, т. е. переменное электрическое поле, что приводит к возникновению в диэлектрике между витками катушки токов смещения. И в этом случае, строго говоря, ток в различных местах проволоки катушки имеет разные значения. Очевидно, поэтому существует электрическая емкость между витками катушки.

Итак, *электрическая емкость принципиально всегда распределена вдоль всей цепи.*

То же следует сказать и об индуктивности цепи. Нет такого участка цепи, который при прохождении по нему тока не охватывался бы магнитным потоком. Поэтому при переменном токе на каждом участке цепи индуцируются ЭДС самоиндукции и взаимной индукции. Очевидно, поэтому каждый участок, каждый элемент цепи обладает индуктивностью. Индуктивность имеют не только катушки, но и провода линии, реостаты и любые другие элементы цепи переменного тока. Даже конденсаторы обладают индуктивностью, хотя и очень малой. Таким образом, *индуктивность* также *всегда распределена вдоль всей цепи.*

Поглощение электромагнитной энергии и преобразование ее в тепловую энергию при переменном токе происходят точно так же во всех элементах цепи. Не только реостаты, но и индуктивные катушки, и провода линии, а также другие элементы цепи обладают отличным от нуля электрическим сопротивлением, и при прохождении тока в них поглощается электромагнитная энергия и происходит выделение теплоты. Если катушка имеет сердечник из ферромагнитного материала, то, кроме потерь энергии в обмотке катушки, происходят потери энергии в сердечнике на гистерезис и на вихревые токи. В конденсаторах при переменном напряжении имеют место потери в диэлектрике. В электронных лампах теплота выделяется на аноде, так как ускоренные в электрическом поле электроны теряют здесь свою скорость. В ионных приборах электромагнитная энергия переходит в тепловую не только на электродах, но и в газовом промежутке между электродами.

Характеризуя способность какого-либо участка цепи при прохождении по нему тока поглощать электромагнитную энергию электрическим сопротивлением этого участка, мы в соответствии со сказанным должны утверждать, что *электрическое сопротивление распределено по всей электрической цепи.*

Электрическая цепь, в которой электрические сопротивления и проводимости, индуктивности и электрические емкости распределены вдоль цепи, называют электрической цепью с распределенными параметрами. Соответственно, токи и напряжения в таких цепях меняются в зависимости от времени и от одной пространственной координаты и, следовательно, являются функциями двух переменных. Это обстоятельство существенно усложняет анализ процессов в цепи.

В отдельных участках цепи может происходить преобразование электромагнитной энергии не только в тепловую, но и в другие виды энергии, например в аккумуляторах при их зарядке — в химическую энергию, в двигателях — в механическую работу и т. д. Однако эти преобразования совершаются не обязательно во всех элементах электрической цепи.

При изучении энергетических процессов в электрических цепях переменного тока нам придется обратить особое внимание на то, что электрическое и магнитное поля являются носителями определенного количества энергии. При переменных токах и напряжениях эти поля изменяются во времени. При усилении полей запас энергии в них возрастает, при ослаблении полей — убывает, переходя в другие виды энергии или возвращаясь к источникам энергии, действующим в цепи.

При изменениях тока и напряжения в электрической цепи, как увидим в конце четвертой части курса при рассмотрении переменного электромагнитного поля, вообще говоря, происходит излучение электромагнитного поля с присущей ему энергией. Однако в обычных цепях при сравнительно низких частотах тока и напряжения излучением можно пренебречь.

Наконец, обратим внимание еще на одно существенное обстоятельство, отмеченное уже в § 1.12, а именно на то, что напряжение между двумя любыми точками A и B цепи переменного тока зависит от выбора пути между этими точками, вдоль которого определяется напряжение. Действительно, имеем $u_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l}$. Но два разных пути, например путь AmB и путь AnB (см. рис. 1.35), образуют замкнутый контур $AmBnA$, с которым сцепляется переменный магнитный поток Ф, существующий около рассматриваемой электрической цепи. Изменяющийся поток Ф индуцирует в контуре $AmBnA$ ЭДС. Следовательно,

$$u_{AmB} - u_{AnB} = \int_{AmB} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} - \int_{AnB} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = \int_{AmB} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} + \int_{BnA} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = \oint_{AmBnA} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \neq 0,$$

т. е.

$$u_{AmB} \neq u_{AnB}.$$

Таким образом, если быть совершенно строгими, то нельзя при переменном токе говорить о напряжении между какими-либо двумя точками цепи, в частности, о напряжении на зажимах цепи, как о некоторой вполне определенной величине. Следует говорить о напряжении между двумя точками цепи вдоль определенного, заданного пути между этими точками.

Все изложенное свидетельствует о большой сложности физических процессов, происходящих в цепях переменного тока.

3.4. Научные абстракции, принимаемые в теории электрических цепей, их практическое значение и границы применимости. Цепи с сосредоточенными параметрами

Далеко не во всех случаях необходимо учитывать всю сложность физических процессов, происходящих в цепях переменного тока. Наоборот, в большинстве случаев можно сделать ряд допущений, существенно упрощающих задачу и вместе с тем не приводящих к заметным отклонениям от действительности.

Равномерное распределение электрического и магнитного полей вдоль цепи наблюдается в сравнительно редких случаях, например в длинных линиях. Значительно чаще магнитное и электрическое поля распределяются вдоль цепи неравномерно. На одних участках цепи, например в конденсаторах, преобладает

электрическое поле и выступают на первый план явления, связанные с его изменениями; на других участках, например в индуктивных катушках, преобладает магнитное поле и основными оказываются явления, возникающие вследствие изменения магнитного поля.

Точно так же и преобразование электромагнитной энергии в тепловую часто бывает сосредоточено в основном в одном или нескольких участках цепи.

Рассмотрим в виде примера реостат. Он обладает наряду с сопротивлением r также некоторой емкостью между отдельными его витками и некоторой индуктивностью. Однако если частота переменного тока невелика или вообще ток изменяется по любому закону достаточно медленно, то токи смещения, ответвляющиеся от участков проволоки в диэлектрике, ничтожны по сравнению с током проводимости в проволоке реостата. Этими токами смещения в таком случае можно пренебречь, что эквивалентно тому, что емкость C между участками проволоки реостата принимается равной нулю. Точно так же при низкой частоте тока или вообще при медленном его изменении можно пренебречь электродвижущей силой самоиндукции в реостате по сравнению с падением напряжения в его сопротивлении, что эквивалентно принятию равной нулю индуктивности L реостата. Иными словами, абстрагируясь от действительно сложной картины явления, допускаем, что реостат обладает только сопротивлением $r \neq 0$ и имеет $L = 0$ и $C = 0$. Заметим, что такой участок цепи можно характеризовать также его проводимостью $g = 1/r$.

На практике находят широкое применение устройства, которые специально сконструированы таким образом, что их основной характеристикой является электрическое сопротивление.

Элемент электрической цепи, предназначенный для использования его электрического сопротивления, называют р е з и с т о р о м.

В качестве другого важного примера рассмотрим конденсатор. Вплоть до весьма высоких частот можно пренебречь индуктивностью L конденсатора и считаться только с его емкостью C. Если в цепи имеются реостат и конденсатор и энергия, поглощаемая в реостате, значительно превышает энергию, теряемую в диэлектрике конденсатора, то в первом приближении последней можно пренебречь или даже можно учесть ее при расчете соответствующим изменением сопротивления реостата. При такой абстракции допускаем, что конденсатор обладает емкостью $C \neq 0$, но для него $L = 0$ и $r = 0$.

Наконец, важным примером является индуктивная катушка. Если частота тока в катушке не слишком велика, то можно пренебречь токами смещения между витками проволоки катушки по сравнению с током проводимости в самой катушке, т. е. пренебречь емкостью C между витками катушки. При не очень малой частоте можно пренебречь падением напряжения в сопротивлении проволоки катушки по сравнению с индуцируемой в ней ЭДС, т. е. принять равным нулю сопротивление катушки. При желании можно учесть сопротивление катушки, предположив условно, что последовательно с катушкой, имеющей $r = 0$, включен реостат, обладающий сопротивлением, равным сопротивлению проволоки действительной катушки. При такой абстракции полагаем, что катушка обладает индуктивностью $L \neq 0$ и имеет $r = 0$ и $C = 0$.

Пусть цепь (рис. 3.5) образована из последовательно соединенных резистора (участок *ab*), конденсатора (участок *bc*) и индуктивной катушки (участок *cd*). Будем предполагать, что преобразование электромагнитной энергии в тепловую происходит только в резисторе на участке *ab*, т. е. что на этом участке *сосредоточено* все сопротивление *r* цепи. Будем предполагать, что токи электрического смещения существуют только на участке *bc* между обкладками конденсатора, т. е. что в этом участке *сосредоточена* емкость *C* цепи. Наконец, предположим, что переменный магнитный поток индуцирует ЭДС только в катушке на участке *cd*, т. е. что в этом участке *сосредоточена* вся индуктивность *L* цепи.

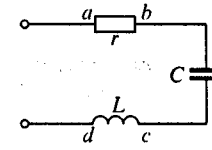


Рис. 3.5

Подобного рода электрические цепи, имеющие в общем случае значительно более сложную конфигурацию и содержащие различные элементы, называют электрическими цепями с сосредоточенными параметрами.

Практическое значение указанных научных абстракций исключительно велико. Приняв сделанные в них допущения, мы получаем возможность построить теорию электрических цепей с сосредоточенными параметрами, охватывающую огромный класс реальных электрических цепей, содержащих самые различные технические устройства. Сюда относятся все обычные электрические цепи при промышленной, а также при звуковой частоте, за исключением длинных линий передачи энергии и протяженных линий связи. Многие электрические цепи, используемые в радиотехнике при весьма высоких частотах, также с большой точностью могут рассматриваться как цепи с сосредоточенными параметрами.

Чрезвычайно важно четко представлять себе границы применимости подобных абстракций. В самом деле, одна и та же реальная цепь может вести себя различно при разных частотах. Например, если при низкой частоте можно пренебречь емкостью между витками индуктивной катушки, то при очень высокой частоте такое допущение для той же катушки может привести к грубой ошибке и будет совершенно искажать действительную картину явления, так как при высоких частотах в действительных условиях токи смещения в диэлектрике около витков катушки могут быть сравнимы с током в проволоке катушки.

В качественном отношении зависимость от частоты тока и напряжения значений погрешностей, которые могут быть получены при рассмотрении реальных цепей как цепей с сосредоточенными параметрами, ясна из изложенного в предыдущем и в настоящем параграфах. Количественный критерий допустимости подобного рассмотрения можно будет установить только после изучения переменного электромагнитного поля в конце последней части курса. Тогда мы вернемся к этому важному вопросу. Сейчас же только сформулируем этот критерий. Мы увидим, что переменное электромагнитное поле распространяется в пространстве со скоростью света. В воздухе эта скорость равна $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с.

Электрическую цепь можно рассматривать как цепь с сосредоточенными параметрами, если скорости изменения напряжений и токов в цепи столь малы, что за время распространения электромагнитных волн вдоль всей цепи в любом направлении изменения напряжений и токов остаются малыми по сравнению с полными их изменениями в исследуемом режиме. При периодических токах и напряжениях это означает, что электромагнитная волна успевает пробежать

вдоль всей цепи за ничтожную долю периода. В таких случаях можно не считаться с волновыми процессами, характеризующими переменное электромагнитное поле, и интересоваться в конденсаторах только изменением электрического поля, а в катушках — только изменением магнитного поля.

Далее в этой главе будут рассматриваться цепи с сосредоточенными параметрами. В первых двенадцати главах второй части, а также во всех главах третьей части также будут рассматриваться цепи с сосредоточенными параметрами. Цепям с распределенными параметрами будут посвящены семнадцатая и восемнадцатая главы второй части.

3.5. Параметры электрических цепей. Линейные и нелинейные электрические и магнитные цепи

Из изложенного в предыдущих параграфах ясно, что основными параметрами электрических цепей являются сопротивление r, емкость C и индуктивность L. Если имеет место электромагнитное воздействие на данную цепь со стороны других цепей или даже если внутри данной цепи наблюдается такое воздействие со стороны одного ее участка на другой, то в число параметров цепи войдет еще взаимная индуктивность M.

Строго говоря, параметры цепи почти всегда в какой-то мере зависят от тока и напряжения. Сопротивление r меняется с изменением тока хотя бы потому, что в этом случае изменяется температура проводников. Емкость конденсатора может зависеть от напряжения, если диэлектрическая проницаемость вещества диэлектрика в конденсаторе зависит от напряженности электрического поля. Индуктивность катушки зависит от тока, если магнитная проницаемость вещества сердечника катушки зависит от напряженности магнитного поля.

В общем случае зависимости параметров r, L и C от значений токов, напряжений или их направлений приводят к тому, что характеристики элементов электрической цепи оказываются нелинейными (кривые *1* на рис. 3.6).

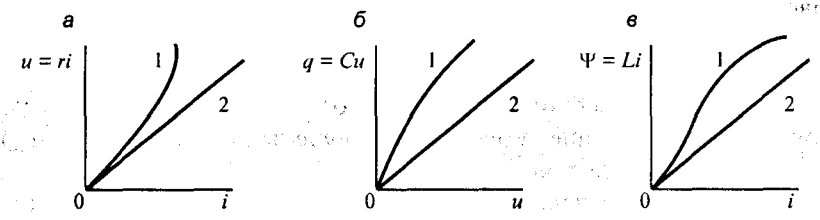


Рис. 3.6

Зависимость напряжения на зажимах элемента электрической цепи от тока в нем называют вольт-амперной характеристикой (ВАХ) (рис. 3.6, *а*).

Зависимость заряда конденсатора от приложенного к нему напряжения называют кулон-вольтной характеристикой (рис. 3.6, *б*).

Зависимость потокосцепления элемента или участка электрической цепи от тока в ней называют вебер-амперной характеристикой (рис. 3.6, *в*).

Однако во многих случаях, когда нелинейности характеристик выражены весьма слабо, ими можно пренебречь и полагать параметры цепи не зависящими ни от тока, ни от напряжения. В этих случаях характеристики элементов элек-

трической цепи определяются на диаграммах прямыми линиями (кривые *2* на рис. 3.6). Такие элементы цепи называют линейными. Процессы в цепях, содержащих только *линейные элементы*, описываются при постоянных токах *линейными* алгебраическими уравнениями, а при изменяющихся во времени токах — *линейными* алгебраическими и дифференциальными уравнениями. Соответственно, такие цепи называют линейными электрическими цепями. Вся вторая часть будет посвящена теории линейных электрических цепей.

Когда параметры элементов электрической цепи существенно зависят от тока или напряжения и, соответственно, характеристики этих элементов имеют на диаграммах криволинейный характер, такие элементы называют нелинейными. Если электрическая цепь содержит хотя бы один нелинейный элемент, то она является нелинейной электрической цепью.

Магнитные цепи, содержащие участки из ферромагнитных материалов, как правило, нелинейны, так как магнитная проницаемость этих материалов зависит от напряженности магнитного поля.

Изучение нелинейных электрических и магнитных цепей имеет большое практическое значение в связи с широким использованием особых свойств таких цепей в современных электротехнических устройствах, особенно в устройствах автоматического управления и регулирования, в электроизмерительной технике, в радиотехнике и т. д. Явления в нелинейных цепях более сложны, чем в линейных, а поэтому более сложны и методы анализа явлений в нелинейных цепях. Основные положения теории нелинейных электрических и магнитных цепей будут рассмотрены в третьей части.

В дальнейшем в настоящей главе и во второй части будем предполагать, что параметры цепи не зависят от тока и напряжения, а также, если это не будет оговорено особо, и от времени, т. е. что они постоянны.

В виде примеров расчета величин C и L получим их выражения для некоторых простых элементов цепи.

Емкость плоского конденсатора определим, пренебрегая искажением поля у его краев. Применим постулат Максвелла к замкнутой поверхности, охватывающей заряд q одной пластины. След этой замкнутой поверхности изображен на рис. 3.7 штриховой линией. Часть поверхности внутри конденсатора проведем нормально к линиям напряженности поля. Линии поля пересекают только эту часть замкнутой поверхности, равную поверхности пластины. Таким образом,

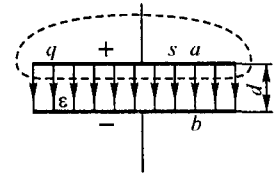


Рис. 3.7

$$\oint \boldsymbol{D}\,d\boldsymbol{s} = Ds = q \quad \text{и} \quad E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon s}.$$

Разность потенциалов u_C пластин a и b конденсатора равна линейному интегралу вектора $\boldsymbol{E}$ вдоль некоторого пути между пластинами. Пусть d — расстояние между пластинами. Избирая путь интегрирования вдоль линии напряженности поля и замечая, что в однородном поле E = const, получим

$$u_C = \int_a^b \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = \int_a^b E\,dl = E\int_a^b dl = Ed = \frac{q}{\varepsilon s}d.$$

Следовательно,

$$C = \frac{q}{u_C} = \frac{\varepsilon s}{d}.$$

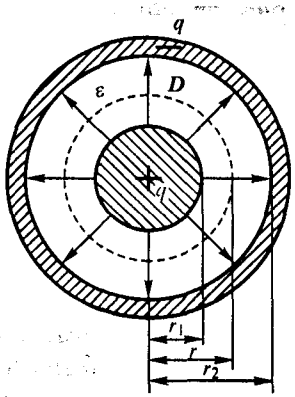


Рис. 3.8

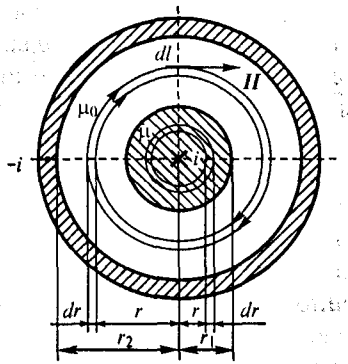


Рис. 3.9

Определим еще емкость отрезка концентрического кабеля длиной l, с радиусом внутреннего провода r_1 и внутренним радиусом наружного провода r_2 (рис. 3.8). Окружим внутренний провод замкнутой поверхностью, образованной цилиндрической поверхностью с радиусом r и двумя плоскими торцевыми поверхностями на концах отрезка кабеля. Поток вектора $\boldsymbol{D}$ сквозь торцевые поверхности равен нулю. Применяя к этой замкнутой поверхности постулат Максвелла, получаем

$$\oint \boldsymbol{D}\,d\boldsymbol{s} = D2\pi rl = q \quad \text{и} \quad E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon 2\pi rl},$$

причем q — заряд рассматриваемого отрезка кабеля.

Разность потенциалов u_C между внутренним и наружным проводами определяется интегралом:

$$u_C = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{r} = \frac{q}{\varepsilon 2\pi l}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{q}{2\pi l}\ln\frac{r_2}{r_1},$$

и, следовательно,

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}.$$

Найдем выражение для индуктивности того же концентрического кабеля, полагая, что внутренний провод является прямым, а наружный — обратным. На рис. 3.9 изображены линии напряженности магнитного поля в таком кабеле. Магнитным потоком в теле обратного провода пренебрегаем ввиду малой толщины этого провода. Магнитное поле вне кабеля отсутствует, так как сумма

токов в прямом и обратном проводах равна нулю, и следовательно, равен нулю линейный интеграл напряженности магнитного поля, взятый по любому контуру, охватывающему весь кабель. Таким образом, остается учесть поток в изолирующем веществе и поток в теле внутреннего провода. Оба эти потока определяются только током i во внутреннем проводе. Рассматриваемый пример особенно интересен тем, что здесь необходимо рассчитать потокосцепление, которое определяется линиями магнитной индукции, проходящими в теле самого провода. Напряженность поля в изолирующем слое найдем из закона полного тока:

$$\oint_l \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = H2\pi r = i; \quad H = \frac{i}{2\pi r}.$$

Напряженность поля в теле внутреннего провода получаем из этого закона, учитывая, что магнитные линии здесь охватывают только часть тока, равную $i\dfrac{\pi r^2}{\pi r_1^2}$:

$$\oint \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = H2\pi r = i\frac{r^2}{r_1^2}; \quad H = \frac{i}{2\pi r_1^2} r,$$

причем r — расстояние от оси кабеля до точки, в которой определяется $\boldsymbol{H}$. Последняя формула справедлива только при условии равномерного распределения тока по сечению провода, т. е., строго говоря, как увидим дальше, только при постоянном токе.

Разделим поток на кольцевые трубки, имеющие прямоугольное поперечное сечение $ds = l\,dr$, где l — длина отрезка кабеля. Поток сквозь сечение такой трубки

$$d\Phi = B\,ds = \mu Hl\,dr.$$

Трубки магнитной индукции, расположенные в слое изоляции, сцепляются один раз со всем током i, и, следовательно, приняв для вещества изоляции $\mu = \mu_0$, для этих трубок имеем

$$d\Psi = d\Phi = \mu_0 \frac{i}{2\pi r} l\,dr.$$

Потокосцепление Ψ', определяемое линиями магнитной индукции, расположенными в изолирующем слое, равно

$$\Psi' = \int_{r_1}^{r_2} \mu_0 \frac{i}{2\pi} l \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi} il \ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Трубки магнитной индукции, расположенные в теле внутреннего провода, сцепляются только с частью тока, равной $i\dfrac{r^2}{r_1^2} = i_r$. Если весь провод рассматривать как один виток, то отношение i_r/i представляет собой часть витка, охватываемую данной трубкой магнитной индукции. Поэтому поток $d\Phi$ в трубке дает потокосцепление $d\Psi$ со всем током i, равное

$$d\Psi = \frac{i_r}{i} d\Phi = \frac{r^2}{r_1^2} \mu \frac{i}{2\pi r_1^2} rl\,dr = \frac{\mu}{2\pi} \frac{il}{r_1^4} r^3 dr,$$

где μ — абсолютная магнитная проницаемость материала провода. Потокосцепление Ψ'', определяемое линиями магнитной индукции, замыкающимися в теле провода, имеет значение

$$\Psi'' = \int_0^{r_1} \frac{\mu}{2\pi} \frac{il}{r_1^4} r^3 dr = \frac{\mu}{8\pi} il.$$

Искомая индуктивность выражается формулой

$$L = \frac{\Psi' + \Psi''}{i} = \frac{l}{2\pi}\left(\mu_0 \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\mu}{4}\right).$$

Из приведенных примеров становятся ясны высказанные в §1.8 и 1.11 общие положения, что емкость C определяется параметром ε среды, где существует электрическое поле, и геометрическими размерами, а индуктивность L определяется абсолютными магнитными проницаемостями μ сред, в которых существует магнитное поле, и геометрическими размерами.

Для емкости и индуктивности кабеля характерна также прямая зависимость их от длины l отрезка кабеля. Возможность представления кабеля сосредоточенной емкостью или индуктивностью, как было отмечено в § 3.4, зависит от того, насколько в кабеле меньше произведение скорости света на промежуток времени, за который процесс повторяется (период T для периодических процессов), его длины. Пусть частота f рассматриваемого процесса равна 50 кГц. Тогда период процесса равен $T = 1/f = 2 \cdot 10^{-5}$ с. Следовательно, если $l \ll 2 \cdot 10^{-5} \cdot 3 \cdot 10^8 = 6 \cdot 10^3$ м, то такой кабель может быть рассмотрен как участок цепи, имеющий сосредоточенные параметры.

3.6. Связи между напряжением и током в основных элементах электрической цепи

Обратимся вновь к простой электрической цепи, изображенной на рис. 3.5.

Первый участок цепи ab мы охарактеризовали сопротивлением r. Зная r, при заданном токе i можно, пользуясь законом Ома, найти напряжение u_r, необходимое для преодоления сопротивления этого участка цепи, а именно

$$u_r = ri.$$

Второй участок цепи bc представляет собой конденсатор. Зная емкость конденсатора C, можно при заданном значении его заряда q найти напряжение u_C из соотношения $u_C = q/C$. Между током i и зарядом q существует связь $i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_C}{dt}$. Следовательно,

$$q = \int_0^t i\,dt + q(0),$$

где $q(0)$ — заряд конденсатора в момент $t = 0$, т. е. в момент, от которого начинаем отсчет времени. Соответственно,

$$u_C = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + \frac{q(0)}{C} = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + u_C(0),$$

где $u_C(0)$ — напряжение на конденсаторе в начальный момент времени $t = 0$.

Третий участок цепи *cd* представляет собой индуктивную катушку. Зная индуктивность катушки L, можно при заданном токе определить потокосцепление самоиндукции $\Psi_L = Li$ и при заданной скорости изменения тока di/dt найти возникающую в цепи ЭДС самоиндукции $e_L = -L\frac{di}{dt}$, а также напряжение на зажимах катушки $u_L = -e_L = +L\frac{di}{dt}$.

Выражая ток i в катушке и поток Ψ_L в ней через напряжение u_L на ее зажимах, получим

$$i = \frac{1}{L}\int_0^t u_L\,dt + i(0) \quad \text{и} \quad \Psi_L = Li = \int_0^t u_L\,dt + \Psi_L(0),$$

где $i(0)$ и $\Psi_L(0) = Li(0)$ — ток и поток в начальный момент времени $t = 0$.

При наличии взаимной индуктивности соответственно будем иметь

$$\Psi_{1M} = Mi_2;\ e_{1M} = -M\frac{di_2}{dt} \quad \text{и} \quad u_{1M} = -e_{1M} = +M\frac{di_2}{dt}.$$

Выражая ток i_2 и поток $\Psi_{1M} = Mi_2$ через напряжение u_{1M}, найдем

$$i_2 = \frac{1}{M}\int_0^t u_{1M}\,dt + i_2(0) \quad \text{и} \quad \Psi_{1M} = Mi_2 = \int_0^t u_{1M}\,dt + \Psi_{1M}(0).$$

Напряжение на любом участке цепи равно линейному интегралу напряженности электрического поля вдоль этого участка. Так как мы полностью пренебрегли электродвижущими силами, индуцируемыми переменными магнитными потоками в первом и во втором участках, то электрическое поле около этих участков является *потенциальным*. Следовательно, в выражениях

$$u_r = \int_a^b \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} \quad \text{и} \quad u_C = \int_b^c \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l}$$

пути интегрирования между точками *a* и *b* и между точками *b* и *c* могут быть заданы произвольно. Эти пути только не должны проходить через область магнитного поля катушки. В частности, они могут проходить вдоль проволоки реостата и внутри диэлектрика конденсатора. Но они могут пролегать и около реостата или около конденсатора, где также существует электрическое поле.

В выражении

$$u_L = \int_c^d \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l}$$

интеграл должен быть взят также вдоль пути, не проходящего в магнитном поле катушки, но отнюдь не вдоль проволоки катушки. Поясним это положение. Для простоты предположим, что катушка имеет один виток, совмещенный с плоско-

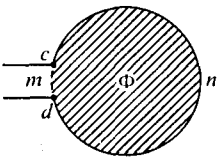


Рис. 3.10

стью рисунка (рис. 3.10). Магнитный поток Ф, сцепляющийся с витком, проходит сквозь площадь, охватываемую витком (заштрихована на рисунке). Линейный интеграл напряженности электрического поля, взятый по пути *cnd* внутри проволоки витка, равен нулю, так как мы полностью пренебрегли сопротивлением витка, а следовательно, напряженность электрического поля внутри материала проволоки равна нулю.

Согласно закону электромагнитной индукции, имеем

$$\oint_{cndmc} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Так как $\int_{cnd} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = 0$, то

$$\int_{dmc} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{и} \quad \int_{cmd} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = +\frac{d\Phi}{dt} = +\frac{dLi}{dt} = L\frac{di}{dt} = u_L.$$

При сделанных допущениях и оговорках можно, согласно сказанному в § 1.8 и 1.12, применять для величин u_r, u_C и u_L наряду с термином напряжение также и термин разность потенциалов.

3.7. Условные положительные направления тока и ЭДС в элементах цепи и напряжения на их зажимах

При анализе процессов в электрической цепи необходимо обязательно задать *условные положительные направления* токов и ЭДС в элементах цепи и напряжений на их зажимах, обозначив такие направления на рисунке стрелками. Эти условные положительные направления можно задать произвольно. Действительные мгновенные ток i, напряжение u и ЭДС e будут положительны, если действительные направления тока, напряжения и ЭДС в данный момент времени совпадают с условно заданными положительными их направлениями. В дальнейшем для краткости часто вместо «условное положительное направление» будем говорить «положительное направление», всегда понимая под этим, если не оговорено особо, именно условное положительное, а не действительное направление соответствующей величины.

Иногда удобно выражать условное положительное направление токов, напряжений или ЭДС не стрелками, а двойными индексами у их буквенного обозначения (i_{12}, u_{12}, e_{12}, i_{ab}, u_{ab}, e_{ab}). Эти индексы должны соответствовать обозначениям точек на графическом изображении цепи, причем положительным считается направление от точки цепи, отвечающей первому индексу, к точке цепи, отвечающей второму индексу. Например, $u_{ab} > 0$, когда действительное напряжение направлено от точки a к точке b.

Приняв приведенные в предыдущем параграфе связи между u_r и i, между q и u_C и между u_L и di/dt, мы должны считать условные положительные направления тока, напряжения и ЭДС в каждом отдельном элементе цепи ориентированными в одну и ту же сторону, что показано стрелками на рис. 3.11.

В самом деле, согласно связи $u_{ab} = ri_{ab}$, величины $u_r = u_{ab}$ и $i = i_{ab}$ должны быть при $r > 0$ одного знака, т. е. одновременно положительны (знаки «+» и «–»

на рис. 3.11) или одновременно отрицательны, что и соответствует одинаковому выбору их условных положительных направлений, т. е. одинаковому направлению стрелок. Это соответствует также тому, что всегда мощность $p_r = u_r i > 0$.

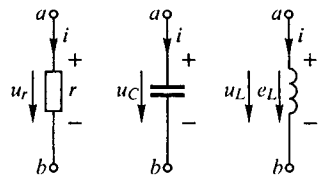


Рис. 3.11

Для конденсатора имеем связь $u_{ab} = q_a/C$, так как *для того чтобы было* $C > 0$, как сказано в § 1.8, необходимо брать заряд той пластины, от которой отсчитывается напряжение, т. е.

$$C = \frac{q_a}{u_a - u_b} = \frac{q_b}{u_b - u_a}.$$

Согласно этой связи, величины u_{ab} и q_a — одного знака. Пусть в некоторый момент времени ток имеет действительное направление от зажима a к зажиму b, т. е. $i_{ab} > 0$. Пусть конденсатор заряжается, т. е. $q_a > 0$ (знаки «+» и «–» на рис. 3.11), а следовательно, и $u_C = u_{ab} > 0$, что соответствует выбору условных положительных направлений i и u_C, т. е. выбору стрелок, в одном направлении. Это соответствует также тому, что при зарядке конденсатора энергия поступает в него и мощность на его зажимах положительна: $p_C = u_C i > 0$.

Для катушки имеем связь $u_L = +L\dfrac{di}{dt}$, причем всегда $L > 0$, так как $L = \Psi_L/i$, а поток самоиндукции Ψ_L и ток в катушке i всегда одного знака — направление тока и направление линий потока самоиндукции связаны между собой правилом правого винта. Если ток имеет действительное направление от зажима a к зажиму b, то $i_{ab} > 0$. Пусть при этом ток возрастает, т. е. $di/dt > 0$, тогда $u_L = u_{ab} > 0$ (знаки «+» и «–» на рис. 3.11).

Таким образом, и для катушки, выбрав связь $u_L = +L\dfrac{di}{dt}$, мы тем самым выбираем условные положительные направления тока i и напряжения u_L, т. е. направления их стрелок, в одну сторону. Все это соответствует также тому, что при возрастании положительного тока, т. е. при возрастании абсолютного значения тока, увеличивается энергия магнитного поля в катушке и мощность на ее зажимах положительна: $p_L = u_L i > 0$.

Условное положительное направление для ЭДС e_L следует принимать таким же, как и для u_L, так как при этом в соответствии со связью $e_L = -u_L = -L\dfrac{di}{dt}$ всегда действительные направления e_L и u_L будут противоположны, т. е. если, например, действительное направление величины u_L на зажимах катушки будет по ее стрелке (от «+» к «–» на рис. 3.11), то действительное направление величины e_L в катушке в тот же момент времени окажется против ее стрелки (от «–» к «+» на рис. 3.11). Напряжение u_L, как было разъяснено в предыдущем параграфе, следует брать по пути между зажимами катушки *вне* ее магнитного поля, например от зажима c к зажиму d по пути cmd на рис. 3.10.

Рассмотрим теперь взаимную индуктивность M между двумя контурами. Важно иметь в виду, что если для всякого электрического контура $L > 0$, то вза-

имная индуктивность M может быть как положительной, так и отрицательной и, в частности, равной нулю, так как знаки потоков взаимной индукции зависят при выбранных положительных направлениях токов в контурах также еще и от взаимного расположения контуров. Положительные направления токов в обоих контурах всегда можно выбрать произвольно. Поскольку эти направления выбраны, то величину M мы должны считать положительной, когда при положительных токах потоки взаимной индукции, сцепляющиеся с контурами, оказываются также положительными, т. е. совпадают по знаку с потоками самоиндукции. Иными словами, $M > 0$, *если при положительных токах магнитные потоки в контурах направлены согласно, и* $M < 0$, *если при положительных токах потоки направлены встречно.*

При этих условиях, исходя из принятых в § 1.11 выражений для ЭДС взаимной индукции $e_{1M} = -M_{12}\frac{di_2}{dt}$ и $e_{2M} = -M_{21}\frac{di_1}{dt}$ и принимая связи между напряжениями и ЭДС в виде $u_{1M} = -e_{1M} = +M\frac{di_2}{dt}$ и $u_{2M} = -e_{2M} = +M\frac{di_1}{dt}$ (с учетом, что $M_{12} = M_{21} = M$), мы должны условные положительные направления для этих величин принять такими же, как и для u_{1M} и u_{2M}, т. е. совпадающими с условными положительными направлениями токов i_1 и i_2, что и показано стрелками на рис. 3.12.

Часто вместо этого маркируют один из зажимов каждой катушки жирной точкой (•) (рис. 3.12). Это значит, что если положительное направление тока в обмотке одной из катушек принято от точки, то и положительное направление напряжения на зажимах другой катушки и ЭДС взаимной индукции в ней также принимается от точки.

Соответственно выбранным положительным направлениям токов i_1 и i_2 или соответственно выбранной маркировке точками должен быть задан знак взаимной индуктивности, например $M = +0{,}5$ Гн или $M = -0{,}5$ Гн.

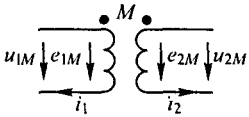


Рис. 3.12

Мы будем стремиться, как правило, выбирать положительное направление токов i_1 и i_2 и маркировку точками согласованными между собой, как это сделано на рис. 3.12. При этом то и другое обозначения взаимно заменяют друг друга. Если бы в особых случаях выбор положительных направлений токов оказался не согласованным с маркировкой точками, а знак M мы по-прежнему связали бы с маркировкой точками, то это значило бы, что надо писать

$$u_{1M} = -e_{1M} = -M\frac{di_2}{dt} \text{ и } u_{2M} = -e_{2M} = -M\frac{di_1}{dt}.$$

3.8. Источники ЭДС и источники тока

Источники энергии в электрических цепях принято рассматривать как и с т о ч н и к и ЭДС или как и с т о ч н и к и т о к а. К источникам ЭДС обычно относят источники электромагнитной энергии, в которых ЭДС e не зависит или практически не зависит от тока, идущего от источника в приемник, и внутреннее сопротивление $r_{вн}$ которых мало, так что напряжение $u = e - ir_{вн}$ на зажимах источника

сравнительно мало изменяется в пределах изменения тока от нуля до номинального $i_{ном}$. На рис. 3.13 приведена так называемая *внешняя характеристика*, т. е. зависимость $u = f(i)$, такого источника при e = const и $r_{вн}$ = const. Она представляет собой прямую линию. Линейная цепь должна содержать только источники ЭДС с такой линейной характеристикой. Если $r_{вн} = 0$ и e = const, то $u = e$ = const, и такой источник будем называть идеальным источником ЭДС. Если у реального источника, имеющего $r_{вн} \neq 0$, условно вынести его внутреннее сопротивление, то получим условное изображение источника ЭДС, приведенное на рис. 3.14, *а*. Необходимо указать стрелкой положительное направление ЭДС e. В общем случае это есть условное положительное направление ЭДС, так как ЭДС может быть переменной, например периодической, величиной. Если теперь отнести $r_{вн}$ к приемнику, добавив его к сопротивлению приемника (рис. 3.14, *б*), то цепь будет рассматриваться как содержащая идеальный источник ЭДС.

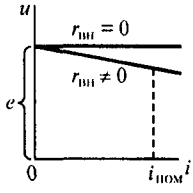


Рис. 3.13

В случае когда характеристика $u = f(i)$ криволинейна, что может быть, если величина e нелинейно зависит от i или когда $r_{вн}$ зависит от i, цепь, содержащая такой источник, является нелинейной цепью. Во второй части, посвященной теории линейных электрических цепей, будем предполагать, что источники ЭДС обладают линейной характеристикой. Источниками ЭДС в указанном смысле являются, например, аккумуляторы, гальванические элементы, вращающиеся электрические генераторы постоянного тока.

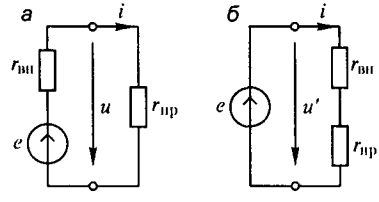


Рис. 3.14

К источникам тока обычно относят источники электромагнитной энергии, в которых ток не зависит или практически не зависит от напряжения u, которое создается источником на зажимах приемника. Условимся в дальнейшем заданный ток источника тока обозначать буквой $\mathfrak{I}$, чтобы отличать его от токов i в приемнике и в различных его участках. Это будет соответствовать принятому отличию обозначения заданной ЭДС e источника ЭДС от обозначения напряжения u на зажимах приемника и на его различных участках. Предполагается, что источник тока имеет достаточно малую внутреннюю проводимость $g_{вн}$, так что ток $i = \mathfrak{I} - ug_{вн}$, поступающий в приемник, мало изменяется в пределах изменения напряжения u от нуля до номинального $u_{ном}$. На рис. 3.15 показана внешняя линейная характеристика $i = f(u)$ источника тока при $\mathfrak{I}$ = const и $g_{вн}$ = const. Здесь же приведена *характеристика идеального источника тока*, имеющего $\mathfrak{I}$ = const и $g_{вн} = 0$, при котором $i = \mathfrak{I}$ = const.

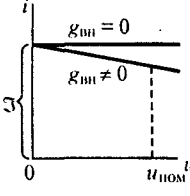


Рис. 3.15

Если условно вынести проводимость $g_{вн}$, то получим условное изображение источника тока, приведенное на рис. 3.16, *а*. Необходимо указать стрелкой условное положительное направление тока $\mathfrak{I}$. Если отнести проводимость $g_{вн}$ к приемнику, добавив ее к проводимости $g_{пр}$ приемника (рис. 3.16, *б*), то цепь будет рассматриваться как содержащая идеальный источник тока. При изучении

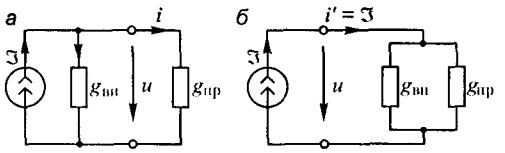


Рис. 3.16

теории линейных цепей будем предполагать, что источники тока обладают линейной характеристикой. Источниками тока в указанном смысле являются, например, источники энергии, основанные на излучении заряженных частиц, выделяющихся при радиоактивном распаде вещества, так как при этом ток источника определяется скоростью распада.

Важными разновидностями источников ЭДС и тока являются зависимый источник ЭДС и зависимый источник тока. Зависимым источником электродвижущей силы называют такой источник, в котором ЭДС зависит от тока или напряжения в некотором участке цепи. Часто такие источники также называют управляемыми. Если значение ЭДС источника зависит от тока (или напряжения), то говорят, что такой источник управляем током (или напряжением).

Аналогично источник тока, в котором ток зависит от тока или напряжения в некотором участке цепи, называют зависимым источником тока. Если значение тока источника зависит от напряжения (или тока), то говорят, что такой источник управляем напряжением (или током).

При задании значений ЭДС или тока зависимых источников должны быть одновременно даны коэффициенты пропорциональности между управляемыми и управляющими величинами при их заданных условно-положительных направлениях и месторасположение управляющей величины.

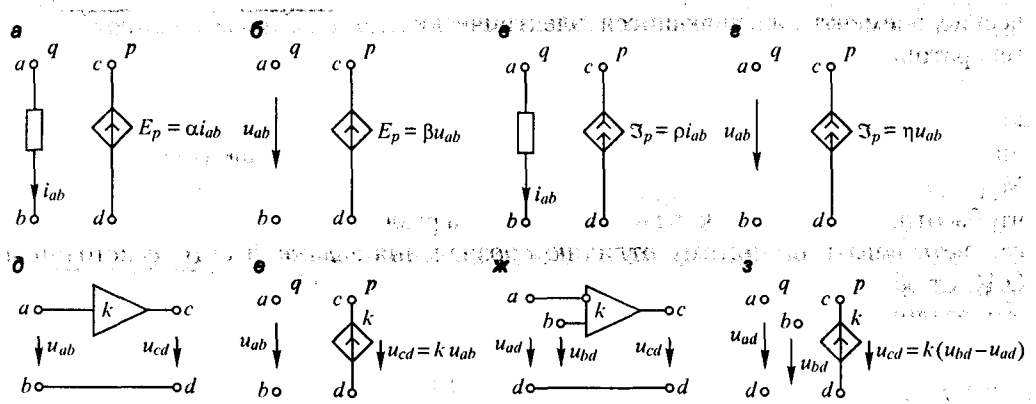


Рис. 3.17

На рис. 3.17 показаны различные зависимые источники: зависимый источник ЭДС, управляемый током (рис. 3.17, *а*) или напряжением (рис. 3.17, *б*); зависимый источник тока, управляемый током (рис. 3.17, *в*) или напряжением (рис. 3.17, *г*). На рис. 3.17 коэффициент α имеет размерность сопротивления, коэффициенты β, ρ — безразмерные величины, а коэффициент η имеет размерность проводимости. При изменении условно-положительного направления управляющего тока или управляющего напряжения при сохранении направле-

ния ЭДС или тока источника следует менять знаки у α, β, ρ и η или все зависимости записать со знаком минус. Например, пусть ЭДС зависимого источника направлена, как показано на рис. 3.17, *а*. Если ток в ветви *q* направлен от *b* к *a*, то для ЭДС в ветви *p* будем иметь выражение $E_p = -\alpha i_{ba}$ или $E_p = (-\alpha) i_{ba}$.

Примером зависимого источника может служить операционный усилитель, в котором входной и выходной величинами являются напряжения u_{ab} и u_{cd} (рис. 3.17, *д*). Эквивалентная схема операционного усилителя, который имеет бесконечно большое входное и пренебрежимо малое выходное сопротивления, показана на рис. 3.17, *е*. В случае, когда полярности напряжений на входе и выходе усилителя противоположны, коэффициент усиления принимается равным $-k$, и такой усилитель называют инвертирующим.

На входе операционного усилителя может действовать несколько напряжений, а некоторые из них могут быть подключены к так называемому инвертирующему входу (рис. 3.17, *ж*). Операционный усилитель с двумя входами, один из которых является инвертирующим, представлен эквивалентной схемой, показанной на рис. 3.17, *з*. В этом случае $u_{cd} = k(u_{bd} - u_{ad})$.

3.9. Схемы электрических цепей

Электрическую цепь на чертежах изображают в виде схемы, под которой понимают графическое изображение электрической цепи, содержащее условные обозначения ее элементов и показывающее соединения этих элементов. Например, на рис. 3.18 представлена электрическая схема цепи, в которую входят следующие устройства: генератор переменного тока *1*, трансформаторы *2* и *5*, линии электропередачи *3* и *4*, преобразователь переменного тока в постоянный *6*, нагрузка *7*.

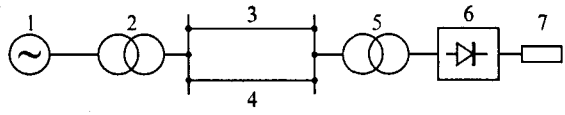


Рис. 3.18

Исследование процессов в электрической цепи требует знания связей между токами и напряжениями отдельных ее участков. Эти связи могут быть определены в виде математических соотношений (например, вида $u = ri$, $u_L = +L\frac{di}{dt}$ и др.). Они могут быть заданы и в виде вольт-амперных или иных характеристик.

Как правило, задание связей в виде вольт-амперных или иных характеристик — результат либо невозможности математического описания процессов в данном устройстве, либо сложности решения полевых уравнений, либо незнания внутренней структуры устройства. В таких случаях единственным способом получения и описания характеристик устройства остается опыт, при помощи которого могут быть измерены интересующие нас токи, напряжения, заряды, потокосцепления и построены соответствующие характеристики. При наличии таких характеристик можно с тем или иным приближением описать их в виде математических связей, чтобы иметь возможность выполнить аналитическое

исследование процессов в цепи. Разумеется, такой переход в общем случае не нужен, если анализ процессов в цепи производится численными методами.

Записанные в аналитической форме соотношения между токами, напряжениями, зарядами, потокосцеплениями элемента электрической цепи являются математической моделью этого элемента. Так, например, $u = ri$ есть математическая модель резистора; $u_L = d\Psi/dt$ — математическая модель идеальной индуктивной катушки; $u = ri + d(Li)/dt$ — приближенная математическая модель либо реальной катушки при условии пренебрежения токами смещения между витками катушки, либо цепи, содержащей резистор и идеальную индуктивную катушку, включенные последовательно.

И наоборот, математическим соотношениям, приведенным выше, могут быть поставлены в соответствие электрические цепи, содержащие идеальные индуктивные катушки и резисторы.

Условные изображения таких основных идеализированных элементов электрической цепи, каковыми являются резистор, конденсатор, индуктивная катушка, катушки с индуктивной связью, источники ЭДС и тока, были приведены на рис. 3.11, 3.12, 3.14, 3.16.

Математическим соотношениям между токами, напряжениями, потокосцеплениями, зарядами и другими величинами, следовательно, могут быть поставлены в соответствие электрические цепи, содержащие только идеализированные элементы r, L, C, M, E, $\mathfrak{I}$ и др. Очевидно, схемы таких цепей и сами цепи тождественны, так как каждому элементу схемы соответствует единственный элемент идеализированной цепи.

Таким образом, для расчета процессов в электрической цепи следует определить математические соотношения для отдельных участков исходной цепи, по этим соотношениям построить некую другую цепь, анализ процессов в которой заменит анализ процессов в исходной реальной цепи.

Схему этой другой электрической цепи, отображающей при определенных условиях свойства реальной цепи, называют *схемой замещения электрической цепи* или кратко — *схемой замещения*.

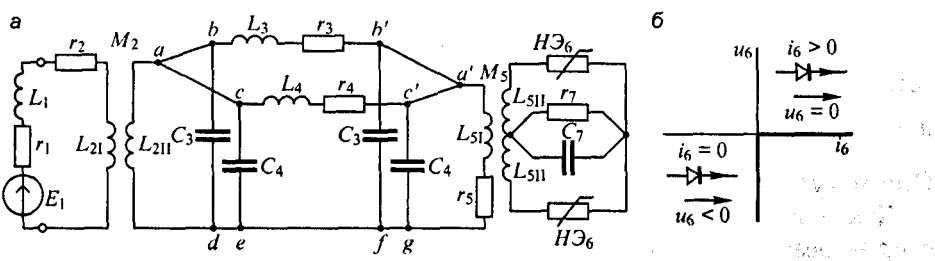


Рис. 3.19

Рассмотрим в качестве примера электрическую цепь, схема которой изображена на рис. 3.18. Можно составить некоторую схему замещения (рис. 3.19) этой цепи, если принять во внимание соображения, приведенные в § 3.2–3.8. Пусть источником энергии служит конструкция (генератор), описанная в § 4.1 (см. рис. 4.2 и 4.3). Такой генератор является источником периодической ЭДС. Если

частота этой ЭДС, а следовательно, и токов в цепи достаточно низка, то можно приближенно пренебречь токами смещения между витками обмотки генератора и представить эту обмотку в виде индуктивной катушки и резистора, являющегося активным сопротивлением обмотки генератора. Электродвижущую силу, индуцируемую в обмотке статора за счет вращения магнитного поля ротора, представим идеальным источником ЭДС. Таким образом, схема замещения генератора будет состоять из трех идеальных элементов: E_1, L_1 и r_1 (рис. 3.19, *а*). Эти три элемента должны быть соединены последовательно, так как и энергия магнитного поля $Li^2/2$, и потери энергии i^2r в проводниках обмотки, и напряжение ir определяются током в обмотке. Трансформаторы *2* и *5* могут быть представлены в виде двух индуктивно-связанных катушек (L_{2I}, L_{2II} и M_2 для трансформатора *2* и, соответственно, L_{5I}, L_{5II} и M_5 для трансформатора *5*), если пренебречь потерями энергии в ферромагнитных элементах конструкции трансформатора и нелинейными свойствами ферромагнитного материала (подробнее см. ч. III, § 3.9). Резистор r_2 является активным сопротивлением обмотки трансформатора *2*. Линии передачи *3* и *4* для данной частоты даны в виде совокупности элементов r, L и C, которые включены в схему замещения линии исходя из следующих соображений. Путь тока в линии и связанные с ним энергия магнитного поля и потери энергии представлены в виде последовательно соединенных элементов L_3, r_3 и L_4, r_4. Наличие энергии электрического поля, которая определяется напряжением линии, учитывается двумя конденсаторами (C_3 для линии *3* и C_4 для линии *4*), включенными в начале и в конце линии. Можно было включить и один конденсатор либо в начале, либо в конце линии. Естественно, что при этом должны быть скорректированы параметры L и r линии для того, чтобы оставить неизменными потери энергии в линии и разность напряжений в начале и в конце линии. Именно эти величины взяты в качестве определяющих, так как для характеристик линии экономически важны значение потерь в линии и падение напряжения на линии. Разумеется, такая простая схема замещения линии не учитывает распределенный характер параметров r, L и C линии (подробнее этот вопрос будет рассмотрен в т. II, гл. 17 и 18).

Преобразование переменного тока в постоянный производится при помощи использования особых свойств нелинейных элементов $НЭ_6$ (в данном случае диодов), вольт-амперная характеристика которых приведена на рис. 3.19, *б*. Благодаря такой ВАХ происходит выпрямление переменного тока. Нагрузка представлена резистором r_7 и конденсатором C_7. Наличие конденсатора C_7 дает возможность улучшить форму кривой тока в резисторе, уменьшая ее пульсации.

Приведенная на рис. 3.19, *а* схема замещения электрической цепи, схема которой дана на рис. 3.18, является приближенной в пределах тех допущений, которые сделаны при представлении схем замещений отдельных устройств, входящих в состав цепи.

Для каждого элемента схемы рис. 3.19, *а* могут быть записаны в аналитическом или графическом виде соотношения между токами, напряжениями, зарядами и потокосцеплениями. Составление математических соотношений, а следовательно, и схем замещений является специфической для инженера задачей, решение которой требует глубокого понимания особенностей электромагнитных

процессов, умения решать в общем случае задачи исследования распределения электромагнитного поля.

В дальнейшем, если не сделаны специальные оговорки, будем употреблять термин «электрическая цепь» применительно к цепи с идеализированными элементами, электрическая схема и схема замещения которой тождественны.

Электрическая цепь и, соответственно, ее схема имеют в общем случае ветви и узлы.

Ветвью электрической цепи и, соответственно, ее схемы называют весь участок электрической цепи, в котором в любой момент времени ток имеет одно и то же значение вдоль всего участка.

Ветвь может содержать любое число последовательно соединенных элементов цепи: участков с сопротивлением, конденсаторов, индуктивных катушек, источников ЭДС. При этом *последовательным соединением участков электрической цепи называют соединение, при котором через все участки цепи проходит один и тот же ток.*

Примером схемы цепи с последовательным соединением участков является схема, изображенная на рис. 3.14.

Узлом электрической цепи и, соответственно, ее схемы называют место соединения ветвей. На схеме узел изображают точкой.

Параллельным соединением участков (ветвей) электрической цепи называют соединение, при котором все участки (ветви) цепи присоединяются к одной паре узлов и на всех этих участках (ветвях) имеется одно и то же напряжение. Примером схемы цепи с параллельным соединением участков является схема, изображенная на рис. 3.16.

Смешанным соединением участков электрической цепи называют сочетание последовательного и параллельного соединений.

Более сложные электрические цепи могут не сводиться к последовательному и параллельному соединению участков (пример — схемы цепей на рис. 3.23, *а* и 3.22, *а*).

Электрическую цепь называют плоской (планарной), если она может быть изображена на плоскости в виде схемы с непересекающимися ветвями. Пример схемы плоской цепи дан на рис. 3.23, *а*; на рис. 3.22, *а* изображена неплоская (непланарная) цепь.

Контуром электрической цепи называют любой замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям. Пример — контур *abca* на рис. 3.22, *а*.

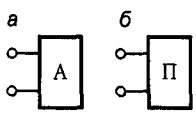


Рис. 3.20

В заключение отметим, что *любая часть электрической цепи, имеющая два зажима (полюса), называется двухполюсником.* Двухполюсник условно на схеме изображают прямоугольником с двумя выводами (рис. 3.20). Рассмотрение целой части как одного двухполюсника полезно при выяснении общих свойств этих частей цепи. Различают активные (рис. 3.20, *а*) и пассивные (рис. 3.20, *б*) двухполюсники.

Активным называют двухполюсник, содержащий источники электрической энергии. Для линейного двухполюсника обязательным дополнительным условием является наличие на его разомкнутых зажимах напряжения, обусловленного источниками электрической энергии внутри двухполюсника, т. е. необхо-

димо, чтобы действия этих источников энергии не компенсировались взаимно внутри двухполюсника.

Пассивным называют двухполюсник, не содержащий источников электрической энергии. Линейный двухполюсник может содержать источники электрической энергии, взаимно компенсирующиеся таким образом, что напряжение на его разомкнутых зажимах равно нулю.

Оговорка о возможности наличия взаимно компенсирующихся источников, при которых двухполюсник остается пассивным, необходима, так как сама идея представления целой части цепи как двухполюсника заключается в рассмотрении общих свойств этой части цепи лишь со стороны ее входных зажимов. Эта оговорка относится исключительно к линейным цепям, потому что в нелинейных цепях такая компенсация может быть только для одного или только для нескольких определенных режимов и не будет иметь места для других режимов, так как параметры нелинейной цепи зависят от тока или напряжения.

В гл. 13, т. II введем аналогично понятие четырехполюсника как обобщенного элемента цепи.

3.10. Топологические понятия схемы электрической цепи. Граф схемы

В электрических схемах цепи или в схемах замещения узлы изображаются точками. В сложных схемах, где возможны взаимные пересечения линий, изображающих соединительные провода, для обозначения существования их электрических соединений также используются точки (например, точки a, b, c, d, e, f, g, a', b', c' на рис. 3.19, *а*). Формально все эти точки также можно считать узлами схемы. Особенность таких мнимых узлов заключается в том, что они соединены участками цепи, где протекают токи и нет напряжений, так как сопротивление таких участков считаем равным нулю. По этой причине потенциалы таких узлов равны, и их можно изобразить одним узлом, несколько видоизменив схему. На рис. 3.19, *а* можно объединить узлы a, b, c в один, b', a', c' — в другой и d, e, f, g — в третий (рис. 3.21).

Чтобы сделать более наглядным изображение взаимных соединений ветвей схемы, целесообразно ввести в рассмотрение такое изображение схемы электрической цепи, в котором ветви схемы представлены отрезками — ветвями графа, а узлы — точками — узлами графа. Такое топологическое представление схемы электрической цепи носит название граф электрической схемы или короче — граф схемы.

Заметим, что на топологической схеме источники ЭДС и тока не изображаются. При этом ветвь с источником ЭДС сохраняется. Ветви же с идеальными источниками тока вообще не входят в топологическую схему, так как внутренняя проводимость таких источников равна нулю и, соответственно, сопротивление таких ветвей бесконечно велико.

Граф, между любой парой узлов которого имеется ветвь или совокупность ветвей, называют связным.

Если на графе имеется указание условно-положительных направлений токов или напряжений в виде отрезков со стрелками, то такой граф называют направленным графом схемы.

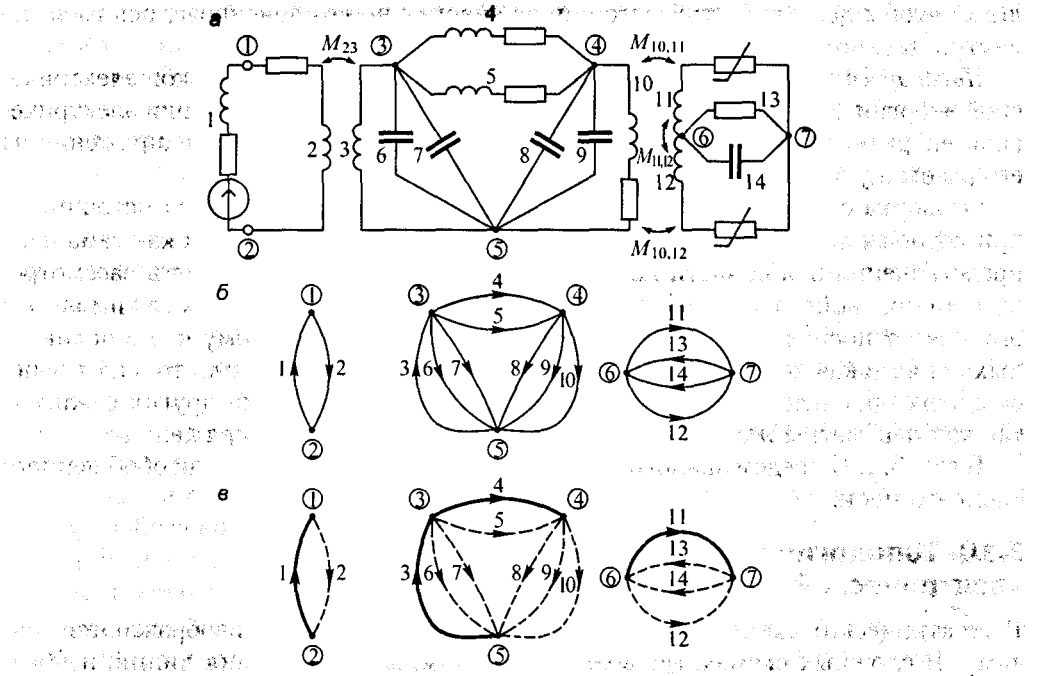


Рис. 3.21

Направленный граф схемы (рис. 3.21, *а*) представлен на рис. 3.21, *б*. Можно заметить, что вследствие особенности учета ЭДС взаимной индукции граф схемы (рис. 3.21, *а*) распадается на три раздельные, т. е. несвязанные, части.

Условимся впредь на графе схемы узлы нумеровать числами в кружках, стоящих у соответствующих узлов, а ветви — числами без кружков. На графе схемы (рис. 3.21, *б*) имеем 7 узлов и 14 ветвей.

Важным топологическим понятием графа схемы является дерево графа схемы, представляющее собой любую совокупность ветвей графа, соединяющих все узлы графа без образования контуров. Один и тот же граф схемы может иметь различные деревья. Условимся ветви графа схемы, образующие дерево, изображать жирными линиями.

Ветви, дополняющие дерево графа до полного графа и, следовательно, не принадлежащие дереву графа, принято называть связями графа схемы. Условимся такие ветви изображать пунктирными, либо тонкими линиями. Очевидно, что каждому дереву графа схемы соответствует своя совокупность связей графа схемы, называемая ко-графом схемы, или дополняющим графом схемы. Например, для графа рис. 3.22, *б* в дополняющий граф войдут ветви (связи графа), соединяющие узлы *ab*, *bf*, *fd*, *da*, *fa* и *bd*. На рис. 3.21, *в* выделено одно из множества возможных деревьев графа схемы.

На рис. 3.22 приведены электрическая схема (*а*) и граф этой схемы с двумя различными деревьями графа схемы (*б* и *в*).

Если связный граф имеет p ветвей и q узлов, то в его дереве будет $q - 1$ ветвей, а число связей окажется равным $n = p - (q - 1)$. Эти утверждения вытекают

из самих определений дерева и связей графа схемы, так как q узлов схемы могут быть соединены минимум $q - 1$ ветвями дерева, а к связям отнесены все остальные $p - (q - 1)$ ветвей графа схемы. Например, в отдельных частях несвязного графа схемы, изображенного на рис. 3.21, *в*, имеем: в левой части графа $p = 2$, $q = 2$, $n = 2 - (2 - 1) = 1$; в средней части $p = 8$, $q = 3$, $n = 8 - (3 - 1) = 6$; в правой части $p = 4$, $q = 2$, $n = 4 - (2 - 1) = 3$.

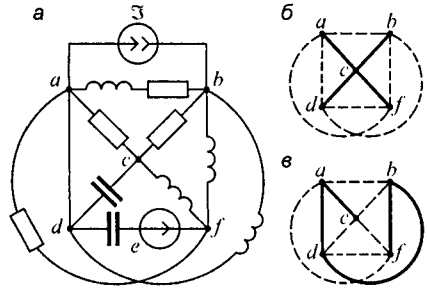


Рис. 3.22

Заметим, что этих соотношений нет для графа схемы в целом. Действительно, для всего графа схемы имеем $p = 14$, $q = 7$ и $n = 14 - (7 - 1) = 8$, в то время как число связей равно $1 + 6 + 3 = 10$. Для не связанных в топологическом смысле (однако связанных электромагнитными или другими явлениями) графов схемы число связей равно $n = p - (q - 1) + N - 1 = p - q + N$, где N — число отдельных топологически не связанных частей графа схемы. В данном случае $N = 3$, и поэтому $n = 14 - (7 - 1) + 3 - 1 = 10$. Для схемы рис. 3.22 имеем $p = 10$, $q = 5$ и $n = 6$.

3.11. Матрица узловых соединений

Изображение электрической схемы графом схемы дает возможность представить ее в виде некоторой таблицы. Составим эту таблицу следующим образом. Разделим таблицу по горизонтали на q строк согласно числу узлов графа. Разделим таблицу по вертикали на p столбцов согласно числу ветвей графа схемы. Пронумеруем строки таблицы согласно номерам узлов, а столбцы — согласно номерам ветвей. Условимся нумеровать ячейки этой таблицы двойным индексом (j, k). Здесь и впредь первый индекс указывает номер строки таблицы, а второй — номер столбца. Заполним эту таблицу, соблюдая следующие правила. Запишем в ячейку jk величину $+1$, если k-я ветвь соединена с j-м узлом и стрелка ветви графа направлена от j-го узла. Запишем в ячейку jk величину -1, если k-я ветвь соединена с j-м узлом и стрелка ветви графа направлена к j-му узлу. Ячейку jk оставим пустой (условно можно считать, что все пустые ячейки заполнены нулями), если k-я ветвь не соединена с j-м узлом. При соблюдении этих правил для схемы, изображенной на рис. 3.23, *а*, таблица ее графа (рис. 3.23, *б*, *в*) будет иметь вид

Ветви

Узлы	1	2	3	4	5	6
1	1		1			−1
2	−1	1		−1		
3			−1	1	−1	
4		−1			1	1

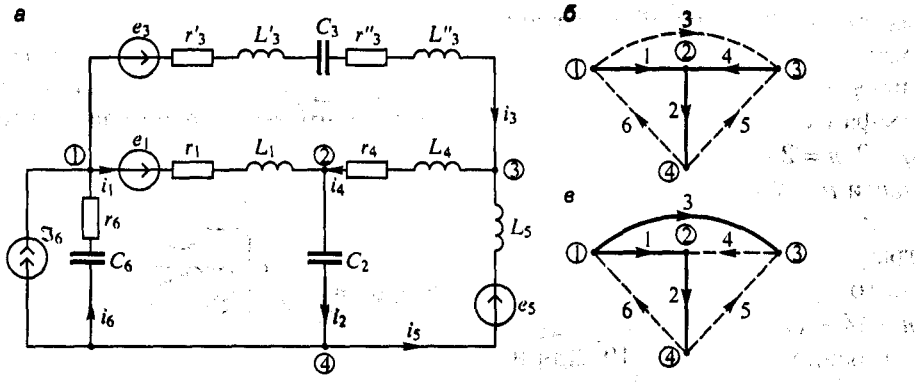


Рис. 3.23

Номера строк, набранные полужирным шрифтом, соответствуют номерам узлов.

Отметим некоторые характерные особенности этой таблицы. В каждом столбце могут быть только две ненулевые (не пустые) ячейки, так как каждая ветвь может быть соединена только с двумя узлами. Сумма чисел ячеек каждого столбца равна нулю, так как стрелка каждой ветви будет направлена от одного узла к другому и, следовательно, в одной ячейке будем иметь +1, а в другой — обязательно −1. Имея в виду это обстоятельство, можно заполнить только $q - 1$ строк таблицы, так как q-я строка всегда может быть восстановлена таким образом, чтобы сумма чисел каждого столбца стала равной нулю. Таблице соединений можно придать смысл математической величины — матрицы.

Назовем матрицей узловых соединений прямоугольную матрицу, строки которой соответствуют узлам без одного, а столбцы — ветвям направленного графа электрической схемы, элементы которой равны нулю, единице или минус единице, если данная ветвь, соответственно, не соединена с данным узлом, направлена от данного узла, направлена к данному узлу.

Обозначим матрицу узловых соединений жирной буквой **A**. Для графа схемы (рис. 3.23) имеем

$$\mathbf{A} = \|a_{jk}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix} =$$

	1	2	3	4	5	6
1	1		1			−1
2	−1	1		−1		
3			−1	1	−1	

$= \quad q - 1$ строк

p столбцов

Матрица узловых соединений имеет порядок $(q-1)\times p$, который определяется числом строк матрицы $(q-1)$ и числом столбцов матрицы (p). Условную запись $(q-1)\times p$ не следует путать с умножением чисел. Например, порядок матрицы узловых соединений графа схемы (рис. 3.23) равен 3×6, но не равен $3\cdot 6 = 18$. Элементы матрицы обозначим буквой a_{jk}. Согласно определению матрицы **A**, имеем $a_{jk}=1$, или $a_{jk}=-1$, или $a_{jk}=0$.

Если при построении таблицы соединений строкам поставить в соответствие ветви графа схемы, а столбцам — узлы, то соответствующая такой таблице матрица будет транспонированной матрицей **A**. Обозначим такую транспонированную матрицу через $\mathbf{A}^t$. Для графа схемы (рис. 3.23) имеем

$$\mathbf{A}^t = \|a_{jk}\|^t = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} =$$

	1	2	3
1	1	−1	
2		1	
3	1		−1
4		−1	1
5			−1
6	−1		

3.12. Законы электрических цепей

При расчете электрических цепей используются два закона Кирхгофа. Рассмотрим их в применении к цепи с сосредоточенными параметрами.

Первый закон Кирхгофа, или закон Кирхгофа для узлов, применительно к узлам электрической цепи вытекает из принципа непрерывности электрического тока (см. § 1.7). Охватим узел цепи замкнутой поверхностью s (рис. 3.24). В соответствии с принятыми допущениями вся электрическая емкость в цепи с сосредоточенными параметрами предполагается сосредоточенной в конденсаторах, включенных в цепь. Это соответствует пренебрежению токами электрического смещения, отходящими от соединительных проводов к другим участкам цепи. Таким образом, сквозь замкнутую поверхность s проходят только токи проводимости в проводниках, пересекающих эту поверхность. Согласно принципу непрерывности тока, в данном случае получаем

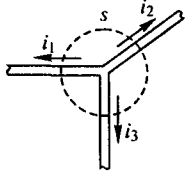


Рис. 3.24

$$\oint_s \boldsymbol{J}\,d\boldsymbol{s} = i_1 + i_2 + i_3 = 0.$$

При любом числе n ветвей, присоединенных к узлу цепи, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0,$$

т. е. *сумма токов, расходящихся от узла электрической цепи, равна нулю*, что и является формулировкой первого закона Кирхгофа.

При составлении уравнений согласно первому закону Кирхгофа необходимо задаться условно-положительными направлениями токов во всех ветвях, обозначив их на схеме стрелками. В левой части уравнения следует ставить знак «плюс» перед буквенными обозначениями токов, положительное направление которых принято от узла, и знак «минус» перед буквенными обозначениями токов, положительное направление которых принято к узлу. Для случая на рис. 3.24 перед всеми токами в уравнении следует поставить знак «плюс», как это написано выше. В случае же, представленном на рис. 3.25, следует писать

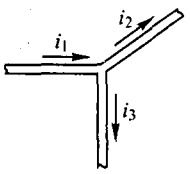


Рис. 3.25

$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0.$$

Если в результате расчета будет получено для некоторого тока в некоторый момент времени положительное число ($i_k > 0$), то это значит, что ток имеет в данный момент времени действительное направление согласно стрелке. Если же будет получено $i_k < 0$, то этот ток в действительности направлен против стрелки.

Второй закон Кирхгофа, или закон Кирхгофа для контуров, применяется к контурам электрической цепи. Он вытекает из полученного в § 1.12 соотношения

$$\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = \oint \boldsymbol{E}_{\text{инд}}\, d\boldsymbol{l} + \oint \boldsymbol{E}_{\text{стор}}\, d\boldsymbol{l}.$$

Величина $\oint \boldsymbol{E}_{\text{стор}}\, d\boldsymbol{l}$ равна сумме ЭДС $\sum e_{\text{стор}}$ сторонних источников, действующих в контуре. Величина $\oint \boldsymbol{E}_{\text{инд}}\, d\boldsymbol{l}$ включает в себя все индуцированные в контуре ЭДС — как ЭДС генераторов, действующих на принципе электромагнитной индукции, так и ЭДС самоиндукции и взаимной индукции, индуцируемых в катушках, включенных в контур. Например, для катушки $e_L = -L\dfrac{di}{dt}$. Если условиться справа в величину $\oint \boldsymbol{E}_{\text{инд}}\, d\boldsymbol{l}$ включать только сумму $\sum e_{\text{инд}}$ ЭДС генераторов, рассматриваемых как источники энергии, то ЭДС самоиндукции и взаимной индукции, индуцируемые в катушках, должны быть перенесены в левую часть уравнения и учтены в величине $\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l}$ как падения напряжения на зажимах катушек. Например, для катушки слева появится член $u_L = +L\dfrac{di}{dt}$. Слева в величину $\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l}$ входят также падения напряжения ri на сопротивлениях, входящих в контур, и падения напряжения $u_C = q/C$ на содержащихся в контуре конденсаторах. Обозначив сумму ЭДС источников энергии, действующих во всех n ветвях контура, в виде

$$\sum_{k=1}^{k=n} e_k = \sum_{k=1}^{k=n} e_{k\,\text{стор}} + \sum_{k=1}^{k=n} e_{k\,\text{инд}},$$

будем иметь

$$\sum_{k=1}^{k=n} u_k = \sum_{k=1}^{k=n} e_k.$$

Итак, второй закон Кирхгофа гласит: *сумма падений напряжения во всех ветвях любого замкнутого контура электрической цепи равна сумме ЭДС источников энергии, действующих в этом контуре.*

Если в k-й ветви содержатся в общем случае участок с активным сопротивлением r_k, катушка с индуктивностью L_k и конденсатор с емкостью C_k (рис. 3.26, *а*), то падение напряжения вдоль всей этой ветви будет складываться из падений напряжений u_{rk}, u_{Lk} и u_{Ck} на этих элементах, т. е. $u_k = u_{rk} + u_{Lk} + u_{Ck}$. Согласно полученным в § 3.6 выражениям, для этих падений напряжений можем написать

$$u_k = r_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{q_k}{C_k} = r_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k}\int_0^t i_k dt + u_{Ck}(0).$$

Для составления уравнений согласно второму закону Кирхгофа должны быть заданы положительные направления токов i_k и ЭДС e_k источников энергии во всех ветвях. Положительные направления падений напряжений u_k считаем совпадающими с положительными направлениями токов i_k. Выбрав затем некоторое направление обхода контура, мы должны при составлении суммы падений напряжений $\sum_{k=1}^{n} u_k$ и суммы ЭДС $\sum_{k=1}^{n} e_k$ ставить перед буквенными обозначениями величин u_k и e_k знак «плюс», если положительное направление этих величин совпадает с направлением обхода контура, и знак «минус» — в противоположном случае.

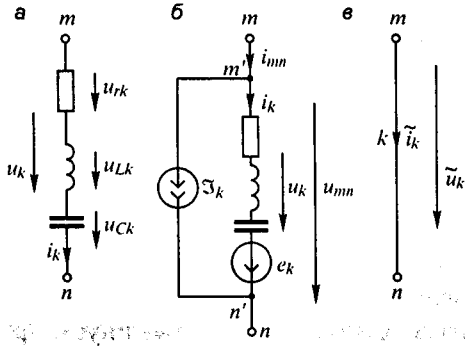


Рис. 3.26

В электрических цепях с сосредоточенными параметрами второй закон Кирхгофа может быть записан и для контура, который проходит от одного узла к другому по окружающему участки электрической цепи пространству. Вследствие научных абстракций, принятых при построении теории электрических цепей с сосредоточенными параметрами, мы должны принять во внимание, что в этом окружающем пространстве отсутствуют магнитные и сторонние поля и, следовательно, равны нулю ЭДС $e_{стор}$ и $e_{инд}$. При таком выборе контура обхода мы должны писать

$$\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = \sum u_{mn} = 0,$$

где u_{mn} — напряжение между узлами m и n.

Заметим, что интеграл имеет смысл, если полагать, что и в цепях с сосредоточенными параметрами во внешнем пространстве существует электрическое поле. Однако токи смещения и энергия такого поля предполагаются пренебрежимо малыми.

Наличие источников энергии в ветви k (рис. 3.26, *б*) никак не отражается на графе этой ветви (рис. 3.26, *в*). Обозначим токи и напряжения в графе ветви $\tilde{i}_k$ и $\tilde{u}_k$. Ток $\tilde{i}_k$ и напряжение $\tilde{u}_k$ относятся к *некоторой обобщенной ветви, содержащей источник тока и источник ЭДС* (рис. 3.26, *б*). Согласно первому закону Кирхгофа применительно к узлу m' (или n') на рис. 3.26, *б*, имеем

$$\tilde{i}_k = i_{mn} = i_k + \Im_k.$$

Согласно второму закону Кирхгофа для контура, проходящего по проводникам ветви k от узла m к n и по внешнему пространству — от узла n к m, имеем

$$u_{mn} = \tilde{u}_k = u_k - e_k = r_k i_k + \frac{d}{dt}\left(L_k i_k\right) + \int_0^t \frac{i_k}{C_k}\,dt + u_{Ck}(0) - e_k.$$

Последние выражения связывают токи и напряжения в обобщенных ветвях графа, изображаемых в графе схемы отрезками, с токами и напряжениями ветвей и источниками тока и ЭДС, когда таковые содержатся в исходной схеме.

При записи уравнений согласно законам Кирхгофа для графа схемы будем иметь в виду, что в эти уравнения войдут токи и напряжения обобщенных ветвей схемы цепи. Следовательно, для графа схемы можно написать

$$\sum_{k=1}^{p} \tilde{i}_k = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{p} \tilde{u}_k = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{p} u_k = \sum_{k=1}^{p} e_k.$$

3.13. Узловые уравнения для токов в цепи

Для электрической цепи с q узлами можно составить q уравнений, применяя к каждому из узлов первый закон Кирхгофа. Однако только $q - 1$ из них независимы друг от друга. Независимость уравнений для первых $q - 1$ узлов вытекает из того, что всегда можно установить такой порядок выбора этих узлов, при котором каждый последующий узел будет отличаться от предыдущих, по крайней мере, одной новой ветвью. Заметим, что сумма любых j ($1 \le j \le q - 1$) уравнений есть уравнение для такой замкнутой поверхности, которая охватывает данные j узлов. Это следует из того, что токи тех ветвей, которые не пронизывают поверхность, но находятся внутри замкнутой поверхности, войдут в уравнения два раза: один — со знаком «минус», другой — со знаком «плюс». Например, сумма уравнений для узлов *1*, *2*, *3*, *4* и *5* графа на рис. 3.27 определит сумму токов для поверхности, охватывающей эти узлы (штриховая линия обозначает след этой поверхности).

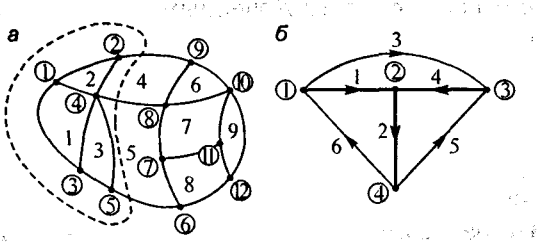


Рис. 3.27

Если поверхность охватывает $q - 1$ узлов, то сумма токов ветвей, пронизывающих эту поверхность, равна с обратным знаком сумме токов для q-го узла, и поэтому q-е уравнение оказывается следствием предыдущих $q - 1$ уравнений. В связи с этим будем говорить, что цепь (или граф схемы) с q узлами имеет лишь $q - 1$ независимых узлов.

В зависимости от того, каким образом ток в ветви направлен по отношению к нормали к поверхности, охватывающей узел, он может входить в уравнение со знаком «плюс» или «минус». Для учета этого обстоятельства запишем первый закон Кирхгофа в виде

$$\sum_{k=1}^{p} a_{jk}\tilde{i}_k = 0, \quad j = 1 \ldots (q-1),$$

где $a_{jk} = \pm 1$ или $a_{jk} = 0$.

Пусть нормаль к замкнутой поверхности направлена во внешнее пространство. Тогда если ток ветви k направлен от узла j, то он войдет в уравнение со знаком «плюс», в противном случае — со знаком «минус». В первом случае $a_{jk} = 1$, во втором $a_{jk} = -1$. Если ветвь k не соединена с данным узлом j, то $a_{jk} = 0$.

С учетом сказанного выше, например, для графа 3.27, *б* (граф цепи рис. 3.23), где $q = 4$, можно составить систему трех независимых уравнений:

для узла *1* $\quad \tilde{i}_1 + \tilde{i}_3 - \tilde{i}_6 = 0, \quad a_{11} = 1, \quad a_{13} = 1, \quad a_{16} = -1;$

для узла *2* $\quad -\tilde{i}_1 + \tilde{i}_2 - \tilde{i}_4 = 0, \quad a_{21} = -1, \quad a_{22} = 1, \quad a_{24} = -1;$

для узла *3* $\quad -\tilde{i}_3 + \tilde{i}_4 - \tilde{i}_5 = 0, \quad a_{33} = -1, \quad a_{34} = 1, \quad a_{35} = -1.$

Заметим, что правила, по которым определяются величины a_{jk}, полностью совпадают с правилами, по которым ранее мы составляли матрицу узловых соединений.

Благодаря единообразному подходу при определении элементов матрицы соединений и коэффициентов у токов в уравнениях получаем возможность использовать матрицу узловых соединений для алгебраизации записи уравнений для токов согласно первому закону Кирхгофа.

Представим токи в графе схемы (или в схеме цепи) в виде матрицы, состоящей из одного столбца и p строк:

$$\tilde{\mathbf{i}} = \left\| \tilde{i}_k \right\| = \begin{Vmatrix} \tilde{i}_1 \\ \vdots \\ \tilde{i}_p \end{Vmatrix}, \quad k = 1 \ldots p.$$

Такая столбцовая матрица порядка $p \times 1$ иногда называется p-мерным вектором по аналогии с векторной величиной, у которой имеется p составляющих по p-координатным направлениям.

Каждая строка матрицы соединений представляет собой коэффициенты у токов в уравнении, записанном согласно первому закону Кирхгофа для узла, номером которого определяется номер строки матрицы соединений. Таким образом, согласно правилам матричного умножения, каждое узловое уравнение может быть представлено в виде

$$j\,\boxed{a_{j1}}\cdots\boxed{a_{jk}}\cdots\boxed{a_{jp}}\times\begin{Bmatrix}\tilde{i}_1\\ \vdots\\ \tilde{i}_k\\ \vdots\\ \tilde{i}_p\end{Bmatrix}=a_{j1}\tilde{i}_1+\ldots+a_{jk}\tilde{i}_k+\ldots+a_{jp}\tilde{i}_p=\sum_{k=1}^{p}a_{jk}\tilde{i}_k=0.$$

вектор-строка $(1\times p)$ — матрица (1×1)

вектор-столбец $(p\times 1)$

Аналогичных матричных уравнений можем записать $q-1$ для $q-1$ строк матрицы узловых соединений. В матричной форме систему таких уравнений можно представить в виде

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{i}}=\mathbf{0}.$$

Для графа схемы (см. рис. 3.23) имеем

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{i}}=\begin{array}{c|cccccc}&1&2&3&4&5&6\\ \hline 1&1&&1&&&-1\\ 2&-1&1&&-1&&\\ 3&&&-1&1&-1&\end{array}\times\begin{Bmatrix}\tilde{i}_1\\ \tilde{i}_2\\ \tilde{i}_3\\ \tilde{i}_4\\ \tilde{i}_5\\ \tilde{i}_6\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\tilde{i}_1+\tilde{i}_3-\tilde{i}_6\\ -\tilde{i}_1+\tilde{i}_2-\tilde{i}_4\\ -\tilde{i}_3+\tilde{i}_4-\tilde{i}_5\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}=\mathbf{0}.$$

(3×6) $\quad$ (6×1) $\quad$ (3×1) $\quad$ (3×1)

Здесь каждая строка матричного произведения $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{i}}$ определяет уравнение для узла согласно первому закону Кирхгофа.

Для k-й обобщенной ветви можно записать уравнение

$$\tilde{i}_k=i_k+\mathfrak{I}_k,$$

где i_k — ток в пассивных элементах ветви k, а $\mathfrak{I}_k$ — ток источника тока в ветви k, если i_k и $\mathfrak{I}_k$ направлены от одного и того же узла (см. рис. 3.26).

Матричная запись системы уравнений согласно первому закону Кирхгофа для токов в элементах ветвей схемы будет иметь вид

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{i}}=\mathbf{A}\mathbf{i}+\mathbf{A}\mathfrak{I}=\mathbf{0},$$

где

$$\tilde{\mathbf{i}}=\underset{(p\times 1)}{\begin{Vmatrix}\tilde{i}_1\\ \vdots\\ \tilde{i}_p\end{Vmatrix}};\quad \mathbf{i}=\underset{(p\times 1)}{\begin{Vmatrix}i_1\\ \vdots\\ i_p\end{Vmatrix}};\quad \mathfrak{I}=\underset{(p\times 1)}{\begin{Vmatrix}\mathfrak{I}_1\\ \vdots\\ \mathfrak{I}_p\end{Vmatrix}};\quad \mathbf{0}=\underset{(q-1)\times 1}{\begin{Vmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{Vmatrix}}.$$

Это уравнение можно записать также в виде

$$\mathbf{Ai} = -\mathbf{A}\mathfrak{I} \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{p} a_{jk} i_k = -\sum_{k=1}^{p} a_{jk} \mathfrak{I}_k, \quad j = 1 \ldots (q-1).$$

В такой форме записи первого закона Кирхгофа источники тока специально выделены.

3.14. Контурные уравнения цепи. Матрица контуров

Применяя второй закон Кирхгофа, можно составить столько уравнений, сколько имеется контуров в цепи. Однако при этом одни уравнения могут оказаться следствиями других. Независимость уравнений для контуров, или, как говорят, независимость контуров, будет обеспечена, если эти контуры выбирать так, чтобы каждый последующий отличался от предыдущих, по крайней мере, одной новой ветвью. Наиболее просто такой выбор можно осуществить, если воспользоваться свойствами дерева графа, которое представляет собой такую совокупность ветвей, которая не образует контуров. Добавление любой связи графа схемы создает контур, который образуется одной связью и ветвями дерева графа схемы.

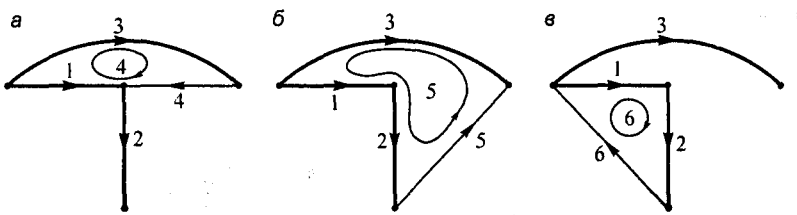


Рис. 3.28

На рис. 3.28, *а* добавление связи *4* образует контур *4*, куда входят ветви дерева *1* и *3*. На рис. 3.28, *б* добавление связи *5* образует контур *5*, куда входят ветви дерева *1*, *2* и *3*. На рис. 3.28, *в* добавление связи *6* образует контур *6*, куда входят ветви дерева *1* и *2*. Таким образом, *число независимых контуров определяется числом связей в каждом связном графе схемы*, т. е. $n = p - (q - 1)$.

Запишем контурные уравнения для графа схемы. Обозначим напряжения ветвей графа схемы через $\tilde{u}_k$. Контурные уравнения пронумеруем согласно номерам ветвей-связей. Обход контура произведем таким образом, чтобы направление связи совпало с направлением обхода. В контурное уравнение напряжение ветви войдет со знаком «плюс», если направления обхода и стрелки ветви совпадают, в противном случае напряжение войдет со знаком минус. Учтем это обстоятельство в записи уравнений введением коэффициентов c_{sk}, где s — номер связи; k — номер ветви. Будем считать, что $c_{sk} = 1$, если k-я ветвь входит в s-й контур согласно его обходу; $c_{sk} = -1$, если k-я ветвь входит в s-й контур против обхода; $c_{sk} = 0$, если k-я ветвь не входит в s-й контур. При таком подходе второй закон Кирхгофа для графа схемы можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{p} c_{sk} \tilde{u}_k = 0, \quad s = q \ldots p.$$

Для контура *4* (рис. 3.28, *а*) имеем

$$-\tilde{u}_1 + \tilde{u}_3 + \tilde{u}_4 = 0; \quad c_{41} = -1, \quad c_{43} = 1, \quad c_{44} = 1.$$

Для контура *5* (рис. 3.28, *б*)

$$\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 - \tilde{u}_3 + \tilde{u}_5 = 0; \quad c_{51} = 1, \quad c_{52} = 1, \quad c_{53} = -1 \quad c_{55} = 1.$$

Для контура *6* (рис. 3.28, *в*)

$$\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \tilde{u}_6 = 0; \quad c_{61} = 1, \quad c_{62} = 1, \quad c_{66} = 1.$$

Составим таблицу из коэффициентов c_{sk}. Пронумеруем строки этой таблицы номерами связей графа цепи, а столбцы — номерами ветвей графа цепи. *Такую прямоугольную матрицу, строки которой соответствуют связям, а столбцы — ветвям направленного графа электрической схемы, элементы которой равны нулю, единице или минус единице, если при обходе контура, образованного данной связью и ветвями дерева, вдоль связи ветвь, соответственно, не входит в контур, входит в контур согласно обходу, входит в контур против обхода, называют матрицей контуров.*

Обозначим матрицу контуров буквой **C**.

Представим напряжения ветвей графа схемы в виде матрицы, состоящей из p строк и одного столбца:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \left\| \tilde{u}_k \right\| = \left\| \begin{matrix} \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \tilde{u}_p \end{matrix} \right\|.$$

Каждая строка матрицы контуров представляет собой коэффициенты у напряжений ветвей графа в уравнении, записанном согласно второму закону Кирхгофа для контура, который образован связью, номер которой определяет номер строки матрицы контуров. Таким образом, согласно правилам матричного умножения, каждое контурное уравнение может быть записано в виде

$$s \begin{bmatrix} c_{s1} & \cdots & c_{sk} & \cdots & c_{sp} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \tilde{u}_k \\ \vdots \\ \tilde{u}_p \end{bmatrix} = c_{s1}\tilde{u}_1 + \ldots + c_{sk}\tilde{u}_k + \ldots + c_{sp}\tilde{u}_p = \sum_{k=1}^{p} c_{sk}\tilde{u}_k = 0.$$

вектор-строка $(1 \times p)$ — матрица (1×1) — вектор-столбец $(p \times 1)$

Такие матричные уравнения можем записать для всех n связей графа схемы. В матричной форме полученную в итоге систему уравнений можно представить в виде

$$\mathbf{C}\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0}.$$

Для графа схемы (см. рис. 3.23, *в*) имеем

$$\mathbf{C}\tilde{\mathbf{u}} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 4 & -1 & & 1 & 1 & & \\ 5 & 1 & 1 & -1 & & 1 & \\ 6 & 1 & 1 & & & & 1 \end{array} \times \begin{array}{|c|}\hline \tilde{u}_1 \\ \hline \tilde{u}_2 \\ \hline \tilde{u}_3 \\ \hline \tilde{u}_4 \\ \hline \tilde{u}_5 \\ \hline \tilde{u}_6 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline -\tilde{u}_1 + \tilde{u}_3 + \tilde{u}_4 \\ \hline \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 - \tilde{u}_3 + \tilde{u}_5 \\ \hline \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \tilde{u}_6 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} = 0.$$

Здесь каждая строка матричного произведения $\mathbf{C}\tilde{\mathbf{u}}$ определяет уравнение для соответствующего контура согласно второму закону Кирхгофа.

Для k-й обобщенной ветви справедливо уравнение

$$\tilde{u}_k = u_k - e_k,$$

где u_k — напряжение в пассивной части ветви k, а e_k — ЭДС в ветви k, причем u_k и e_k направлены согласно направлению ветви графа.

Матричная запись контурных уравнений для напряжений и ЭДС в ветвях схемы будет иметь вид

$$\mathbf{C}\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{C}\mathbf{u} - \mathbf{C}\mathbf{e} = \mathbf{0},$$

где

$$\tilde{\mathbf{u}} = \underset{(p\times 1)}{\begin{Vmatrix} \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \tilde{u}_p \end{Vmatrix}}; \quad \mathbf{u} = \underset{(p\times 1)}{\begin{Vmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{Vmatrix}}; \quad \mathbf{e} = \underset{(p\times 1)}{\begin{Vmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_p \end{Vmatrix}}; \quad \mathbf{0} = \underset{(n\times 1)}{\begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix}}.$$

Последнее уравнение можно представить также и в виде

$$\mathbf{C}\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{e} \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{p} c_{sk} u_k = \sum_{k=1}^{p} c_{sk} e_k, \quad s = q \ldots p,$$

что является уже написанным в § 3.12 уравнением для соответствующего контура цепи.

3.15. Уравнения для токов в сечениях цепи. Матрица сечений

Первый закон Кирхгофа может быть сформулирован не только применительно к отдельным узлам цепи, но и к совокупности узлов. В этом случае поверхность, для которой записывается выражение

$$\oint \boldsymbol{J}\,d\boldsymbol{s} = \sum i_k = 0,$$

будет охватывать совокупность узлов и рассечет (разрежет) цепь или граф схемы на две части. Сечения на рисунках обозначим штриховыми замкнутыми линиями, представляющими собой следы замкнутых поверхностей. На рис. 3.27, *а* и 3.29 штриховыми линиями изображены следы таких поверхностей. Сечений в электрической цепи или в графе электрической схемы может быть множество. Каждому сечению будет соответствовать одно уравнение, выражающее равенство нулю суммы токов ветвей, рассекаемых данным сечением.

Ранее мы выяснили, что число независимых уравнений, согласно первому закону Кирхгофа, равно $q - 1$. Следовательно, число независимых уравнений для сечений также должно быть равно $q - 1$, так как каждое уравнение для сечения может быть получено суммированием соответствующих узловых уравнений для узлов, охваченных сечением. Чтобы упростить выбор сечений, целесообразно проводить их таким образом, чтобы каждое сечение разрезало только одну ветвь дерева. При этом число сечений будет равно числу ветвей дерева. Условимся нумеровать сечения номерами ветвей дерева. Условимся также термин *направление ветви* применять в качестве синонима термина *направление тока в ветви*. Направим нормаль к поверхности сечения внутрь или наружу в зависимости от направления ветви дерева. Тогда в уравнение для токов в сечении ток ветви дерева и токи ветвей, ориентированные по отношению к сечению так же, как и ток ветви дерева, войдут со знаком «плюс». Все остальные токи войдут в уравнение со знаком «минус». Токи ветвей, не разрезаемых сечением, не войдут в уравнение. Учтем это обстоятельство в записи уравнений введением коэффициентов d_{mk}, где m — номер ветви дерева, определяющий номер сечения; k — номер ветви. Причем $d_{mk} = \pm 1$, если k-я ветвь разрезается m-м сечением, и $d_{mk} = 0$, если k-я ветвь не входит в m-е сечение. Тогда уравнение для токов сечений можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{p} d_{mk}\tilde{i}_k = 0, \quad m = 1 \ldots (q-1).$$

Для графа схемы, изображенного на рис. 3.29, для сечения *1*, где ток $\tilde{i}_1$ выходит из сечения, имеем

$$\tilde{i}_1 + \tilde{i}_4 - \tilde{i}_5 - \tilde{i}_6 = 0; \quad d_{11} = 1, \quad d_{14} = 1, \quad d_{15} = -1, \quad d_{16} = -1.$$

Для сечения *2*, где ток $\tilde{i}_2$ входит в сечение,

$$\tilde{i}_2 - \tilde{i}_5 - \tilde{i}_6 = 0; \quad d_{22} = 1, \quad d_{25} = -1, \quad d_{26} = -1.$$

Для сечения *3*, где ток $\tilde{i}_3$ входит в сечение,

$$\tilde{i}_3 - \tilde{i}_4 + \tilde{i}_5 = 0; \quad d_{33} = 1, \quad d_{34} = -1, \quad d_{35} = 1.$$

Составим таблицу из коэффициентов d_{mk}. Пронумеруем строки этой таблицы согласно номерам ветвей дерева, а столбцы — согласно номерам ветвей графа схемы. *Прямоугольная матрица, строки которой соответствуют ветвям дерева, а столбцы — ветвям направленного графа электрической схемы, элементы которой равны нулю, единице, минус единице, если при образовании замкнутой поверхности, разрезающей только одну ветвь дерева и связи графа, ветвь, соответственно, не разрезается, разрезается и направлена к поверхности согласно данной ветви дерева, разрезается и направлена к поверхности против данной ветви графа, называется матрицей сечений.*

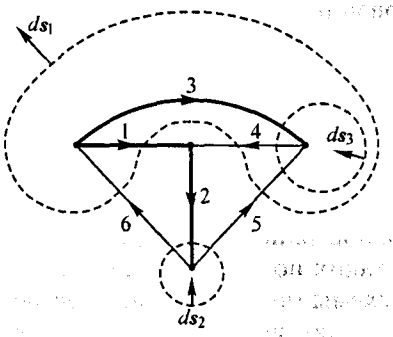


Рис. 3.29

Обозначим матрицу сечений буквой **D**. Представим токи ветвей графа схемы в виде матрицы, состоящей из p строк и одного столбца.

Каждая строка матрицы сечений представляет собой коэффициенты у токов ветвей в уравнении для сечения, номер которого определяется номером ветви дерева. Согласно правилам матричного умножения, каждое уравнение сечения может быть записано в виде

$$m\,\boxed{d_{m1}}\ldots\boxed{d_{mk}}\ldots\boxed{d_{mp}}\times\begin{Bmatrix}\tilde{i}_1\\ \vdots\\ \tilde{i}_k\\ \vdots\\ \tilde{i}_p\end{Bmatrix}=d_{m1}\tilde{i}_1+\ldots+d_{mk}\tilde{i}_k+\ldots+d_{mp}\tilde{i}_p=\sum_{k=1}^{p}d_{mk}\tilde{i}_k=0.$$

вектор-строка (1×p) — матрица (1×1)

вектор-столбец (p×1)

Такие матричные уравнения можно записать для всех $q-1$ ветвей дерева графа схемы. В матричной форме полученную систему уравнений можно представить в виде

$$\mathbf{D}\tilde{\mathbf{i}}=\mathbf{0}.$$

Для графа схемы (рис. 3.29) имеем

$$\mathbf{D}\tilde{\mathbf{i}}=\begin{array}{c|cccccc}&1&2&3&4&5&6\\ 1&1&&&1&-1&-1\\ 2&&1&&&-1&-1\\ 3&&&1&-1&1&\end{array}\times\begin{Bmatrix}\tilde{i}_1\\ \tilde{i}_2\\ \tilde{i}_3\\ \tilde{i}_4\\ \tilde{i}_5\\ \tilde{i}_6\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\tilde{i}_1+\tilde{i}_4-\tilde{i}_5-\tilde{i}_6\\ \tilde{i}_2-\tilde{i}_5-\tilde{i}_6\\ \tilde{i}_3-\tilde{i}_4+\tilde{i}_5\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}=\mathbf{0}.$$

Здесь каждая строка матричного произведения определяет уравнение для токов сечения согласно первому закону Кирхгофа.

Для k-й обобщенной ветви справедливо уравнение

$$\tilde{i}_k=i_k+\mathfrak{I}_k,$$

где i_k — ток в пассивных элементах k-й ветви, а $\mathfrak{I}_k$ — значение тока источника тока в k-й ветви при условии, что i_k и $\mathfrak{I}_k$ направлены от одного и того же узла (см. рис. 3.26).

Матричная запись уравнений токов сечений в элементах ветвей схемы будет иметь вид

$$\mathbf{D}\tilde{\mathbf{i}}=\mathbf{D}\mathbf{i}+\mathbf{D}\mathfrak{I}=\mathbf{0},$$

где

$$\tilde{\mathbf{i}}=\underset{(p\times1)}{\begin{Vmatrix}\tilde{i}_1\\ \vdots\\ \tilde{i}_p\end{Vmatrix}};\quad \mathbf{i}=\underset{(p\times1)}{\begin{Vmatrix}i_1\\ \vdots\\ i_p\end{Vmatrix}};\quad \mathfrak{I}=\underset{(p\times1)}{\begin{Vmatrix}\mathfrak{I}_1\\ \vdots\\ \mathfrak{I}_p\end{Vmatrix}};\quad \mathbf{0}=\underset{(q-1)\times1}{\begin{Vmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{Vmatrix}}.$$

Это уравнение можно переписать так, что источники тока будут выделены особо, а именно:

$$\mathbf{Di} = -\mathbf{D}\mathfrak{J}.$$

3.16. Связи между матрицами соединений, контуров и сечений

Для выяснения связей между матрицами произведем некоторое упорядочение в нумерации ветвей графа схемы. Условимся впредь номера от 1 до $q-1$ приписывать ветвям дерева и номера от q до p — связям графа. При такой нумерации матрицы **A**, **C** и **D** будут состоять из двух подматриц (из двух блоков):

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ \vdots \\ q-1 \end{array} \begin{array}{c} \overset{1\ldots q-1,}{\mathbf{A}_1} \\ (q-1)\times(q-1), \end{array} \begin{array}{c} \overset{q\ldots p}{\mathbf{A}_2} \\ (q-1)\times n \end{array};$$

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c} \\ q \\ \vdots \\ p \end{array} \begin{array}{c} \overset{1\ldots q-1,}{\mathbf{C}_1} \\ n\times(q-1), \end{array} \begin{array}{c} \overset{q\ldots p}{\mathbf{C}_2} \\ (n\times n) \end{array};$$

$$\mathbf{D} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ \vdots \\ q-1 \end{array} \begin{array}{c} \overset{1\ldots q-1,}{\mathbf{D}_1} \\ (q-1)\times(q-1), \end{array} \begin{array}{c} \overset{q\ldots p}{\mathbf{D}_2} \\ (q-1)\times n \end{array}.$$

Соответственно, токи (напряжения) графа схемы также могут быть представлены двумя столбцовыми блоками — двумя подматрицами. В первом блоке-столбце будут расположены токи (напряжения) ветвей дерева с номерами от 1 до $q-1$, а во втором блоке-столбце — токи (напряжения) связей с номерами от q до p:

$$\tilde{\mathbf{i}} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ \vdots \\ q-1 \\ q \\ \vdots \\ p \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \tilde{\mathbf{i}}_1 \\ \hline \tilde{\mathbf{i}}_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} (q-1)\times 1 \\ \\ (n\times 1) \end{array}; \qquad \tilde{\mathbf{u}} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ \vdots \\ q-1 \\ q \\ \vdots \\ p \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \tilde{\mathbf{u}}_1 \\ \hline \tilde{\mathbf{u}}_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} (q-1)\times 1 \\ \\ (n\times 1) \end{array}.$$

При таком разбиении матриц матричные уравнения могут быть записаны в виде произведения блочных матриц. По первому закону Кирхгофа применительно к узлам схемы имеем

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{i}} = \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline \tilde{\mathbf{i}}_1 \\ \hline \tilde{\mathbf{i}}_2 \\ \hline \end{array} = \mathbf{A}_1\tilde{\mathbf{i}}_1 + \mathbf{A}_2\tilde{\mathbf{i}}_2 = \mathbf{0}.$$

Здесь $\mathbf{A}_1$ — квадратная подматрица порядка $(q-1)\times(q-1)$, так как она имеет $q-1$ столбцов, соответствующих $q-1$ ветвям дерева графа схемы, $q-1$ строк, соответствующих $q-1$ узлам. Подматрица-столбец $\tilde{\mathbf{i}}_1$ также имеет $q-1$ строк, соответствующих токам ветвей дерева. Соответствие числа столбцов подматрицы $\mathbf{A}_1$ числу строк подматрицы $\tilde{\mathbf{i}}_1$ позволяет записать матричное произведение $\mathbf{A}_1\tilde{\mathbf{i}}_1$. Точно так же имеет смысл произведение $\mathbf{A}_2\tilde{\mathbf{i}}_2$, так как $\mathbf{A}_2$ имеет n столбцов, а $\tilde{\mathbf{i}}_2$ имеет n строк, соответственно равных числу связей в графе схемы.

Рассуждая аналогично, можно показать, что имеют смысл следующие матричные произведения:

$$\mathbf{C}\tilde{\mathbf{u}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{array}\right] \times \left[\begin{array}{c} \tilde{\mathbf{u}}_1 \\ \hline \tilde{\mathbf{u}}_2 \end{array}\right] = \mathbf{C}_1\tilde{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{C}_2\tilde{\mathbf{u}}_2 = 0,$$

$$\mathbf{D}\tilde{\mathbf{i}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_2 \end{array}\right] \times \left[\begin{array}{c} \tilde{\mathbf{i}}_1 \\ \hline \tilde{\mathbf{i}}_2 \end{array}\right] = \mathbf{D}_1\tilde{\mathbf{i}}_1 + \mathbf{D}_2\tilde{\mathbf{i}}_2 = 0.$$

Здесь, как и ранее, $\tilde{\mathbf{i}}_1$ и $\tilde{\mathbf{u}}_1$ — подматрицы-столбцы токов и напряжений ветвей дерева, а $\tilde{\mathbf{i}}_2$ и $\tilde{\mathbf{u}}_2$ — подматрицы-столбцы токов и напряжений связей графа цепи.

В матрице контуров **C** номер строки определяется номером связи, и поскольку в контур входит только одна связь, то очевидно, что в подматрице $\mathbf{C}_2$ каждая строка будет иметь только один положительный ненулевой элемент. Этот элемент будет в том столбце, номер которого определяется связью, образующей данный контур. По этой причине все ненулевые элементы подматрицы $\mathbf{C}_2$, равные 1, будут расположены по диагонали подматрицы $\mathbf{C}_2$. Такая матрица называется единичной, будем обозначать ее через **1**. Порядок подматрицы $\mathbf{C}_2 = \mathbf{1}$ равен $n \times n$. Обычно в литературе для единичной матрицы применяется обозначение **E**; однако, чтобы не путать единичную матрицу с матрицей ЭДС, будем использовать символ **1**.

При составлении матрицы сечений строки нумеруются согласно номерам ветвей дерева. Поскольку каждая ветвь дерева входит только в одно определяемое номером этой ветви сечение, подматрица $\mathbf{D}_1$ будет иметь строки с одним положительным ненулевым элементом. Эти элементы будут расположены по диагонали подматрицы $\mathbf{D}_1$. По этой причине подматрица $\mathbf{D}_1$ является единичной матрицей порядка $(q-1) \times (q-1)$.

Таким образом, можно записать

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c} \\ q \\ \vdots \\ p \end{array} \left[\begin{array}{c|c} \overset{1\ldots q-1,}{\mathbf{C}_1} & \overset{q\ldots p}{\mathbf{1}} \end{array}\right]; \qquad \mathbf{D} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ \vdots \\ q-1 \end{array} \left[\begin{array}{c|c} \overset{1\ldots q-1,}{\mathbf{1}} & \overset{q\ldots p}{\mathbf{D}_2} \end{array}\right].$$

Каждое сечение разрезает одну ветвь дерева и некоторые связи графа схемы (рис. 3.30). Из этого обстоятельства вытекает, что ветвь (m на рис. 3.30), определяющая сечение, непременно входит в контуры (j и s), образованные теми связями (j и s) графа, которые разрезаются сечением, так как разрезание данной ветви дерева графа приведет к разрезанию всех контуров, которые образованы связями сечения.

На рис. 3.30 показаны два подграфа, которые образуются сечением ветви m. В контуры, образованные связями s и j, ветвь m входит, соответственно, со знаками $c_{sm} = -1$ и $c_{jm} = 1$. В то же время ветви s и j входят в m-е сечение, соответственно, со знаками $d_{ms} = 1$ и $d_{mj} = -1$. Для всех контуров и сечений, следовательно,

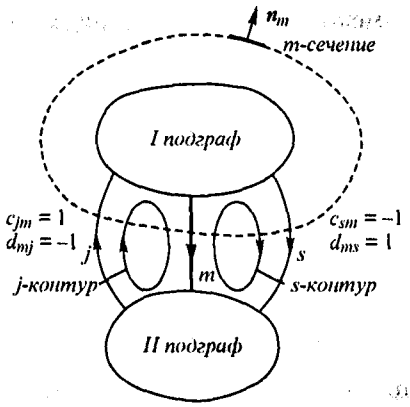


Рис. 3.30

можно заметить следующую закономерность. Столбцы подматрицы $\mathbf{C}_1$ могут быть образованы строками подматрицы $\mathbf{D}_2$, если у всех ненулевых элементов изменить знаки.

Если у двух матриц строкам одной матрицы соответствуют столбцы другой (и наоборот), то такие матрицы получаются путем взаимного транспонирования — перестановки местами строк и столбцов. Обозначим процедуру транспонирования верхним индексом t (или «т»). Тогда имеют место соотношения

$$\mathbf{C}_1 = -\mathbf{D}_2^t \quad \text{или} \quad \mathbf{D}_2 = -\mathbf{C}_1^t.$$

Чтобы не писать индексы у подматриц $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{D}_2$, введем обозначение $\mathbf{C}_1 = \mathbf{F}$. Тогда

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{F} & \mathbf{1} \end{array}\right]; \qquad \mathbf{D} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{1} & -\mathbf{F}^t \end{array}\right].$$

Следовательно, для составления матриц $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ достаточно составить одну подматрицу $\mathbf{F}$. Например, для графа схемы, изображенного на рис. 3.31, имеем

$$\mathbf{D} = \begin{array}{c|cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & 1 & & & & 1 & -1 & -1 & & & \\ 2 & & 1 & & & -1 & 1 & 1 & & 1 & 1 \\ 3 & & & 1 & & & 1 & & -1 & & 1 \\ 4 & & & & 1 & 1 & -1 & & 1 & -1 & -1 \end{array} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{1} & -\mathbf{F}^t \end{array}\right],$$

т. е.

$$\mathbf{F} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & -1 & 1 & & -1 \\ 6 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & -1 & & \\ 8 & & & 1 & -1 \\ 9 & & -1 & & 1 \\ 10 & & -1 & -1 & 1 \end{array}$$

и

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c} \\ 5 \\ \vdots \\ 10 \end{array} \begin{array}{c|c} \overset{1\ldots4}{} & \overset{5\ldots10}{} \\ \hline \mathbf{F} & \mathbf{1} \end{array}.$$

Из законов цепей имеем $\mathbf{A}_1\tilde{\mathbf{i}}_1 = -\mathbf{A}_2\tilde{\mathbf{i}}_2$ и $\mathbf{D}_1\tilde{\mathbf{i}}_1 = -\mathbf{D}_2\tilde{\mathbf{i}}_2$. Но $\mathbf{D}_1 = \mathbf{1}$, поэтому $\tilde{\mathbf{i}}_1 = -\mathbf{D}_2\tilde{\mathbf{i}}_2$.

Подматрица $\mathbf{A}_1$ является квадратной подматрицей. Если определитель $\mathbf{A}_1$ не равен нулю, то можно найти такую матрицу $\mathbf{A}_1^{-1}$, при умножении на которую матрицы $\mathbf{A}_1$ слева получим единичную матрицу. Матрицу $\mathbf{A}_1^{-1}$ называют о б р а т н о й м а т р и ц е й $\mathbf{A}_1$. Умножим первое матричное уравнение слева на $\mathbf{A}_1^{-1}$, тогда

$$\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_1\tilde{\mathbf{i}}_1 = \mathbf{1}\tilde{\mathbf{i}}_1 = \tilde{\mathbf{i}}_1 = -\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2\tilde{\mathbf{i}}_2 = -\mathbf{D}_2\tilde{\mathbf{i}}_2,$$

т. е. $\mathbf{D}_2 = \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2$, откуда также следует, что $-\mathbf{F}' = \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2$.

Последние соотношения важны в том смысле, что они позволяют по матрице соединений путем матричных операций составлять матрицы контуров и сечений, что исключительно важно при использовании вычислительных машин, расчеты на которых требуют формализации процедуры составления системы уравнений. Для графа схемы всегда существует подматрица $\mathbf{D}_2$, поэтому из равенства $\mathbf{D}_2 = \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2$ и существования $\mathbf{A}_2$ вытекает и существование обратной матрицы $\mathbf{A}_1^{-1}$.

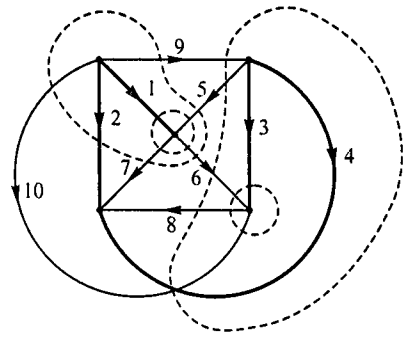


Рис. 3.31

Можно легко показать, что определитель матрицы $\mathbf{A}_1$ существует всегда и, более того, он равен ± 1. Разложим определитель по элементам некоторой строки (или столбца). В определителе $\mathbf{A}_1$ всегда можно найти строку, где имеется только один ненулевой элемент, так как в дереве графа схемы можно найти ветвь, которая заканчивается на том узле, который в качестве лишнего исключен из рассмотрения (такой исключенный узел, как правило, называют базисным). При разложении получим для определителя произведение ± 1 и минора определителя $\mathbf{A}_1$. Минор определителя $\mathbf{A}_1$ соответствует дереву, из которого исключены один узел и одна ветвь. Поэтому для оставшейся части дерева, а следовательно, и минора определителя матрицы $\mathbf{A}_1$ могут быть применены те же самые рассуждения, что и ранее для матрицы $\mathbf{A}_1$. Таким образом, определитель матрицы $\mathbf{A}_1$ будет состоять из произведения $(q-1)$ элементов ± 1, т. е. будет равен либо $+1$, либо -1.

3.17. Полная система уравнений электрических цепей. Дифференциальные уравнения процессов в цепях с сосредоточенными параметрами

Законы Кирхгофа применительно к графу схемы или электрической цепи характеризуют систему в целом без учета характеристик ее элементов. Матричные уравнения

$$\mathbf{Ai} = -\mathbf{A}\mathfrak{I} \quad (\text{или} \quad \mathbf{Di} = -\mathbf{D}\mathfrak{I}) \quad \text{и} \quad \mathbf{Cu} = \mathbf{Ce}$$

определяют систему из p отдельных уравнений. Такая система недостаточна для описания процессов в электрических цепях, так как не известны p токов и p напряжений.

Чтобы дополнить систему уравнений, необходимо определить (или задать) еще p уравнений. Эти уравнения должны отражать свойства элементов систе-

мы — ветвей электрической цепи. Очевидно, что такие связи должны быть записаны для p ветвей цепи. В матричной форме запишем эти уравнения в виде

$$\mathbf{i} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad \text{или} \quad \mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{i}),$$

т. е.

$$\mathbf{i} = \begin{Vmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_p \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} f_1(u_1, \ldots, u_p) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_p(u_1, \ldots, u_p) \end{Vmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{u} = \begin{Vmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \varphi_1(i_1, \ldots, i_p) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \varphi_p(i_1, \ldots, i_p) \end{Vmatrix}.$$

В зависимости от характера функций f_k и $\varphi_k(k = 1 \ldots p)$ системы уравнений электрических цепей могут быть л и н е й н ы м и — для линейных электрических цепей, т. е. для цепей, у которых r, L, C и M не зависят от значений и направлений токов и напряжений в цепи, и нелинейными — для нелинейных электрических цепей, т. е. для цепей, у которых r, L, C или M хотя бы одного из участков зависят от значений или от направлений токов и напряжений в этом участке цепи. Заметим, что при таком определении в зависимости от того, какие токи и напряжения входят в уравнения графа схемы, одна и та же цепь может быть либо линейной, либо нелинейной. Действительно, если для цепи (рис. 3.32), где имеются две ветви с идеальными диодами (ВАХ такого элемента см. на рис. 3.19, *б*), уравнения записаны для токов i, i_1 и i_2, то система уравнений будет нелинейной. В то же время, если в систему уравнений цепи входят только i и u, то этот же участок может быть рассмотрен как линейная цепь.

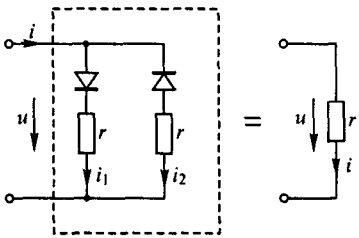


Рис. 3.32

Если в функции f_k и φ_k входят производные токов и напряжений, то процессы в этой линейной или нелинейной электрической цепи будут характеризоваться системой, соответственно, линейных или нелинейных дифференциальных уравнений. При отсутствии производных в функциях f_k и φ_k процессы в этой линейной или нелинейной электрической цепи будут характеризоваться системой, соответственно, линейных или нелинейных алгебраических уравнений.

Система из $2p$ уравнений, включающая в себя уравнения, записанные согласно законам Кирхгофа, и уравнения, характеризующие связи между токами и напряжениями элементов электрической цепи, и есть полная система уравнений электрической цепи, или полная математическая модель этой цепи.

Уравнения, связывающие токи и напряжения отдельных элементов электрической цепи, могут быть учтены при составлении уравнений согласно законам Кирхгофа. В качестве примера рассмотрим составление системы дифференциальных уравнений для линейной цепи (см. рис. 3.23) с сосредоточенными параметрами.

Имеем (см. § 3.13, 3.14)

$$\mathbf{Ai} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & & 1 & & & -1 \\ 2 & -1 & 1 & & -1 & & \\ 3 & & & -1 & 1 & -1 & \end{array} \times \begin{array}{|c|}\hline i_1 \\ \hline i_2 \\ \hline i_3 \\ \hline i_4 \\ \hline i_5 \\ \hline i_6 \\ \hline \end{array} = -\mathbf{A}\mathfrak{I} = -\mathbf{A} \times \begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \mathfrak{I}_6 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \mathfrak{I}_6 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

или по первому закону Кирхгофа:

для узла *1*

$$i_1 + i_3 - i_6 = \mathfrak{I}_6;$$

для узла *2*

$$-i_1 + i_2 - i_4 = 0;$$

для узла *3*

$$-i_3 + i_4 - i_5 = 0.$$

Согласно второму закону Кирхгофа, имеем $\mathbf{Cu} = \mathbf{Ce}$, где

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & -1 & & 1 & 1 & & \\ 5 & 1 & 1 & -1 & & 1 & \\ 6 & 1 & 1 & & & & 1 \end{array}; \quad \mathbf{u} = \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Vmatrix}; \quad \mathbf{e} = \begin{Vmatrix} e_1 \\ 0 \\ e_3 \\ 0 \\ e_5 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Производя умножение матриц, получим

$$\mathbf{Cu} = \begin{array}{c|c} 4 & -u_1 + u_3 + u_4 \\ 5 & u_1 + u_2 - u_3 + u_5 \\ 6 & u_1 + u_2 + u_6 \end{array} = \mathbf{Ce} = \begin{array}{|c|}\hline -e_1 + e_3 \\ \hline e_1 - e_3 + e_5 \\ \hline e_1 \\ \hline \end{array}.$$

Действительно, в контур, образованный связью *4*, входят ветви дерева *1* (отрицательно), *3* (положительно) и сама связь *4*. При этом обход контура производится таким образом, чтобы направление обхода совпало с направлением связи *4*. В контур, образованный связью *5*, входят ветви дерева *1* и *2* (положительно), *3* (отрицательно) и сама связь *5*. В контур *6* входят ветви дерева *1* и *2* (положительно) и связь *6*.

К уравнениям

$$-u_1 + u_3 + u_4 = -e_1 + e_3 \text{ (для контура } 4);$$

$$u_1 + u_2 - u_3 + u_5 = e_1 - e_3 + e_5 \text{ (для контура 5)};$$

$$u_1 + u_2 + u_6 = e_1 \text{ (для контура 6)}$$

и к уравнениям для токов в узлах (или сечениях) следует добавить уравнения, связывающие токи и напряжения в элементах цепи:

$$u_1 = r_1 i_1 + \frac{d}{dt}(L_1 i_1); \quad u_2 = \int_0^t \frac{i_2}{C_2} dt + u_{C_2}(0);$$

$$u_3 = (r_3' + r_3'')i_3 + \frac{d}{dt}[(L_3' + L_3'')i_3] + \int_0^t \frac{i_3}{C_3} dt + u_{C_3}(0);$$

$$u_4 = r_4 i_4 + \frac{d}{dt}(L_4 i_4); \quad u_5 = \frac{d}{dt}(L_5 i_5);$$

$$u_6 = r_6 i_6 + \int_0^t \frac{i_6}{C_6} dt + u_{C_6}(0).$$

Совместно с шестью уравнениями цепи эти соотношения образуют систему из 12 уравнений для 6 токов и 6 напряжений ветвей цепи.

3.18. Анализ и синтез — две основные задачи теории электрических цепей

Задачи теории электрических цепей могут быть разделены на две противоположные по исходным данным и по конечной цели группы — *задачи анализа* и *задачи синтеза* электрических цепей.

Целью анализа является расчет электрических процессов в заданных электрических цепях, т. е. в цепях с заданной структурой и с заданными характеристиками всех элементов цепи, например расчет изменении во времени токов в заданной цепи при известном законе изменения во времени ЭДС, действующих в этой цепи.

Целью синтеза является обратная задача — отыскание структуры электрической цепи и характеристик ее элементов, при которых электрический процесс в цепи будет подчиняться заданным закономерностям. Например, требуется построить электрическую цепь, имеющую два входных и два выходных зажима, удовлетворяющую условию, чтобы при заданном изменении во времени напряжения на входных зажимах получалось вполне определенное, также наперед заданное изменение во времени напряжения на выходных зажимах. Иными словами, требуется построить цепь, которая обладает способностью менять форму кривой входного напряжения в желательном для нас направлении. Такие задачи имеют важное значение, например, для создания электрических цепей, формирующих на своем выходе импульсы определенной формы, что важно в радиотехнике и в автоматике, или выполняющих определенные арифметические или логические операции, что важно при построении вычислительных и управляющих электронных машин и т. п.

Решение задачи синтеза может быть выполнено различными способами. Эта задача может быть решена путем анализа ряда цепей с последующим выбором

наиболее подходящего, оптимального варианта цепи. Уже в такой постановке задачи синтеза возникает вопрос о разработке требований, которым должна удовлетворить оптимальная цепь. Поскольку задача синтеза чаще всего возникает при проектировании различных устройств, то требования оптимальности должны быть заданы или разработаны заранее. Эти требования могут иметь как экономический, так и технологический характер, т. е. они могут регламентировать массу, габариты, стоимость устройства, характер элементов, из которых должна быть осуществлена искомая цепь. Кроме того, при разработке технических требований должны быть заданы качественные и количественные требования относительно допустимых отклонений характеристик синтезируемой цепи от наперед заданных характеристик. Только при удовлетворении всех этих требований можно найти оптимальный вариант реализации на практике искомой цепи.

Такая постановка задачи синтеза предопределяет неоднозначность ее решения. Например, наперед заданные характеристики можно получить, осуществив цепь, в которой используются все элементы электрических цепей, а именно: индуктивные катушки, связанные в общем случае и электрически, и при помощи общего магнитного поля, конденсаторы и резисторы. Однако в пределах допустимых отклонений от наперед заданных свойств проектируемого устройства возможно конструирование цепи, содержащей только конденсаторы и резисторы, или цепи, обладающей также индуктивностью, но в которой отсутствует взаимная индукция. В гл. 15 будет показана множественность решения задачи синтеза даже в том случае, когда совершенно различные по конфигурации цепи имеют в точности одинаковые свойства.

Как указывалось, синтез электрических цепей основывается на общих свойствах электрических цепей, которые могут быть исследованы путем анализа цепей. Поэтому синтезу должен предшествовать анализ. Это относится в равной степени к линейным и нелинейным электрическим цепям. Естественно, наибольшей теоретической разработке поддаются задачи анализа и синтеза линейных электрических цепей, содержащих элементы, параметры которых не зависят от тока в них и от напряжения на их зажимах. Следующая, вторая, часть целиком посвящается этим вопросам. Возможности синтеза цепей существенно возрастают при использовании нелинейных элементов цепи с теми или иными характеристиками. Анализу нелинейных электрических цепей посвящается третья часть, в которой будут изучены свойства таких цепей и некоторые методы их расчета. На основе результатов, полученных при анализе различных нелинейных цепей, можно будет косвенно судить и о возможности использования тех или иных нелинейных элементов для синтеза электрических цепей.

Выше было сказано, что путем подбора и анализа подобранных цепей можно решить задачу синтеза. Однако такой способ решения задачи синтеза нецелесообразен. Анализ свойств сложных цепей, каковыми в общем случае оказываются подлежащие синтезу цепи, при условии исследования значительного числа вариантов является весьма трудоемким процессом. Использование методов синтеза дает возможность, исходя из общих свойств цепей, получить рекомендации, позволяющие аналитически рассчитывать как структуру, так и параметры цепи, обладающей наперед заданными характеристиками.

В результате аналитического решения могут быть получены цепи, которые не будут удовлетворять тем или иным экономическим или технологическим требованиям. Поэтому при синтезе возникает проблема эквивалентных преобразований полученных цепей, в результате которых характеристики цепи не изменяются, но меняются структура цепи и состав ее элементов. В некоторых случаях этим требованиям можно удовлетворить при условии отклонения от желаемой характеристики в допустимых пределах в самом начале использования методов синтеза. Это достигается соответствующим выбором функции, описывающей свойства искомой цепи. Подобранные соответствующим образом функции дают возможность синтезировать цепь, содержащую только те или иные комбинации элементов. В этом смысле синтез включает в себя также и проблему выбора наиболее подходящего математического описания наперед заданных свойств цепи.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Глава четвертая

Основные свойства и эквивалентные параметры электрических цепей при синусоидальных токах

4.1. Синусоидальные ЭДС, напряжения и токи. Источники синусоидальных ЭДС и токов

В линейной электрической цепи при действии периодических ЭДС с одинаковым периодом T спустя достаточно большой промежуток времени от начала действия этих ЭДС *устанавливаются* во всех участках цепи периодические токи и напряжения с тем же периодом T. Величина $f = 1/T$ является частотой ЭДС, напряжения или тока. Частота численно равна числу периодов в единицу времени и измеряется в *герцах* (Гц).

Наибольший интерес представляют периодические ЭДС, напряжения и токи, являющиеся синусоидальными функциями времени:

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e); \quad u = U_m \sin(\omega t + \psi_u); \quad i = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Величины e, u, i называют мгновенными ЭДС, напряжением и током. Их наибольшие значения E_m, U_m и I_m называют амплитудами. Величину $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ называют угловой частотой. Аргумент синуса, отсчитываемый от ближайшей предыдущей точки перехода синусоидальной величины через нуль от отрицательных к положительным ее значениям, называют фазой, величины ψ_e, ψ_u и ψ_i — начальной фазой, соответственно, ЭДС, напряжения и тока.

На рис. 4.1 изображены синусоидальные напряжение и ток с одним и тем же периодом. Обратим внимание на то, что положительные фазы $\psi_u > 0$ и $\psi_i > 0$ должны откладываться от начала координат влево. По оси абсцисс можно откладывать или время t, или пропорцио-

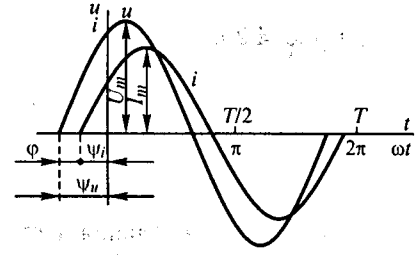


Рис. 4.1

нальную ему угловую величину ωt. Соответственно, периодом будет являться или T, или 2π.

Разность фаз напряжения и тока $\varphi = \psi_u - \psi_i$ называют также углом сдвига тока по отношению к напряжению. *При* $\varphi = 0$ *ток и напряжение совпадают по фазе, при* $\varphi = \pm\pi$ *— противоположны по фазе, при* $\varphi = \pm\pi/2$ *— находятся в квадратуре.*

В большинстве случаев мы стремимся к тому, чтобы в электрических цепях токи и напряжения изменялись по синусоидальному закону, так как отклонение от этого закона ведет к нежелательным явлениям — появляются дополнительные потери в элементах цепи, возрастает влияние мощных линий передачи на соседние линии связи и т. д. Начнем рассмотрение с синусоидальных функций еще и потому, что любую периодическую функцию можно разложить в ряд синусоидальных функций различных частот (ряд Фурье), и следовательно, рассмотрение синусоидальных токов позволит в дальнейшем перейти к изучению более сложных периодических ЭДС, токов и напряжений.

В современной технике используют переменные токи исключительно широкого диапазона частот — от долей герца до миллиардов герц. В России и европейских странах в энергетических системах применяется частота 50 Гц.

В зависимости от частоты источниками синусоидальной ЭДС являются генераторы того или иного типа. При промышленных частотах на электрических станциях в настоящее время в качестве генераторов применяют вращающиеся электрические машины. Для промышленных и повышенных частот генерирование переменной ЭДС осуществляют также с помощью ионных и полупроводниковых преобразователей постоянного тока в переменный, именуемых инверторами. При повышенных и высоких частотах используют преобразователи с электронными приборами, например ламповые генераторы. Наконец, для генерирования колебаний с частотами, приближающимися к частотам оптического диапазона, а также лежащими в оптическом диапазоне, используются квантовые генераторы, именуемые мазерами и лазерами.

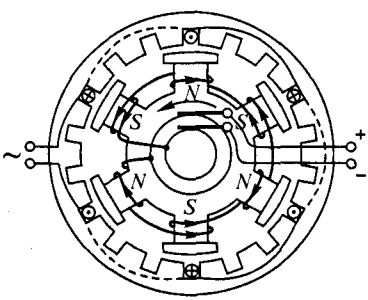


Рис. 4.2

О принципе действия инвертора и транзисторного генератора будет сказано в следующей части, посвященной нелинейным электрическим цепям. Рассмотрим здесь в общих чертах вопрос о генерировании синусоидальных ЭДС с помощью вращающихся электрических машин.

На рис. 4.2 схематически представлен синхронный гидрогенератор с *явно выраженными полюсами*, имеющий три пары полюсов ($p = 3$). На вращающейся части машины — роторе — наложена обмотка возбуждения, питаемая постоянным током. Обмотка, в которой генерируется переменная ЭДС, расположена в пазах неподвижной части машины — статора. Магнитная цепь машины изготовляется из электротехнической стали; статор и полюсные наконечники ротора — из листовой стали, остальная часть ротора — из сплошного стального массива. Частоту генерируемой ЭДС определяют обычно по формуле $f = pn/60$, где n — часто-

та вращения (число оборотов в минуту). Например, частота вращения генераторов на Днепровской гидроэлектростанции $n = 83\frac{1}{3}$ об/мин. Следовательно, для получения частоты $f = 50$ Гц эти генераторы имеют $p = 36$ пар полюсов.

В генераторах с явно выраженными полюсами для получения синусоидальной ЭДС в обмотке якоря достаточно соответствующим образом подобрать форму полюсных наконечников, чтобы магнитная индукция B вдоль окружности машины в воздушном зазоре изменялась по синусоидальному закону. Это следует из выражения для ЭДС, индуцируемой в стержнях обмотки статора: $|e| = Blv$, где l — активная длина стержней и v — линейная скорость.

Свободные (рис. 4.2) пазы статора заполняют проводниками еще двух других обмоток. Совместно эти три обмотки статора образуют так называемую трехфазную систему, о которой пойдет речь в специальной главе. На схематическом рис. 4.2 для каждой обмотки под каждым полюсом имеется только по одному пазу в статоре. Обычно их бывает несколько, причем катушки, лежащие в соседних пазах и принадлежащие одной и той же обмотке, соединяют последовательно.

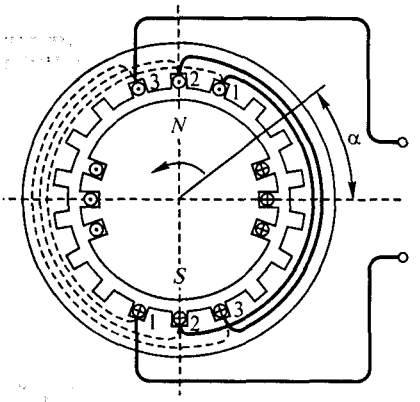


Рис. 4.3

Генераторы, связываемые с паровыми турбинами, так называемые турбогенераторы, имеют большую частоту вращения, так как коэффициент полезного действия паровых турбин получается высоким только при высоких частотах вращения. Поэтому турбогенераторы имеют малое число пар полюсов — обычно $p = 1$ или $p = 2$. Соответственно, при $f = 50$ Гц частота вращения получается $n = 3000$ об/мин или $n = 1500$ об/мин. Во избежание больших потерь на трение о воздух роторы таких генераторов выполняют гладкими. Их называют роторами с *неявно выраженными полюсами* (рис. 4.3). Обмотку ротора укладывают в имеющиеся в роторе пазы.

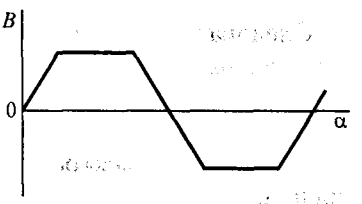


Рис. 4.4

Для получения синусоидальной ЭДС в таких генераторах нет возможности видоизменять форму полюсных наконечников. Магнитная индукция B в воздушном зазоре изменяется в зависимости от угла α приблизительно по трапецеидальному закону (рис. 4.4). Соответственно, и ЭДС в катушках на статоре изменяется во времени по трапецеидальному закону. Если заложить

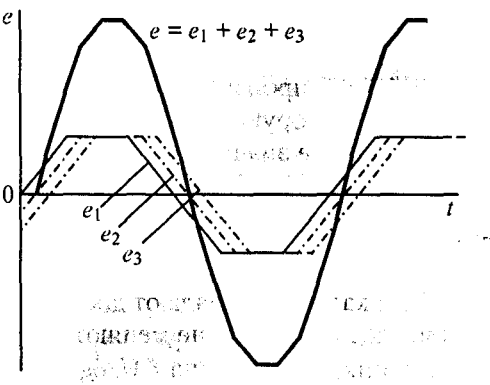


Рис. 4.5

в соседние пазы одинаковые катушки (на рис. 4.3 помечены цифрами *1*, *2*, *3*), то кривые ЭДС e_1, e_2, e_3 в этих катушках будут одинаковы по форме, но сдвинуты друг относительно друга по оси времени (рис. 4.5). Соединив эти катушки последовательно, можно получить, как видно из рисунка, суммарную ЭДС $e = e_1 + e_2 + e_3$, во всей обмотке весьма близкую к синусоидальной.

Свободные (рис. 4.3) пазы статора заполняют еще двумя обмотками для образования трехфазной системы.

4.2. Действующие и средние значения периодических ЭДС, напряжений и токов

О значениях периодических ЭДС, напряжений и токов обычно судят по их средним квадратическим значениям за период, обозначаемым, соответственно, через *E*, *U*, *I*:

$$E = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e^2 dt}; \quad U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2 dt}; \quad I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}.$$

Эти величины называют *действующими* периодическими ЭДС, напряжением и током. Такой выбор определяется нижеследующими соображениями.

Среднее за период значение мощности, характеризующее выделение теплоты в цепи с сопротивлением *r*, имеет выражение

$$\frac{1}{T}\int_0^T i^2 r dt = r\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt = rI^2.$$

Следовательно, вводя понятие о действующем периодическом токе как среднем квадратическом значении его за полный период, получаем формулу для средней мощности, выраженной через этот ток, такую же по виду, как и при постоянном токе.

Мгновенная электромагнитная сила *F* взаимодействия двух катушек или вообще двух любых контуров, по которым последовательно протекает один и тот же ток *i*, выражается в виде

$$F = i_1 i_2 \frac{\partial M}{\partial g} = i^2 \frac{\partial M}{\partial g},$$

где $\partial M/\partial g$ — производная от взаимной индуктивности *M* контуров по той координате *g*, которую стремится изменить сила *F*. При периодическом изменении тока *i* среднее значение силы $F_{ср}$ за период имеет выражение

$$F_{ср} = \frac{1}{T}\int_0^T F\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 \frac{\partial M}{\partial g} dt.$$

Если катушки обладают достаточно большой инерцией или вообще закреплены и, следовательно, не меняют своего положения в течение периода изменения тока в них, то величина $\partial M/\partial g$ остается постоянной и может быть вынесена за знак интеграла. Получаем

$$F_{ср} = \frac{\partial M}{\partial g}\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt = I^2 \frac{\partial M}{\partial g},$$

т. е. выражение для $F_{ср}$ через действующее значение периодического тока получается таким же, как и при постоянном токе.

Мгновенная сила F притяжения пластин конденсатора выражается в виде

$$F = \frac{1}{2}u^2 \frac{\partial C}{\partial g},$$

где u — мгновенное напряжение между пластинами; C — емкость между пластинами; g — координата, характеризующая взаимное расположение пластин, которую стремится изменить сила F. Среднее за период значение силы $F_{ср}$ при условии, что инерция пластин столь велика, что положение их не изменяется в течение периода напряжения u, равно

$$F_{ср} = \frac{1}{T}\int_0^T F\,dt = \frac{1}{2}\frac{\partial C}{\partial g}\frac{1}{T}\int_0^T u^2 dt = \frac{1}{2}U^2 \frac{\partial C}{\partial g}.$$

Таким образом, выражение $F_{ср}$ через действующее напряжение U оказывается совпадающим с выражением при постоянном напряжении.

Определим связь действующего значения E синусоидальной ЭДС $e=E_m \sin(\omega t+\psi_e)$ с ее амплитудой E_m. Имеем

$$E = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T E_m^2 \sin^2(\omega t+\psi_e)dt} = E_m\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1-\cos(2\omega t+2\psi_e)}{2}dt} = \frac{E_m}{\sqrt{2}},$$

так как

$$\int_0^T \cos(2\omega t+2\psi_e)\,dt = 0.$$

Аналогично для синусоидальных напряжения и тока получим

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}};\quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Большая часть приборов, используемых для измерения периодических напряжений и токов, показывает действующее значение этих величин.

Среднее арифметическое значение синусоидальных ЭДС, напряжений и токов за весь период равно нулю. Поэтому вводят понятие об их *среднем значении* за положительный полупериод.

Такое определение средних значений используют и для периодических несинусоидальных ЭДС, напряжений и токов, когда положительные и отрицательные их полуволны одинаковы.

Среднее значение синусоидальной ЭДС равно, в частности,

$$E_{ср} = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} E_m \sin\omega t\,dt = \frac{2E_m}{\omega T}\left|-\cos\omega t\right|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{4E_m}{\omega T} = \frac{2}{\pi}E_m$$

и, соответственно,

$$U_{ср} = \frac{2}{\pi}U_m \quad \text{и} \quad I_{ср} = \frac{2}{\pi}I_m.$$

Особенно просто вычисляется среднее значение ЭДС, индуцируемой периодически изменяющимся потокосцеплением Ψ, через его максимальное Ψ_{max} и минимальное Ψ_{min} значения. Действительно,

$$E_{ср} = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\left(-\frac{d\Psi}{dt}\right)dt = -\frac{2}{T}\int_{\Psi_{max}}^{\Psi_{min}} d\Psi = 2f(\Psi_{max} - \Psi_{min}),$$

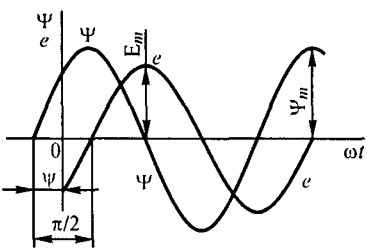


Рис. 4.6

так как ЭДС проходит через нуль при $\Psi = \Psi_{max}$ и $\Psi = \Psi_{min}$ и $e > 0$ в интервале, когда потокосцепление изменяется от Ψ_{max} до Ψ_{min}. В тех случаях, когда $\Psi_{max} = -\Psi_{min} = \Psi_m$, получим $E_{ср} = 4f\Psi_m$. Эта простая формула не зависит от закона изменения потокосцепления от Ψ_{max} до Ψ_{min}. Если же желаем определить действующую ЭДС, то величину $E_{ср}$ необходимо умножить на так называемый коэффициент формы $k_ф = E/E_{ср}$ кривой ЭДС:

$$E = k_ф E_{ср} = 4k_ф f\Psi_m.$$

В частном случае, при синусоидальном потокосцеплении $\Psi = \Psi_m \sin(\omega t + \psi)$, ЭДС имеет выражение

$$e = -\omega\Psi_m \cos(\omega t + \psi) = \omega\Psi_m \sin\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Индуцируемая ЭДС отстает от потокосцепления Ψ *на угол* $\pi/2$ (рис. 4.6).

При синусоидальной ЭДС коэффициент формы

$$k_ф = \frac{E}{E_{ср}} = \frac{E_m}{\sqrt{2}}\Big/\frac{2E_m}{\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1{,}11$$

и, соответственно, $E = 4{,}44f\Psi_m$.

Вводят в рассмотрение также коэффициент амплитуды $k_а = E_m/E$. В частности, для синусоиды $k_а = \sqrt{2}$.

4.3. Изображение синусоидальных ЭДС, напряжений и токов с помощью вращающихся векторов. Векторные диаграммы

Синусоидальные ЭДС, напряжения и токи, имеющие угловую частоту ω, можно изображать векторами, вращающимися с угловой скоростью, равной ω; причем длина вектора определяется в соответствующем масштабе амплитудой ЭДС, напряжения или тока.

На рис. 4.7 изображена с помощью вращающегося вектора синусоидальная ЭДС $e = E_m \sin(\omega t + \psi)$. Если угол $(\omega t + \psi)$ отсчитывается от горизонтальной

оси, то проекция вращающегося вектора на вертикальную ось равна в избранном масштабе мгновенной ЭДС

Пусть имеем ЭДС e, равную сумме ЭДС e_1 и e_2 одной и той же частоты:

$$e = e_1 + e_2 = E_{1m}\sin(\omega t + \psi_1) + E_{2m}\sin(\omega t + \psi_2) = E_m \sin(\omega t + \psi).$$

Изобразим ЭДС e_1 и e_2 вращающимися векторами (рис. 4.8). Так как проекция на любую ось геометрической суммы двух векторов равна алгебраической сумме их проекций на эту ось, то ЭДС e изображается вращающимся вектором, который равен геометрической сумме векторов, изображающих ЭДС e_1 и e_2.

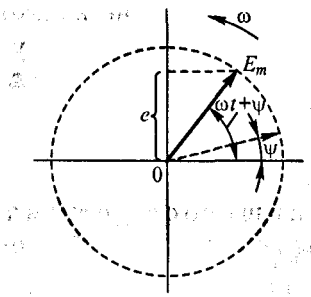


Рис. 4.7

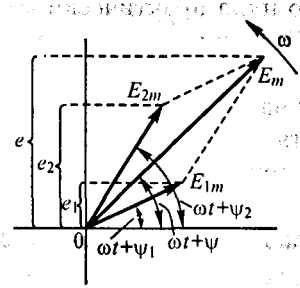


Рис. 4.8

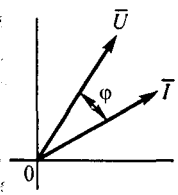


Рис. 4.9

При рассмотрении установившихся синусоидальных процессов начальную фазу одной из величин можно выбрать произвольно, например начальную фазу ЭДС или приложенного напряжения. Соответственно произвольно может быть расположен в начальный момент времени вектор, изображающий эту величину. Векторы всех остальных величин при этом будут повернуты по отношению к нему на углы, равные сдвигам фаз.

Совокупность векторов, характеризующих процессы, происходящие в той или иной цепи переменного тока, и построенных с соблюдением правильной ориентации их друг относительно друга, называют векторной диаграммой.

Так как обычно мы интересуемся действующими значениями синусоидальных функций, которые в $\sqrt{2}$ меньше их амплитуд, то целесообразно на векторной диаграмме длину векторов выбирать равной в избранном масштабе действующим ЭДС, токам и напряжениям. Например, на рис. 4.9 изображена векторная диаграмма напряжения u и тока i, причем ток сдвинут по отношению к напряжению на угол φ.

В дальнейшем векторы, изображающие синусоидальные функции времени, будем обозначать теми же буквами, что и действующие или максимальные значения этих функций, но с чертой над буквой, в отличие от обозначения жирным шрифтом векторов, изображающих характеристики физических полей.

4.4. Установившийся синусоидальный ток в цепи с последовательным соединением участков *r*, *L* и *C*

Дифференциальное уравнение для цепи с последовательно соединенными участками r, L и C (рис. 4.10), как было получено в § 3.12, имеет вид

$$u = u_r + u_L + u_C = ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + u_C(0).$$

Общее решение $i(t)$ этого уравнения, как всякого линейного дифференциального уравнения, складывается из частного решения $i'(t)$, определяемого видом функции $u(t)$, и полного интеграла $i''(t)$ однородного дифференциального уравнения, получаемого, если принять $u(t) = 0$. Как будет показано в гл. 9, после включения цепи под действие напряжения $u(t)$ составляющая тока $i''(t)$ быстро затухает, уменьшаясь до нуля практически за доли секунды или за несколько секунд. Действительно, при $u = 0$, $r \neq 0$ процесс в цепи может существовать только за счет запасов энергии в полях цепи и будет затухать вследствие рассеяния энергии на участке с сопротивлением r.

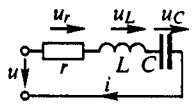


Рис. 4.10

Таким образом, спустя небольшой промежуток времени после включения в цепи устанавливается ток $i(t)$, определяемый частным решением $i'(t)$ уравнения цепи. Величина $i'(t)$ является *током установившегося режима в цепи*. Первые пять глав настоящей части посвящены исследованию установившихся режимов.

Пусть приложенное к цепи напряжение изменяется по синусоидальному закону $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$. При этом ток установившегося режима также будет синусоидальным с той же частотой ω и, следовательно, может быть выражен в виде $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi)$. Задача заключается в отыскании величин I_m и φ при заданных величинах U_m, ω и ψ_u.

Как было сказано раньше, при исследовании установившегося синусоидального процесса начальная фаза ψ_u приложенного напряжения может быть выбрана произвольно. Так как в данном случае общим для всех участков является ток, то целесообразно выбрать $\psi_u = \varphi$, чтобы начальная фаза тока была равна нулю, т. е. $\psi_i = 0$. Тогда

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u) = U_m \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{и} \quad i = I_m \sin \omega t.$$

Подставляя эти значения i и u в уравнение

$$ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + u_C(0) = u,$$

найдем

$$rI_m \sin\omega t + \omega L I_m \cos\omega t - \frac{1}{\omega C} I_m \cos\omega t + \frac{1}{\omega C} I_m + u_C(0) = U_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Так как все члены, кроме двух последних в левой части уравнения, не содержат постоянных составляющих, то $\dfrac{1}{\omega C} I_m + u_C(0) = 0$.

Это уравнение должно быть справедливо для любого момента времени t. Полагая, в частности, $\omega t = \pi/2$ и $\omega t = 0$, получаем

$$rI_m = U_m \cos\varphi; \quad \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_m = U_m \sin\varphi.$$

Возведя первое и второе равенства в квадрат и сложив, будем иметь

$$\left[r^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2\right]I_m^2=U_m^2,$$

откуда находим связь между амплитудами тока и напряжения:

$$I_m=\frac{U_m}{\sqrt{r^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Поделив обе части этого выражения на $\sqrt{2}$, получим аналогичную связь между действующими током и напряжением:

$$I=\frac{U}{\sqrt{r^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Корень следует брать всегда со знаком «плюс», так как амплитуды и действующие значения напряжения и тока считаем положительными величинами.

Поделив второе равенство на первое, находим

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\omega L-1/(\omega C)}{r}.$$

В выражениях, связывающих амплитуды U_m и I_m или действующие значения U и I напряжения и тока, в знаменателе стоит величина, имеющая размерность электрического сопротивления. Ее обозначают через z и называют полным сопротивлением цепи. Для рассмотренной цепи

$$z=\frac{U_m}{I_m}=\frac{U}{I}=\sqrt{r^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

В общем случае в цепи переменного тока полное сопротивление z больше сопротивления r и может быть ему равно только в частном случае. Причина этого состоит в том, что в рассматриваемой цепи приложенное напряжение имеет не только составляющую ir, но также составляющую $L\frac{di}{dt}$, преодолевающую ЭДС самоиндукции, и составляющую q/C, равную напряжению на конденсаторе.

Сопротивление r называют активным сопротивлением цепи, так как только им определяются необратимые активные процессы в цепи, в данном случае преобразование электромагнитной энергии в тепловую. Величину $\omega L - 1/(\omega C)$, учитывающую реакцию самоиндукции и емкости и имеющую размерность сопротивления, называют реактивным сопротивлением цепи и обозначают x. При этом член ωL, учитывающий реакцию самоиндукции, называют индуктивным сопротивлением цепи и обозначают x_L, а член $1/(\omega C)$, учитывающий реакцию емкости, называют емкостным сопротивлением цепи и обозначают x_C.

Итак, имеем

$$x_L = \omega L; \quad x_C = \frac{1}{\omega C}; \quad x = \omega L - \frac{1}{\omega C} = x_L - x_C;$$

$$z = \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{r^2 + x^2}.$$

Заметим, что возрастание x_L при увеличении частоты объясняется тем, что ЭДС самоиндукции пропорциональна скорости изменения тока, и следовательно, ее амплитуда растет с увеличением частоты при неизменной амплитуде тока. Убывание величины x_C при увеличении частоты является результатом того, что ток смещения в конденсаторе пропорционален скорости изменения напряжения на зажимах конденсатора и, следовательно, его амплитуда растет с увеличением частоты при неизменной амплитуде напряжения.

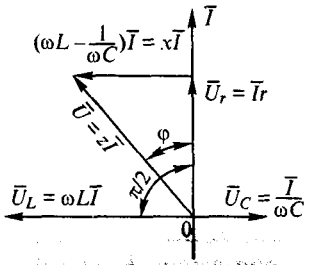


Рис. 4.11

Структура выражения для z может быть уяснена, если рассмотреть сдвиги фаз напряжений на отдельных участках цепи по отношению к току. С целью наглядности построим векторную диаграмму для рассматриваемой цепи. Здесь и в последующем диаграмму будем строить для действующих величин. Для краткости векторы, изображающие ток, напряжение и ЭДС, будем называть просто вектором тока, вектором напряжения и вектором ЭДС.

Направим вектор тока $\bar{I}$ по вертикальной оси (рис. 4.11).

Напряжение на участке с сопротивлением r

$$u_r = ri = rI_m \sin \omega t$$

совпадает по фазе с током, и поэтому вектор этого напряжения $\bar{U}_r$ направлен вдоль вектора тока.

Напряжение на участке с индуктивностью L

$$u_L = L\frac{di}{dt} = \omega L I_m \cos \omega t = \omega L I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

опережает ток на угол $\pi/2$, и вектор этого напряжения $\bar{U}_L$ должен быть повернут относительно вектора тока на угол $\pi/2$ в положительном направлении.

Напряжение на участке с емкостью C

$$u_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + u_C(0) = -\frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t = \frac{1}{\omega C} I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

отстает от тока на угол $\pi/2$, и вектор этого напряжения $\bar{U}_C$ должен быть повернут относительно вектора тока на угол $\pi/2$ в отрицательном направлении.

Складывая геометрически векторы напряжений на участках цепи $\bar{U}_r$, $\bar{U}_L$ и $\bar{U}_C$, получаем вектор напряжения $\bar{U}$ на зажимах всей цепи, который сдвинут по отношению к вектору тока $\bar{I}$ на угол φ. То обстоятельство, что величины $x_L = \omega L$ и $x_C = 1/(\omega C)$ входят в выражение для реактивного сопротивления с разными знаками, объясняется тем, что напряжения u_L и u_C сдвинуты друг относительно

друга на угол π и, следовательно, в любой момент времени противоположны друг другу, что, в частности, видно из векторной диаграммы.

Напряжения u_r и $(u_L + u_C)$ сдвинуты друг относительно друга на угол $\pi/2$. Поэтому полное сопротивление цепи z нельзя определять путем арифметического сложения r и x, а следует вычислять по формуле $z = \sqrt{r^2 + x^2}$.

Зафиксируем особо внимание на следующих весьма важных результатах:

- *на участке с активным сопротивлением ток совпадает по фазе с напряжением на этом участке;*
- *в индуктивной катушке ток отстает по фазе на угол $\pi/2$ от напряжения на катушке;*
- *в конденсаторе ток опережает по фазе на угол $\pi/2$ напряжение на зажимах конденсатора.*

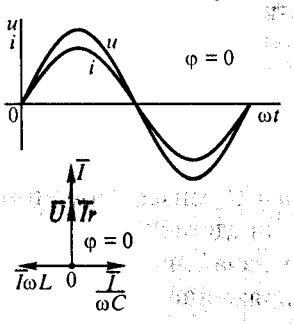


Рис. 4.12

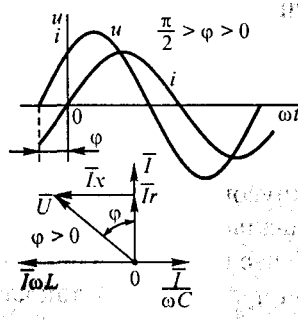


Рис. 4.13

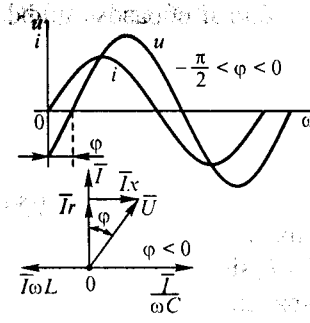


Рис. 4.14

Рассмотрим теперь сдвиг фаз φ между током и напряжением на зажимах всей цепи. *Ток совпадает по фазе* с приложенным напряжением только при $x = 0$, т. е. или при отсутствии в цепи реактивных сопротивлений, или при их взаимной компенсации. Последнее имеет место при р е з о н а н с е, явление которого будет рассмотрено в гл. 6. Действительно, из векторной диаграммы (рис. 4.12) видно, что при $x = \omega L - 1/\omega C = 0$ сумма векторов $\overline{U}_L$ и $\overline{U}_C$ будет равна нулю и вектор $\overline{U}$ приложенного напряжения совпадет по направлению с вектором $\overline{I}$ тока, т. е. угол φ будет равен нулю. Кривые тока и напряжения для этого случая изображены также на рис. 4.12. Если $\omega L > 1/(\omega C)$, то $x > 0$, $\pi/2 \geq \varphi > 0$ и *ток отстает по фазе* от напряжения на зажимах цепи. Этот случай изображен на рис. 4.13. Если же $1/(\omega C) > \omega L$, то $x < 0$, $-\pi/2 \leq \varphi < 0$ и *ток опережает по фазе* напряжение на зажимах цепи. Этот случай изображен на рис. 4.14.Таким образом, пределами, между которыми лежит φ, являются $+\pi/2$ и $-\pi/2$.

4.5. Установившийся синусоидальный ток в цепи с параллельным соединением участков *g*, *L* и *C*

Рассмотрим цепь, изображенную на рис. 4.15, состоящую из трех параллельно соединенных участков; причем предположим, что первый участок обладает только проводимостью g, второй — только емкостью C и третий — только индуктивностью L.

Применяя первый закон Кирхгофа, имеем

$$i_g + i_C + i_L = i.$$

Токи в ветвях можно выразить через приложенное напряжение. Ток в первой ветви $i_g = gu$, где g — проводимость первого участка. Ток во второй ветви $i_C = \frac{dq}{dt} = \frac{dCu}{dt} = C\frac{du}{dt}$. Ток в третьей ветви $i_L = \frac{\Psi_L}{L}$.

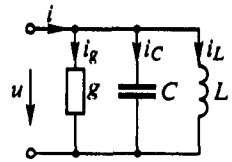


Рис. 4.15

Но так как $u = \frac{d\Psi_L}{dt}$, то $\Psi_L = \int_0^t u\,dt + \Psi_L(0)$ и, следовательно, $i_L = \frac{1}{L}\int_0^t u\,dt + i_L(0)$, где $i_L(0) = \frac{1}{L}\Psi_L(0)$.

Таким образом, дифференциальное уравнение рассматриваемой цепи имеет вид

$$gu + C\frac{du}{dt} + \frac{1}{L}\int_0^t u\,dt + i_L(0) = i.$$

Пусть к цепи приложено синусоидальное напряжение $u = U_m \sin \omega t$. При этом ток i также будет синусоидальным и может быть представлен в виде $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$. В данном случае целесообразно принять начальную фазу приложенного напряжения равной нулю ($\psi_u = 0$), так как напряжение является общим для всех ветвей.

Подставив эти выражения в уравнение цепи, получим

$$gU_m \sin\omega t + \omega CU_m \cos\omega t - \frac{1}{\omega L}U_m \cos\omega t + \frac{1}{\omega L}U_m + i_L(0) = I_m \sin(\omega t - \varphi).$$

Так как все члены, кроме двух последних в левой части уравнения, не содержат постоянных составляющих, то $\frac{1}{\omega L}U_m + i_L(0) = 0$.

Уравнение цепи справедливо для любого момента времени t. Полагая $\omega t = \pi/2$ и $\omega t = 0$, находим

$$gU_m = I_m \cos\varphi; \quad \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)U_m = I_m \sin\varphi.$$

Возведя первое и второе равенства в квадрат и сложив, получим

$$I_m = U_m\sqrt{g^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}.$$

Поделив обе части этого выражения на $\sqrt{2}$, получим связь между действующими током и напряжением:

$$I = U\sqrt{g^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2} = Uy.$$

Поделив второе равенство на первое, найдем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1/(\omega L) - \omega C}{g}.$$

Величину

$$y = \frac{I}{U} = \sqrt{g^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}$$

называют полной проводимостью цепи. Проводимость g называют активной проводимостью. Величину $\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)$, имеющую также размерность проводимости, называют реактивной проводимостью цепи и обозначают b. При этом член $1/(\omega L)$ называют индуктивной проводимостью и обозначают b_L, а член ωC называют емкостной проводимостью и обозначают b_C. Имеем

$$b = \frac{1}{\omega L} - \omega C = b_L - b_C; \quad y = \sqrt{g^2 + b^2}.$$

На рис. 4.16 изображена векторная диаграмма для этой цепи для случая $1/(\omega L) > \omega C$. Ток в первом участке совпадает по фазе с напряжением, ток в конденсаторе опережает по фазе на угол $\pi/2$ напряжение, а ток в катушке отстает по фазе на угол $\pi/2$ от напряжения. То обстоятельство, что b образуется как разность b_L и b_C, объясняется тем, что токи в конденсаторе и в катушке сдвинуты друг относительно друга на угол π, т. е. в любой момент времени направлены по отношению к общим зажимам второй и третьей ветвей в противоположные стороны. Эти токи сдвинуты относительно тока в первой ветви на угол $\pi/2$, вследствие чего полная проводимость определяется не арифметическим сложением g и b, а формулой

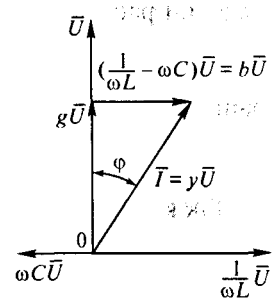


Рис. 4.16

$$y = \sqrt{g^2 + b^2}.$$

При $b_L = b_C$ имеет место *резонанс* в цепи и ток i равен току i_g в первой ветви. При $1/(\omega L) > \omega C$ ток через катушку больше тока через конденсатор (рис. 4.16) и общий ток i отстает по фазе на угол φ от напряжения, причем $0 < \varphi \le \pi/2$. При $\omega C > 1/(\omega L)$ ток через конденсатор больше тока через катушку и общий ток i опережает по фазе напряжение, причем $-\pi/2 \le \varphi < 0$.

4.6. Активная, реактивная и полная мощности

Активной мощностью P в электрической цепи при периодических процессах называют среднее значение мощности за полный период:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T ui\,dt,$$

где $p = ui$ — мгновенная мощность.

Если напряжение u на зажимах цепи и ток i в цепи являются синусоидальными функциями времени: $u = U_m \sin \omega t$; $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$, то

$$P = \frac{U_m I_m}{2T} \int_0^T 2 \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi)\, dt = \frac{UI}{T} \int_0^T [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)]\, dt.$$

Учитывая, что $\int_0^T \cos(2\omega t - \varphi)\, dt = 0$, получаем выражение для активной мощности при синусоидальном процессе:

$$P = UI \cos \varphi.$$

Множитель $\cos \varphi$ называют коэффициентом мощности. Так как $\cos \varphi \le 1$, то $P \le UI$. Только в предельном случае, когда $\varphi = 0$ и $\cos \varphi = 1$, имеем $P = UI$. В другом предельном случае, когда $\varphi = \pm \pi/2$ и $\cos \varphi = 0$, имеем $P = 0$.

Электрические машины, трансформаторы и другие электротехнические устройства рассчитывают на определенное номинальное напряжение U, обусловленное изоляцией этих устройств, и на определенный номинальный ток I, обусловленный нагревом проводников этих устройств. Соответственно, наивысшее использование генерирующих и преобразующих электромагнитную энергию устройств будет в случае, когда коэффициент мощности приемников, на которые они работают, равен единице.

Максимальное приближение к единице коэффициента мощности предприятий, являющихся приемниками энергии, может быть осуществлено путем рационального конструирования оборудования этих предприятий, а также рациональной организацией их работы, например максимальной загрузкой двигателей, так как при холостом ходе $\cos \varphi$ двигателей обычно низок.

Так как обычно для предприятий $\varphi > 0$ и, следовательно, ток имеет индуктивный характер, то радикальной мерой повышения $\cos \varphi$ может быть установка на этих предприятиях конденсаторов, включаемых параллельно другим устройствам.

Из диаграммы на рис. 4.11 имеем $U \cos \varphi = U_r = Ir$, и из диаграммы на рис. 4.16 получаем $I \cos \varphi = Ug$. Следовательно, для активной мощности можем написать следующие выражения:

$$P = UI \cos \varphi = I^2 r = U^2 g.$$

Величину $S = UI$ называют полной мощностью. Смысл введения понятия полной мощности ясен из сказанного выше. Если под U и I понимать номинальные значения, т. е. допускаемые при номинальном режиме действующие значения напряжения и тока электрической машины, трансформатора или других преобразователей энергий, то произведение $S = UI$ дает наибольшую возможную активную их мощность при наиболее благоприятных условиях, т. е. при $\cos \varphi = 1$.

Имеем следующие выражения для полной мощности:

$$S = UI = I^2 z = U^2 y.$$

Вводят в рассмотрение еще так называемую реактивную мощность $Q = UI \sin \varphi$.

Практическое значение введения понятия реактивной мощности вытекает, например, из следующего. Обычный счетчик энергии дает значение энергии, отданной приемнику за некоторый промежуток времени τ. Эту энергию можно записать в форме

$$\int_0^\tau P\,dt = \int_0^\tau UI\cos\varphi\,dt,$$

если заметное изменение P происходит только за большое число периодов T тока и если, соответственно, τ во много раз превосходит T. Однако показания такого счетчика не дают возможности судить о том, при каком коэффициенте мощности cos φ работает потребитель энергии. Такая оценка возможна, если наряду с обычным счетчиком, показывающим действительную энергию, передаваемую приемнику, включить на зажимы приемника счетчик, показывающий величину интеграла реактивной мощности Q за тот же промежуток времени τ:

$$\int_0^\tau Q\,dt = \int_0^\tau UI\sin\varphi\,dt.$$

Очевидно, чем больше показание этого счетчика по сравнению с показанием обычного счетчика, тем ниже среднее значение cos φ приемника за рассматриваемый промежуток времени.

Величину P можно измерить с помощью обычного ваттметра, а величину Q — с помощью специально предназначенного для этой цели электроизмерительного прибора. Зная P и Q, можно определить sin φ и cos φ потребителя энергии в момент измерения. Однако представляет интерес именно знать характер работы потребителя за длительный промежуток времени. С этой целью и используются счетчики, дающие названные интегральные величины.

Понятием реактивной мощности Q широко пользуются также при расчете электрических сетей переменного тока.

Из диаграммы на рис. 4.11 имеем $U\sin\varphi = Ix$, и из диаграммы рис. 4.16 получаем $I\sin\varphi = Ub$. Следовательно, для реактивной мощности существуют выражения

$$Q = UI\sin\varphi = I^2x = U^2b.$$

Для приемников энергии P и S всегда положительны, но реактивная мощность Q положительна лишь при $\varphi > 0$, т. е. для индуктивных цепей, а при $\varphi < 0$, т. е. для емкостных цепей, она отрицательна.

Заметим, что при $\varphi = \pm\pi/2$, например для конденсаторов или катушек без потерь, абсолютное значение реактивной мощности совпадает с полной мощностью.

Обратим внимание, что понятие активной мощности как средней за период T мощности справедливо для любых периодических напряжений и токов определенной частоты $f = 1/T$ и не обязательно синусоидальных. Понятие же реактивной мощности Q в виде $Q = UI\sin\varphi$, так же как и выражение активной мощности в форме $P = UI\cos\varphi$, справедливо лишь при синусоидальном процессе.

При выводе всех вышеприведенных соотношений предполагалось, что на зажимах цепи действует напряжение U. Если предположить, что к зажимам цепи

приключен идеальный источник синусоидальной ЭДС, имеющей действующее значение E, то все соотношения останутся в силе с заменой U на E, например:

$$I = E/z = Ey; \qquad S = EI = I^2 z = E^2 y;$$
$$P = EI\cos\varphi = I^2 r = E^2 g; \qquad Q = EI\sin\varphi = I^2 x = E^2 b.$$

4.7. Мгновенная мощность и колебания энергии в цепи синусоидального тока

Мгновенная мощность $p = ui$ цепи переменного тока является функцией времени.

Рассмотрим энергетические процессы в цепи, состоящей из последовательно соединенных участков r, L и C (рис. 4.17). Уравнение для напряжений в этой цепи имеет вид

$$u = u_r + u_L + u_C = ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}.$$

Соответственно, для мгновенных мощностей на зажимах цепи и на отдельных участках цепи получим уравнение

$$p = ui = p_r + p_L + p_C = u_r i + u_L i + u_C i = i^2 r + Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} =$$
$$= i^2 r + \frac{d}{dt}\left(\frac{Li^2}{2}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C}\right) = i^2 r + \frac{d}{dt}(W_м) + \frac{d}{dt}(W_э).$$

Из последнего выражения видим, что мощность $p_r = i^2 r$ на участке с сопротивлением r является величиной всегда положительной и характеризует необратимый процесс поглощения энергии. Мощность $p_L = \frac{d}{dt}(W_м)$ определяет при $p_L > 0$ скорость поступления энергии в магнитное поле катушки и при $p_L < 0$ — скорость возвращения энергии из этого поля. Мощность $p_C = \frac{d}{dt}(W_э)$ определяет при $p_C > 0$ скорость поступления энергии в электрическое поле конденсатора, а при $p_C < 0$ — скорость возвращения энергии из этого поля.

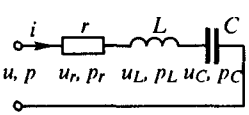


Рис. 4.17

Пусть напряжение u и ток i являются синусоидальными функциями времени:

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi); \quad i = I_m \sin\omega t.$$

Здесь, так же как и в § 4.4, начальная фаза тока принята равной нулю ($\psi_i = 0$), что удобно, так как ток является общим для всех участков цепи. При этом начальная фаза напряжения u оказывается равной φ ($\psi_u = \varphi$). Мгновенные напряжения на отдельных участках при этом равны (см. § 4.4):

$$u_r = ri = rI_m \sin\omega t; \quad u_L = \omega L I_m \cos\omega t; \quad u_C = -\frac{I_m}{\omega C}\cos\omega t.$$

Соответственно, для мгновенных мощностей на отдельных участках цепи получаем выражения

$$p_r = u_r i = r I_m^2 \sin^2 \omega t = r(\sqrt{2}\, I)^2 \left(\frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right) = UI \cos \varphi (1 - \cos 2\omega t);$$

$$p_L = u_L i = \omega L I_m^2 \cos \omega t \sin \omega t = \omega L (\sqrt{2}\, I)^2 \frac{1}{2} \sin 2\omega t = U_L I \sin 2\omega t;$$

$$p_C = u_C i = -\frac{I_m^2}{\omega C} \cos \omega t \sin \omega t = \frac{-(\sqrt{2}\, I)^2}{\omega C} \frac{1}{2} \sin 2\omega t = -U_C I \sin 2\omega t.$$

Суммарная мощность на конденсаторе и катушке

$$p_x = p_L + p_C = (U_L - U_C) I \sin 2\omega t = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I^2 \sin 2\omega t =$$

$$= x I^2 \sin 2\omega t = UI \sin \varphi \sin 2\omega t.$$

Мощность на зажимах всей цепи выражается в виде

$$p = p_r + p_L + p_C = p_r + p_x = UI \cos \varphi - UI \cos (2\omega t + \varphi).$$

Из полученных выражений видно, что средняя за период мощность на катушке и конденсаторе равна нулю. Средняя за период мощность, т. е. активная мощность, на зажимах всей цепи равна средней за период мощности на участке с сопротивлением r:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T p_r \, dt = UI \cos \varphi.$$

Амплитуда колебания мощности p_x равна абсолютному значению реактивной мощности $Q = UI \sin \varphi$.

Весьма важно заметить, что все мгновенные мощности изменяются с частотой 2ω, в два раза превышающей частоту ω тока и напряжения.

На рис. 4.18 одна под другой даны диаграммы тока i, напряжений u_r, u_L, u_C, $u_x = u_L - u_C$, u и мощностей p_r, p_L, p_C, p_x, p.

На диаграмме рис. 4.18, *а* изображены величины на участке r. Мы видим, что в любой момент времени $p_r > 0$ и среднее значение величины p_r равно $P = UI \cos \varphi$.

На диаграмме рис. 4.18, *б* изображены величины, относящиеся к катушке. Здесь среднее значение величины p_L равно нулю. Энергия запасается в магнитном поле катушки, когда ток по абсолютному значению возрастает. При этом $p_L > 0$. Энергия возвращается из магнитного поля катушки, когда ток по абсолютному значению убывает. При этом $p_L < 0$.

На рис. 4.18, *в* даны величины, относящиеся к конденсатору. Здесь так же, как и на катушке,

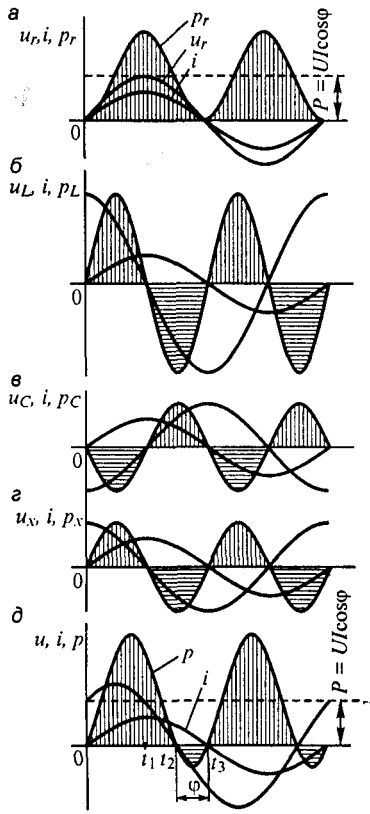


Рис. 4.18

среднее значение мощности равно нулю. Энергия запасается в электрическом поле конденсатора, когда напряжение на конденсаторе по абсолютному значению возрастает. При этом $p_C > 0$. Энергия возвращается из электрического поля конденсатора, когда напряжение на конденсаторе по абсолютному значению убывает. При этом $p_C < 0$.

Из сопоставления диаграмм рис. 4.18, *б* и *в* видим, что в частном случае, для которого построены эти диаграммы, амплитуда напряжения на катушке больше амплитуды напряжения на конденсаторе, т. е. $U_L > U_C$. Это соответствует соотношению $\omega L > 1/(\omega C)$. На рис. 4.18, *г* для этого случая даны кривые тока, напряжения и мощности p_x на участке цепи, состоящем из катушки и конденсатора. Характер кривых здесь такой же, как и на зажимах катушки, так как в данном случае $\omega L > 1/(\omega C)$. Однако амплитуды напряжения u_x и мгновенной мощности p_x меньше амплитуд величин u_L и p_L. Это последнее является результатом того, что напряжения u_L и u_C противоположны по фазе.

На диаграмме рис. 4.18, *д* приведены величины на зажимах всей цепи, которые получаются суммированием величин на диаграммах рис. 4.18, *а*, *б* и *в* или *а* и *г*. Среднее значение мощности p равно $P = UI \cos \varphi$. Колебания около этого среднего значения происходят с амплитудой UI, что видно из аналитического выражения для p. Ток i отстает от напряжения u на угол φ. В интервале времени от 0 до t_2 мгновенная мощность на зажимах цепи положительна ($p > 0$) и энергия поступает от источника в цепь. В интервале времени от t_2 до t_3 мгновенная мощность на зажимах цепи отрицательна ($p < 0$) и энергия возвращается источнику.

Если мгновенная мощность на зажимах пассивной цепи положительна, то такая мощность называется мгновенной потребляемой мощностью. Если мгновенная мощность на зажимах пассивной цепи отрицательна, то такая мощность называется мгновенной выдаваемой мощностью.

Понятие мгновенной мощности позволяет в более формализованном виде определить понятие реактивных и активных элементов электрической цепи. Так, реактивными элементами можно называть такие, для которых интеграл мгновенной мощности за определенный интервал времени равен нулю.

В активных элементах электрической цепи интеграл мгновенной мощности за определенный интервал времени является отрицательной величиной — этот элемент является источником энергии — он выдает энергию. В пассивных элементах цепей интеграл мгновенной мощности за определенный интервал времени положителен — этот элемент потребляет энергию.

Так как $\varphi < \pi/2$ и, следовательно, $\cos \varphi > 0$, то поступающая в цепь энергия, определяемая положительной площадью кривой $p(t)$, больше возвращаемой источнику энергии, определяемой отрицательной площадью кривой $p(t)$.

На рис. 4.19 для различных интервалов времени показаны штриховой стрелкой действительное направление тока и знаками «плюс» (+) и «минус» (–) действительные направления напряжений на зажимах цепи и на всех участках. Стрелками с хвостовым оперением указаны направления потоков энергии в соответствующие интервалы времени.

Схема на рис. 4.19, *а* соответствует интервалу времени от 0 до t_1, в течение которого ток возрастает от нуля до максимального значения. В это время энергия

запасается в катушке. Так как напряжение на конденсаторе по своему абсолютному значению падает, то энергия электрического поля, запасенная в конденсаторе, возвращается и переходит в энергию магнитного поля катушки. В данном случае $\omega L > 1/(\omega C)$ и $p_L > p_C$, поэтому в катушку поступает дополнительная энергия из источника, питающего цепь. Питающий цепь источник покрывает также энергию, поглощаемую сопротивлением r.

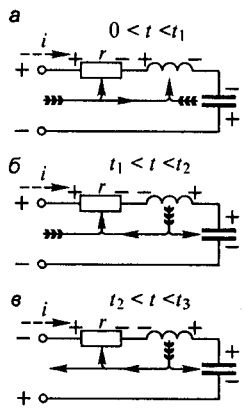


Рис. 4.19

Схема на рис. 4.19, *б* соответствует интервалу времени от t_1 до t_2. Ток i в этом интервале времени убывает, и энергия возвращается из магнитного поля катушки, частично поступая в конденсатор, который при этом заряжается, и частично превращаясь в теплоту на участке с сопротивлением r. В этом интервале времени ток имеет еще достаточно большое значение и, соответственно, значительна мощность i^2r. Поэтому источник, так же как и в предыдущем интервале времени, посылает энергию в цепь, частично компенсирующую потери в участке с сопротивлением r. Момент t_2 характерен тем, что величина i^2r уменьшилась настолько, что скорость уменьшения энергии в катушке обусловливает скорость поступления энергии в конденсатор и на участок с сопротивлением r. В этот момент мощность на зажимах всей цепи равна нулю ($p = 0$).

Схема на рис. 4.19, *в* соответствует следующему интервалу времени от t_2 до t_3, в течение которого ток уменьшается от значения при $t = t_2$ до нуля. В этот промежуток времени энергия продолжает возвращаться из катушки, поступая в конденсатор, на участок с сопротивлением r и в источник, подключенный к зажимам цепи. В этот интервал времени $p < 0$.

Весь рассмотренный интервал $0 \le t \le t_3$ соответствует половине периода тока ($T/2$). В нем полностью завершается один цикл колебания энергии, так как период мгновенной мощности в два раза меньше периода тока. В следующую половину периода изменения тока энергетический процесс повторяется и только действительные направления тока и всех напряжений меняются на противоположные.

4.8. Эквивалентные параметры сложной цепи переменного тока, рассматриваемой в целом как двухполюсник

В § 4.4 и 4.5 рассмотрены простейшие цепи переменного тока. Для любой сложной цепи с постоянными параметрами при синусоидальном напряжении на ее входных зажимах общий входной ток цепи будет также синусоидальным и в общем случае сдвинут по отношению к напряжению на угол φ.

Рассматривая всю цепь в целом как двухполюсник и не интересуясь ее внутренним строением, можно характеризовать ее некоторыми эквивалентными параметрами. На рис. 4.20 эта двухполюсная цепь изображена в виде прямоугольника.

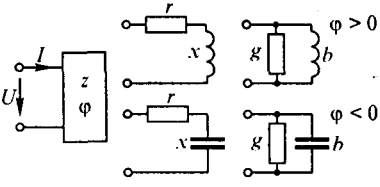


Рис. 4.20

Назовем эквивалентным полным сопротивлением всей цепи отношение действующих напряжения и тока на входе цепи:

$$z_э = \frac{U}{I}.$$

Оно может быть измерено с помощью вольтметра и амперметра.

Эквивалентное активное сопротивление всей цепи определим как отношение активной мощности на зажимах цепи к квадрату действующего тока:

$$r_э = \frac{P}{I^2}.$$

Эквивалентное реактивное сопротивление всей цепи определим так, чтобы сохранилась связь $z_э = \sqrt{r_э^2 + x_э^2}$, которая имела место для рассмотренных выше простейших цепей, т. е.

$$x_э = \pm\sqrt{z_э^2 - r_э^2},$$

причем знак «плюс» ставим, если $\varphi > 0$, и знак минус, если $\varphi < 0$. Для определения знака угла φ нужно располагать фазометром или можно, например, поступить следующим образом: включив последовательно с цепью катушку, имеющую индуктивное сопротивление, меньшее абсолютного значения $|x_э|$ рассматриваемой цепи, повторно произвести измерение величин $z'_э$, $r'_э$ и вычислить $x'_э$. Если при этом реактивное сопротивление увеличится, т. е. $|x'_э| > |x_э|$, то это значит, что $\varphi > 0$. В противном случае $\varphi < 0$.

Аналогично определим эквивалентные проводимости из соотношений:

$$y_э = \frac{I}{U}, \quad g_э = \frac{P}{U^2}, \quad b_э = \pm\sqrt{y_э^2 - g_э^2},$$

причем, так же как и для $x_э$, будем считать $b_э > 0$ при $\varphi > 0$ и $b_э < 0$ при $\varphi < 0$.

В дальнейшем условимся опускать индекс «э».

Установим связь между эквивалентными сопротивлениями и проводимостями и углом φ. Для активного сопротивления имеем

$$r = \frac{P}{I^2} = \frac{UI\cos\varphi}{I^2} = z\cos\varphi$$

и из соотношения $x^2 = z^2 - r^2 = z^2(1 - \cos^2\varphi) = z^2\sin^2\varphi$ для реактивного сопротивления получаем

$$x = z\sin\varphi.$$

В последнем выражении при извлечении квадратного корня из $z^2\sin^2\varphi$ взят знак «плюс», так как мы условились считать $x > 0$ при $\varphi > 0$.

Соответственно, для активной проводимости получим выражение

$$g = \frac{P}{U^2} = \frac{UI\cos\varphi}{U^2} = y\cos\varphi$$

и из соотношения $b^2 = y^2 - g^2 = y^2(1 - \cos^2\varphi) = y^2 \sin^2\varphi$ для реактивной проводимости найдем

$$b = y \sin\varphi.$$

Из полученных выражений имеем

$$\cos\varphi = \frac{r}{z} = \frac{g}{y}; \quad \sin\varphi = \frac{x}{z} = \frac{b}{y}.$$

Учитывая эти соотношения, получаем связь между эквивалентными сопротивлениями и проводимостями:

$$y = \frac{1}{z}, \quad g = \frac{r}{z^2} = \frac{r}{r^2 + x^2}, \quad b = \frac{x}{z^2} = \frac{x}{r^2 + x^2};$$

$$z = \frac{1}{y}, \quad r = \frac{g}{y^2} = \frac{g}{g^2 + b^2}, \quad x = \frac{b}{y^2} = \frac{b}{g^2 + b^2}.$$

Сказанное выше проиллюстрируем векторными диаграммами. На рис. 4.21 изображены векторы тока и напряжения для двух случаев: $\varphi > 0$ и $\varphi < 0$. Формально всегда можно разложить вектор напряжения на две составляющие — вдоль вектора тока и перпендикулярно ему. Эти составляющие, соответственно, будут равны $U\cos\varphi = U\frac{r}{z} = Ir$ и $U\sin\varphi = U\frac{x}{z} = Ix$. Эти составляющие иногда называют **активной и реактивной составляющими приложенного напряжения**, а образуемые ими и вектором $\bar{U}$ прямоугольные треугольники — **треугольниками напряжения**. Разделив все стороны этих треугольников на I, получим **треугольники сопротивлений**, катетами которых являются эквивалентные активные и реактивные сопротивления, а гипотенузой — эквивалентное полное сопротивление.

Аналогично можно разложить вектор тока на составляющие вдоль вектора напряжения и перпендикулярно ему. Эти составляющие (рис. 4.22) равны $I\cos\varphi = I\frac{g}{y} = Ug$ и $I\sin\varphi = I\frac{b}{y} = Ub$. Их иногда называют **активной и реактивной составляющими тока**, а образуемые ими и вектором $\bar{I}$ прямоугольные треугольники — **треугольниками тока**. Разделив все стороны этих треугольников на U, получим **треугольники проводимостей**, катетами которых являются эквивалентные активные и реактивные проводимости, а гипотенузой — эквивалентная полная проводимость.

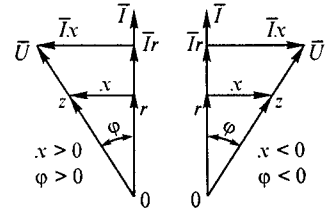


Рис. 4.21

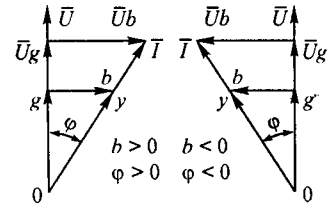


Рис. 4.22

Отметим, что как составляющие треугольников сопротивлений, так и составляющие треугольников проводимостей не являются вращающимися векторами, так как r, x, z, g, b и y не изображают функций времени, как это имеет место для векторов $\bar{U}$ и $\bar{I}$.

Обратим внимание также на то, что разложение напряжения на активную и реактивную составляю-

щие (рис. 4.21) имеет физический смысл только для простой последовательной цепи, рассмотренной в § 4.4, так как при этом активная составляющая равна падению напряжения на участке с сопротивлением r и реактивная составляющая равна падению напряжения на участке, содержащем конденсатор и катушку. Для параллельной цепи (см. § 4.5), а также для сложной цепи такое разложение является чисто формальным. Соответственно, разложение тока на активную и реактивную составляющие имеет физический смысл только для простой параллельной цепи, рассмотренной в § 4.5, а в общем случае является формальным.

4.9. Схемы замещения двухполюсника при заданной частоте

Введенные выше эквивалентные параметры двухполюсника сложным образом зависят от структуры цепи двухполюсника и конкретных параметров ветвей этой цепи. Эти эквивалентные параметры в общем случае сложным образом зависят от частоты приложенного напряжения. Для заданной частоты и конкретной цепи они являются вполне определенными, что дает возможность заменить двухполюсник для этой частоты схемами замещения, изображенными на рис. 4.20.

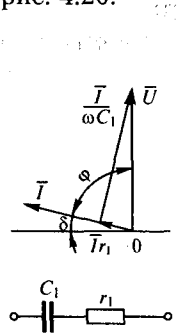


Рис. 4.23

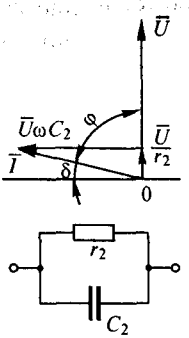


Рис. 4.24

Заметим, что индуктивности (или, соответственно, емкости), а также сопротивления в последовательных и параллельных схемах замещения различны, в чем легко убедиться из полученных в предыдущем параграфе связей между r, x, g и b.

Например, конденсатор с потерями в диэлектрике может быть заменен схемами замещения, показанными на рис. 4.23, 4.24, соответствующими схемам на рис. 4.20 при $\varphi < 0$. Процессы в таком конденсаторе принято характеризовать так называемым углом потерь δ, дополняющим абсолютное значение угла φ до $\pi/2$. Получим связь между параметрами параллельной и последовательной схем замещения. Имеем

$$\frac{1}{r_2} = g_2 = \frac{r_1}{r_1^2 + 1/(\omega^2 C_1^2)} \quad \text{и} \quad b_2 = -\omega C_2 = \frac{-1/(\omega C_1)}{r_1^2 + 1/(\omega^2 C_1^2)},$$

откуда

$$r_2 = r_1\left(1 + \frac{1}{r_1^2\omega^2 C_1^2}\right) = r_1\left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\delta}\right)$$

и

$$C_2 = \frac{C_1}{1 + r_1^2\omega^2 C_1^2} = C_1\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\delta},$$

так как

$$\operatorname{tg}^2\delta = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{r_1^2}{1/(\omega^2 C_1^2)} = r_1^2\omega^2 C_1^2.$$

Таким образом, $r_2 > r_1$ и $C_2 < C_1$. Так как обычно $\operatorname{tg}\delta \ll 1$, то $r_2 \gg r_1$, а $C_1 \approx C_2$.

При значительном изменении частоты от нее зависят все параметры: r_1, C_1, g_2 и C_2 обеих схем замещения. Это следует из того, что потери в конденсаторе при переменном напряжении приблизительно пропорциональны квадрату напряжения и первой степени частоты, и поэтому g_2 изменяется приблизительно пропорционально частоте. Соответственно, r_1 является функцией частоты. Следует учесть, что и $\operatorname{tg}\delta$, вообще говоря, изменяется с изменением частоты. При очень высоких частотах приходится считаться с индуктивностью, которой обладает конденсатор. Все это приводит к тому, что эквивалентные сопротивления и проводимости конденсатора, получаемые рассмотренным в предыдущем параграфе путем, сложным образом зависят от частоты.

Аналогичную картину имеем и в другом простом случае — для одной реальной индуктивной катушки. При низких частотах катушка представляет собой индуктивное сопротивление, но при высоких частотах наличие емкости между витками катушки может привести к тому, что ее эквивалентное сопротивление приобретет емкостный характер. Активное сопротивление катушки также зависит от частоты вследствие влияния поверхностного эффекта и вихревых токов, что будет пояснено в следующем параграфе.

Более того, по измерениям параметров индуктивной катушки при низкой частоте невозможно определить реальные параметры этого элемента. Для иллюстрации этого положения рассмотрим также приближенную схему замещения индуктивной катушки, представленную на рис. 4.25. Последовательный участок имеет эквивалентные параметры

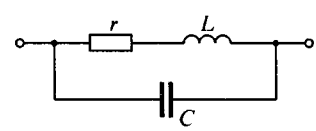


Рис. 4.25

$$g = \frac{r}{r^2 + \omega^2 L^2} \quad \text{и} \quad b = \frac{\omega L}{r^2 + \omega^2 L^2}.$$

Следовательно, вся цепь, состоящая из параллельного соединения этого участка с конденсатором, имеет параметры

$$g_э = \frac{r}{r^2 + \omega^2 L^2} \quad \text{и} \quad b_э = \frac{\omega L}{r^2 + \omega^2 L^2} - \omega C.$$

Преобразуем эти параметры в $r_э$ и $x_э$. Имеем

$$r_э = \frac{g_э}{g_э^2 + b_э^2} = \frac{r}{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega rC)^2}; \quad x_э = \frac{b_э}{g_э^2 + b_э^2} = \frac{\omega L(1-\omega^2 LC) - \omega r^2 C}{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega rC)^2}.$$

При весьма низких частотах, пренебрегая слагаемыми, пропорциональными ω^2, можно записать

$$r_э = r; \quad x_э = \omega(L - r^2 C) = \omega L\left(1 - \frac{r^2 C}{L}\right) = \omega L_э \neq \omega L.$$

Из последнего выражения видно, что даже при весьма низких частотах эквивалентная индуктивность не равна реальной индуктивности катушки. Это неравенство — следствие того, что даже при постоянном токе за счет падения напряжения в активном сопротивлении индуктивной катушки возникает электрическое поле, энергия $W_э$ которого должна быть учтена. Действительно,

$$W_э = \frac{CU_C^2}{2} = \frac{C(ri)^2}{2} = \frac{Cr^2 i^2}{2} = \frac{Cr^2}{L}\frac{Li^2}{2} = \frac{Cr^2}{L}W_м.$$

Еще раз убеждаемся в том, что схемы замещения элементов цепи прежде всего должны правильно отображать картину распределения энергии в системе. Проблема же восстановления схемы и параметров реальной цепи по измеренным на ее входе величинам решается при помощи синтеза электрических цепей.

Из сказанного вытекает, что, определив теоретически или экспериментально параметры цепи или отдельных ее элементов при одной частоте, в частности, при постоянном токе, нельзя пользоваться этими параметрами при другой частоте, не убедившись предварительно в допустимости этого.

4.10. Влияние различных факторов на эквивалентные параметры цепи

В предыдущем параграфе было сказано, что любые сложные цепь или устройство, содержащие два входных зажима, можно представить в виде двухполюсника и охарактеризовать их эквивалентными параметрами r, x, z, g, b и y. Было отмечено, что эти параметры сложным образом зависят от конкретной структуры цепи и от входящих в нее элементов. Вместе с тем эти параметры могут зависеть от целого ряда факторов. Так, например, если в состав двухполюсника входят асинхронные двигатели, то их параметры, а соответственно, и эквивалентные параметры двухполюсника будут зависеть от нагрузки на валу двигателей. Если в состав двухполюсника входит связанный с антенной колебательный контур радиостанции, то на эквивалентные параметры влияет также и излучение энергии.

В виде примера сложной зависимости эквивалентных параметров от различных факторов укажем случай для синхронного двигателя, эквивалентное реактивное сопротивление которого может быть отрицательным, хотя в цепи и не содержатся конденсаторы. Такой емкостный режим синхронного двигателя имеет место при достаточно большом токе в обмотке возбуждения, превышающем номинальный ток возбуждения. Пояснить это можно следующим образом. Установим ток возбуждения в роторе таким, чтобы ЭДС, индуцируемая в обмотке статора потоком вращающегося ротора, точно уравновешивала приложенное к обмотке статора от сети напряжение. Естественно, при этом ротор должен вращаться с помощью постороннего двигателя на его валу, так как ток в обмотке статора будет равен нулю и энергия из сети не поступает. При отсутствии такого постороннего двигателя от сети будет поступать незначительный активный ток, обеспечивающий мощность, необходимую для покрытия потерь холостого хода в синхронном двигателе. Назовем ток возбуждения в обмотке ротора при таком режиме номинальным. Если уменьшить ток возбуждения ниже номинального, то ЭДС, индуцируемая в обмотке статора уменьшенным потоком ротора, также уменьшится и из сети пойдет намагничивающий ток, увеличивающий результирующий поток. Такой ток будет носить индуктивный характер.

Если увеличить ток возбуждения выше номинального, то ЭДС, индуцируемая в обмотке статора увеличившимся потоком ротора, может превысить приложенное напряжение и из сети пойдет размагничивающий ток, который будет носить емкостный характер.

На эквивалентные параметры влияет также частота. Такое влияние имеет место, как мы видели, даже для самых простых элементов цепи, таких как реостат, индуктивная катушка и конденсатор. Это связано, в частности, с явлением *поверхностного эффекта*, заключающегося в том, что переменный ток распределяется неравномерно по сечению провода — плотность тока у поверхности провода больше, чем во внутренних элементах сечения провода. Неравномерность распределения тока по сечению проводов приводит к увеличению активного сопротивления и уменьшению индуктивности цепи, причем эти обстоятельства проявляются все более сильно с увеличением частоты. Анализ явления поверхностного эффекта будет произведен в последней части курса.

На эквивалентных параметрах цепи сказывается также влияние *вихревых токов*, называемых также токами Фуко, возникающих в проводящих телах, расположенных в переменном магнитном поле электрической цепи. *Потери на вихревые токи* приводят к увеличению эквивалентного активного сопротивления цепи. Вопросу о расчете потерь на вихревые токи будет уделено внимание при изложении теории нелинейных цепей и теории электромагнитного поля.

Все сказанное свидетельствует о сложной зависимости эквивалентных параметров цепи от различных физических величин, в том числе от частоты. Исследуя процессы в цепи при неизменной частоте, будем считать параметры ее участков вполне определенными. Но и изучая зависимость эквивалентных параметров от частоты при изменении последней в некоторых ограниченных пределах, будем полагать сопротивления r реостатов, индуктивности L катушек и емкости C конденсаторов постоянными. Во всех последующих главах этой части, за исключением гл. 8, где зависимость параметров от частоты будет рассмотрена в весьма общей форме с учетом возможной зависимости от частоты и величин r, L и C, также будем предполагать, что r, L и C постоянны.

Глава пятая

Методы расчета электрических цепей при установившихся синусоидальном и постоянном токах

5.1. Комплексный метод

В настоящей главе рассмотрим методы расчета установившихся режимов в линейной электрической цепи, когда ЭДС, токи и напряжения являются синусоидальными функциями времени. Как было отмечено ранее, определение токов и напряжений в таких цепях связано с нахождением частных решений неоднородных дифференциальных уравнений, записанных на основе законов Кирхгофа.

Вычисление непосредственно по первому закону Кирхгофа некоторого тока по другим уже найденным токам, сходящимся к данному узлу цепи, или вычисление по второму закону Кирхгофа падения напряжения на некотором участке контура цепи по уже найденным падениям напряжения на других участках контура и ЭДС, входящим в данный контур цепи, требуют суммирования синусоидальных токов или напряжений и ЭДС. Однако эта операция связана с громоздкими и трудоемкими вычислениями.

Громоздкость подобных вычислений является следствием того, что синусоидальная величина — ток, напряжение, ЭДС — при заданной частоте ω определяется *двумя* величинами — амплитудой и начальной фазой.

Существенное упрощение достигается изображением синусоидальных функций времени комплексными числами $\dot{A}$, так как каждое комплексное число содержит в себе *две* величины — модуль A и аргумент ψ_A при показательной форме записи

$$\dot{A} = Ae^{j\psi_A}$$

или вещественную $a_1 = A\cos\psi_A$ и мнимую $ja_2 = jA\sin\psi_A$ составляющие при алгебраической и тригонометрической формах записи

$$\dot{A} = a_1 + ja_2 = A\cos\psi_A + jA\sin\psi_A,$$

где $j = \sqrt{-1}$ и e — основание натуральных логарифмов.

Метод, основанный на символическом изображении действительных синусоидальных функций времени комплексными числами, введенный в теорию переменных токов Штейнмецом, а затем в широкое употребление в России академиком В. Ф. Миткевичем, будем называть комплексным методом. Его называют также символическим методом, так как он основан на символическом изображении действительных синусоидальных функций времени комплексными числами.

Для вещественной и мнимой частей комплексного числа употребляют также обозначения $a_1 = \mathrm{Re}\,(\dot{A})$, $a_2 = \mathrm{Im}\,(\dot{A})$.

Существуют следующие очевидные связи:

$$a_1 = \mathrm{Re}(\dot{A}) = A\cos\psi_A; \quad a_2 = \mathrm{Im}\,(\dot{A}) = A\sin\psi_A; \quad A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}; \quad \psi_A = \mathrm{arctg}\frac{a_2}{a_1}.$$

Заметим также, что

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}};\quad \frac{1}{j} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}};\quad j^2 = -1.$$

Две комплексные величины, имеющие равные модули и равные, но противоположные по знаку аргументы, называют сопряженными. Если имеем комплексное число $\dot{A} = Ae^{j\psi_A} = a_1 + ja_2$, то сопряженное ему комплексное число запишется в форме $\dot{A}^* = Ae^{-j\psi_A} = a_1 - ja_2$. Важно отметить следующие свойства сопряженных комплексных чисел:

$$\dot{A}\dot{A}^* = Ae^{j\psi_A}Ae^{-j\psi_A} = A^2;$$

$$\mathrm{Re}\,(\dot{A}) = \frac{1}{2}(\dot{A} + \dot{A}^*);\quad \mathrm{Im}\,(\dot{A}) = \frac{1}{2j}(\dot{A} - \dot{A}^*).$$

Пусть имеется синусоидально изменяющийся ток $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$. Его можно представить в форме

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \frac{1}{2j}\left[I_m e^{j(\omega t+\psi_i)} - I_m e^{-j(\omega t+\psi_i)}\right] = \mathrm{Im}\left[I_m e^{j(\omega t+\psi_i)}\right],$$

что видно также из соотношения

$$I_m e^{j(\omega t+\psi_i)} = I_m \cos(\omega t + \psi_i) + jI_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Комплексное число

$$I_m e^{j(\omega t+\psi_i)} = I_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t} = \dot{I}_m e^{j\omega t}$$

и будем рассматривать как символическое изображение действительного синусоидального тока $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$; оно, так же как и величина i, определяется при заданной частоте ω *двумя* величинами — амплитудой I_m и начальной фазой ψ_i. Комплексное число $I_m e^{j\psi_i}$ называют комплексной амплитудой тока. Вводя знак изображения $\Rightarrow$, будем писать

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \Rightarrow I_m e^{j(\omega t+\psi_i)} = \dot{I}_m e^{j\omega t}.$$

Таким образом, для перехода от действительной синусоидальной функции, назовем ее оригиналом, к ее изображающей комплексной величине необходимо модуль последней взять равным амплитуде синусоидальной функции и аргумент взять равным аргументу синусоидальной функции.

Для обратного перехода от комплексного числа, изображающего действительную функцию, к самой действительной функции, т. е. к оригиналу, необходимо взять коэффициент при j мнимой части комплексного числа.

Рассмотрим теперь выражение для производной по времени от синусоидального тока

$$\frac{di}{dt} = \omega I_m \cos(\omega t + \psi_i) = \omega I_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right).$$

Из только что сказанного вытекает, что ее изображение будет иметь вид

$$\omega I_m e^{j\left(\omega t+\psi_i+\frac{\pi}{2}\right)} = \omega I_m e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j(\omega t+\psi_i)} = j\omega I_m e^{j(\omega t+\psi_i)} = j\omega \dot{I}_m e^{j\omega t}.$$

Таким образом,

$$\frac{di}{dt} \Rightarrow j\omega \dot{I}_m e^{j\omega t},$$

т. е. операция взятия производной от действительной функции заменяется умножением на $j\omega$ ее комплексного изображения. Соответственно, для производной n-го порядка имеем

$$\frac{d^n i}{dt^n} \Rightarrow (j\omega)^n \dot{I}_m e^{j\omega t}.$$

Рассмотрим выражение для заряда, равного интегралу от синусоидального тока:

$$q(t) = \int_0^t i\,dt + q(0) = -\frac{I_m}{\omega}\cos(\omega t+\psi_i) + \left[\frac{I_m}{\omega}\cos\psi_i + q(0)\right].$$

Так как мы рассматриваем только случаи, когда приложенное к зажимам цепи напряжение и ЭДС, действующие в цепи, синусоидальны и не содержат постоянных составляющих, то, как уже было получено в § 4.4, напряжения на конденсаторах, а следовательно, и заряды на конденсаторах также не содержат постоянных составляющих и, соответственно,

$$\left[\frac{I_m}{\omega}\cos\psi_i + q(0)\right] = 0.$$

Таким образом,

$$\int_0^t i\,dt + q(0) = -\frac{I_m}{\omega}\cos(\omega t+\psi_i) = \frac{I_m}{\omega}\sin\left(\omega t+\psi_i-\frac{\pi}{2}\right).$$

Искомое изображение будет иметь вид

$$\int_0^t i\,dt + q(0) \Rightarrow \frac{I_m}{\omega} e^{j\left(\omega t+\psi_i-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{I_m}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j(\omega t+\psi_i)} = \frac{I_m}{j\omega} e^{j\psi_i} e^{j\omega t} = \frac{\dot{I}_m}{j\omega} e^{j\omega t},$$

т. е. операция интегрирования действительной функции заменяется делением на $j\omega$ ее комплексного изображения.

Таким образом, комплексный метод является *методом алгебраизации* дифференциальных уравнений. Сущность его заключается в том, что сначала все заданные функции времени заменяем их комплексными изображениями и все дифференциальные и алгебраические уравнения, составленные по законам Кирхгофа, заменяем алгебраическими уравнениями в комплексной форме, содержащими комплексные величины заданных и искомых функций и их производных и интегралов. Решая эти алгебраические уравнения, находим комплексные выражения искомых функций и от них переходим к оригиналам этих функций.

В виде примера рассмотрим уравнение Кирхгофа для цепи с последовательно соединенными участками r, L и C, к зажимам которой приложено напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$. Оно имеет вид

$$ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\left[\int_0^t i\,dt + q(0)\right] = u.$$

Изобразив напряжение u, ток i, его производную di/dt и интеграл $\int_0^t i\,dt + q(0)$ их комплексными выражениями

$$\dot{U}_m e^{j\omega t},\quad \dot{I}_m e^{j\omega t},\quad j\omega\dot{I}_m e^{j\omega t} \quad \text{и} \quad \frac{\dot{I}_m}{j\omega} e^{j\omega t},$$

где $\dot{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$ и $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$, получим алгебраическое уравнение в комплексной форме

$$r\dot{I}_m e^{j\omega t} + j\omega L\dot{I}_m e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_m e^{j\omega t} = \dot{U}_m e^{j\omega t}.$$

Сократив его на $e^{j\omega t}$, найдем

$$\dot{I}_m\left(r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) = \dot{U}_m$$

или

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{r + j\omega L + 1/(j\omega C)}.$$

Из последнего уравнения легко определяется комплексная амплитуда тока $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$, найдя которую, сразу можно написать разыскиваемое частное решение, т. е. выражение для мгновенного тока установившегося режима, а именно

$$i = \mathrm{Im}\,(\dot{I}_m e^{j\omega t}) = I_m(\sin\omega t + \psi_i).$$

Нас обычно интересуют действующие токи и напряжения. Так как действующие синусоидальные токи и напряжения меньше их амплитуд в $\sqrt{2}$ раз, то обычно вместо комплексных амплитуд рассматривают комплексные действующие величины:

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = Ie^{j\psi_i};\quad \dot{U} = \frac{\dot{U}_m}{\sqrt{2}} = Ue^{j\psi_u}.$$

В дальнейшем комплексные действующие ток, напряжение или ЭДС будем для краткости именовать комплексными током, напряжением или ЭДС.

Интересуясь только действующими токами и напряжениями и их начальными фазами, а соответственно, и сдвигами фаз, будем опускать множитель $e^{j\omega t}$.

Установим соответствие изображений синусоидальных токов, напряжений и ЭДС комплексными действующими значениями с их изображениями с помощью векторов.

Будем откладывать векторы в комплексной плоскости. По вертикальной оси, называемой осью вещественных, откладываем вещественные числа. По горизонтальной оси, называемой осью мнимых, откладываем мнимые числа. Положительные направления осей будем отмечать знаками «+1» и «+j» (рис. 5.1). Показанная на рис. 5.1 ориентация осей обычно принимается при построении векторных диаграмм.

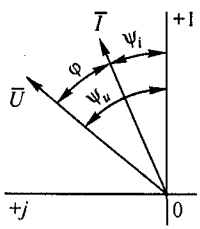


Рис. 5.1

Условимся начала векторов совмещать с началом координат, длины векторов в соответствующем масштабе брать равными действующим току, напряжению или ЭДС и углы между осью вещественных и векторами принимать равными начальным фазам соответствующих величин. При этих условиях каждой комплексной величине соответствует определенный вектор. Сопряженным комплексным числам соответствуют векторы, являющиеся зеркальными изображениями друг друга относительно оси вещественных.

На рис. 5.1 изображены на комплексной плоскости векторы напряжения и тока, комплексные выражения которых имеют вид

$$\dot{U} = Ue^{j\psi_u}; \quad \dot{I} = Ie^{j\psi_i}.$$

Если u — напряжение на зажимах цепи, а i — ток в этой цепи, то между их действующими значениями имеется связь $U = Iz$ и они сдвинуты по фазе на угол $\varphi = \psi_u - \psi_i$. При этом для перехода от вектора тока к вектору напряжения надо первый повернуть на угол φ и изменить длину вектора в $\frac{a}{v}z$ раз, где a — масштаб для вектора тока и v — масштаб для вектора напряжения.

Соответственно, для перехода от комплексного тока к комплексному напряжению необходимо аргумент первого увеличить на φ, так как $\psi_u = \psi_i + \varphi$, и умножить его модуль на z, так как $U = Iz$, т. е. необходимо умножить комплексный ток на комплексное число $ze^{j\varphi}$.

Таким образом, умножение комплексной величины на $e^{j\varphi}$ соответствует повороту вектора на угол φ. Умножение комплексной величины на $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ соответствует повороту вектора на угол $\pi/2$.

Геометрическое суммирование векторов, изображающих напряжения или токи, соответствует алгебраическому суммированию соответствующих им комплексных величин. Действительно, при геометрическом сложении векторов складываются алгебраически их проекции отдельно по одной и отдельно по другой взаимно перпендикулярным осям, а при алгебраическом сложении комплексных чисел складываются алгебраически отдельно их вещественные и отдельно их мнимые составляющие.

5.2. Комплексные сопротивление и проводимость

Отношение комплексного напряжения $\dot{U}$ к комплексному току $\dot{I}$ называют комплексным сопротивлением цепи и обозначают Z. В соответствии с изложенным в предыдущем параграфе имеем

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = ze^{j\varphi} = z\cos\varphi + jz\sin\varphi = r + jx,$$

где r, x и z — активное, реактивное и полное сопротивления цепи, а z и φ — модуль и аргумент комплексного сопротивления.

Отношение комплексного тока $\dot{I}$ к комплексному напряжению $\dot{U}$ называют комплексной проводимостью цепи и обозначают Y. Имеем

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{1}{ze^{j\varphi}} = ye^{-j\varphi} = y\cos\varphi - jy\sin\varphi = g - jb,$$

где g, b и y — активная, реактивная и полная проводимости цепи.

Очевидно, существует связь

$$ZY = 1 \quad \text{или} \quad (r + jx)(g - jb) = 1.$$

Направления векторов, соответствующих комплексным величинам Z и Y, являются зеркальным изображением друг друга относительно оси вещественных, так как аргументы комплексных величин Z и Y равны и противоположны по знаку.

5.3. Выражения законов Ома и Кирхгофа в комплексной форме

Выражения *закона Ома* в комплексной форме имеют вид

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z}; \quad \dot{U} = \dot{I}Z; \quad \dot{U} = \frac{\dot{I}}{Y}; \quad \dot{I} = \dot{U}Y.$$

Достоинство этих выражений заключается в том, что в них учитывается как связь между действующими током I и напряжением U, так и сдвиг фаз φ между ними.

Первый закон Кирхгофа в применении к узлу цепи, для мгновенных токов имеющий вид $\sum_{k=1}^{n} i_k = 0$, в комплексной форме записывается в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k = 0.$$

Второй закон Кирхгофа в применении к контуру цепи, для мгновенных ЭДС и падений напряжений имеющий вид $\sum_{k=1}^{n} e_k = \sum_{k=1}^{n} u_k$, в комплексной форме записывается в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{E}_k = \sum_{k=1}^{n} \dot{U}_k = \sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k Z_k,$$

где $\dot{E}_k, \dot{U}_k, \dot{I}_k$ и Z_k — комплексные ЭДС, падение напряжения, ток и сопротивление в k-й ветви, входящей в контур.

Если в ветвь входят последовательно соединенные участок с сопротивлением r_k, катушка с индуктивностью L_k и конденсатор с емкостью C_k, то согласно полученной в § 5.1 связи

$$\dot{I}_m\left(r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) = \dot{U}_m \quad \text{или} \quad \dot{I}\left(r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) = \dot{U}$$

для этой ветви имеем

$$Z_k = r_k + j\omega L_k + \frac{1}{j\omega C_k} = r_k + j\left(\omega L_k - \frac{1}{\omega C_k}\right) = r_k + jx_k.$$

Как было указано выше, необходимо перед составлением уравнений по законам Кирхгофа задать положительные направления ЭДС, токов и напряжений во всех ветвях цепи, обозначив эти направления на схеме стрелками. В этом отношении, как было в общем виде сказано в § 3.7, т. I, весьма полезным может оказаться обозначение ЭДС, токов и напряжений двойными индексами, соответствующими обозначению узлов, между которыми находится данная ветвь цепи. Достаточно условиться, что положительное направление принимается от узла, соответствующего первому индексу, к узлу, соответствующему второму индексу, и тогда уже нет необходимости ставить стрелки на схеме, а сама аналитическая запись величин указывает принятое их положительное направление. При изменении порядка расположения индексов меняется знак ЭДС, тока или напряжения. Так как сопротивления ветвей цепи и проводимости являются параметрами, не имеющими направления, то порядок индексов у них безразличен.

Очевидно, все эти правила действуют и при использовании комплексного метода, т. е. имеют место соотношения

$$\dot{E}_{ab} = -\dot{E}_{ba}; \quad \dot{I}_{ab} = -\dot{I}_{ba}; \quad \dot{U}_{ab} = -\dot{U}_{ba};$$
$$Z_{ab} = Z_{ba}; \quad Y_{ab} = Y_{ba}.$$

В дальнейшем всегда при обозначении указанных величин с двойными индексами будем придерживаться этих правил.

5.4. Расчет мощности по комплексным напряжению и току

Для вычислений активной и реактивной мощностей необходимо знать действующие напряжение U и ток I и разность фаз φ между ними.

Величина φ равна разности начальных фаз напряжения и тока ($\varphi = \psi_u - \psi_i$). Поэтому необходимо перемножить не комплексные величины $\dot{U}$ и $\dot{I}$, так как при этом аргумент произведения $\dot{U}\dot{I}$ будет равен сумме $\psi_u + \psi_i$, а взять произведение одной из этих величин на сопряженную комплексную другую величину. Получаем в результате такого перемножения комплексную мощность

$$\dot{S} = \dot{U}\dot{I}^* = Ue^{j\psi_u} Ie^{-j\psi_i} = UIe^{j\varphi} = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = P + jQ$$

или, соответственно,

$$\dot{S}^* = \dot{I}\dot{U}^* = Ie^{j\psi_i} Ue^{-j\psi_u} = UIe^{-j\varphi} = UI\cos\varphi - jUI\sin\varphi = P - jQ.$$

Вещественная часть в обоих случаях равна активной мощности P. Реактивная мощность Q равна коэффициенту в первом случае при $(+j)$, а во втором — при $(-j)$ в мнимой части комплексной мощности. Модуль комплексной мощности равен полной мощности $S = UI$.

5.5. Расчет при последовательном соединении участков цепи

При последовательном соединении участков цепи (рис. 5.2) напряжение на зажимах всей цепи равняется сумме падений напряжений на отдельных участках $u = \sum_{k=1}^{n} u_k$. При синусоидальном процессе, пользуясь комплексным методом и учитывая, что ток является одним и тем же во всех участках, можем написать

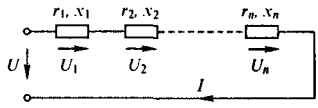


Рис. 5.2

$$\dot{U} = \sum_{k=1}^{n} \dot{U}_k = \sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k Z_k = \dot{I}_k \sum_{k=1}^{n} Z_k = \dot{I}Z,$$

где $Z_k = r_k + jx_k$ — комплексное сопротивление k-го участка

Таким образом, при последовательном соединении комплексное сопротивление всей цепи равно алгебраической сумме комплексных сопротивлений отдельных участков цепи:

$$Z = \sum_{k=1}^{n} Z_k = \sum_{k=1}^{n} r_k + j\sum_{k=1}^{n} x_k = r + jx.$$

Вычислив комплексное сопротивление Z всей цепи, легко рассчитать комплексный ток $\dot{I}$ при заданном напряжении $\dot{U}$.

Из равенств

$$r = \sum_{k=1}^{n} r_k \quad \text{и} \quad x = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

следует, что необходимо алгебраически складывать *отдельно активные* и *отдельно реактивные сопротивления* последовательно соединенных участков.

Пользуясь этим результатом, получаем

$$I^2 r = I^2 \sum_{k=1}^{n} r_k = \sum_{k=1}^{n} I^2 r_k \quad \text{или} \quad P = \sum_{k=1}^{n} P_k;$$

$$I^2 x = I^2 \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} I^2 x_k \quad \text{или} \quad Q = \sum_{k=1}^{n} Q_k,$$

т. е. активная P и реактивная Q мощности всей цепи равны алгебраическим суммам соответственно активных и реактивных мощностей всех последовательно соединенных участков.

5.6. Расчет при параллельном соединении участков цепи

При параллельном соединении участков цепи (рис. 5.3) общий ток на входе цепи равен сумме токов в отдельных участках $i = \sum_{k=1}^{n} i_k$. Пользуясь при синусоидальном процессе комплексным методом и учитывая, что напряжение на всех участках одно и то же, можем написать

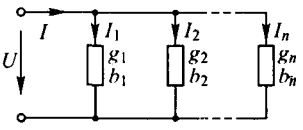


Рис. 5.3

$$\dot{I} = \sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k = \sum_{k=1}^{n} \dot{U} Y_k = \dot{U} \sum_{k=1}^{n} Y_k = \dot{U} Y,$$

где $Y_k = g_k - jb_k$ — комплексная проводимость k-го участка.

Таким образом, при параллельном соединении комплексная проводимость всей цепи равна алгебраической сумме комплексных проводимостей отдельных участков цепи:

$$Y = \sum_{k=1}^{n} Y_k = \sum_{k=1}^{n} g_k - j \sum_{k=1}^{n} b_k = g - jb.$$

Вычислив комплексную проводимость всей цепи, легко рассчитать комплексный ток $\dot{I}$ при заданном напряжении $\dot{U}$. Из равенств

$$g = \sum_{k=1}^{n} g_k \quad \text{и} \quad b = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

следует, что необходимо алгебраически складывать *отдельно активные* и *отдельно реактивные проводимости* параллельно соединенных участков.

Пользуясь этим результатом, получаем

$$U^2 g = U^2 \sum_{k=1}^{n} g_k = \sum_{k=1}^{n} U^2 g_k \quad \text{или} \quad P = \sum_{k=1}^{n} P_k;$$

$$U^2 b = U^2 \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} U^2 b_k \quad \text{или} \quad Q = \sum_{k=1}^{n} Q_k,$$

т. е. активная P и реактивная Q мощности всей цепи равны алгебраическим суммам, соответственно, активных и реактивных мощностей всех параллельно соединенных участков.

5.7. Расчет при смешанном соединении участков цепи

Под смешанным соединением будем понимать соединение, представляющее собой сочетание последовательных и параллельных соединений участков цепи. Соответственно, для расчета таких цепей можно использовать методы, изложенные в двух предыдущих параграфах.

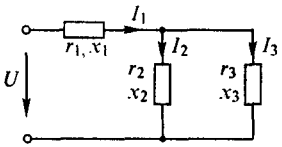


Рис. 5.4

Продемонстрируем это на примере цепи, изображенной на рис. 5.4. Предположим, что задано напряжение U на зажимах цепи и требуется отыскать все токи. Воспользуемся комплексным методом. Второй и третий участки соединены параллельно, и, следовательно, необходимо сложить их комплексные проводимости Y_2 и Y_3 для получения комплексной проводимости Y_{23} обоих параллельно соединенных участков. Имеем

$$Y_{23} = Y_2 + Y_3 = (g_2 + g_3) - j(b_2 + b_3).$$

Здесь

$$Y_2 = \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{r_2 + jx_2}; \quad Y_3 = \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{r_3 + jx_3}.$$

Чтобы избавиться от мнимости в знаменателе, необходимо умножить числитель и знаменатель на сопряженную знаменателю комплексную величину. Например,

$$Y_2 = \frac{r_2 - jx_2}{(r_2 + jx_2)(r_2 - jx_2)} = \frac{r_2}{r_2^2 + x_2^2} - j\frac{x_2}{r_2^2 + x_2^2} = g_2 - jb_2.$$

Здесь интересно отметить, что, пользуясь комплексным методом, автоматически получаем соотношения между эквивалентными проводимостями g и b и сопротивлениями r и x цепи или ее участка, выведенные в § 4.8.

Первый участок соединен последовательно со взятыми вместе вторым и третьим участками. Следовательно, комплексное сопротивление всей цепи

$$Z = Z_1 + Z_{23},$$

где

$$Z_1 = r_1 + jx_1;\ Z_{23} = \frac{1}{Y_{23}} = \frac{1}{g_{23} - jb_{23}} = \frac{g_{23}}{g_{23}^2 + b_{23}^2} + j\frac{b_{23}}{g_{23}^2 + b_{23}^2}.$$

Комплексный ток в неразветвленной части цепи

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z},$$

причем $\dot{U}$ можно принять вещественным, т. е. $\dot{U} = U$. Это значит, что вектор приложенного напряжения $\overline{U}$ направляем по оси вещественных. Комплексное напряжение на втором и третьем участках находим из равенств

$$\dot{U}_{23} = \dot{U} - \dot{I}_1 Z_1 \quad \text{или} \quad \dot{U}_{23} = \dot{I}_1 Z_{23},$$

после чего легко определяются комплексные токи в этих участках:

$$\dot{I}_2 = \dot{U}_{23} Y_2;\ \dot{I}_3 = \dot{U}_{23} Y_3.$$

Зная комплексное сопротивление $Z = r + jx$ всей цепи, определяем угол сдвига φ между напряжением U и током I из соотношения

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{x}{r}.$$

Пользуясь выражениями для активной и реактивной мощностей при последовательном и параллельном соединениях, нетрудно усмотреть, что и в случае смешанного соединения активная мощность всей цепи равна сумме активных мощностей, расходуемых на отдельных ее участках, а реактивная мощность всей цепи равна алгебраической сумме соответствующих реактивных мощностей.

5.8. О расчете сложных электрических цепей

Электрические цепи, схема которых не является простым сочетанием последовательного и параллельного соединений участков цепи, будем называть *сложными цепями*. Как уже было указано, можно произвести расчет любой сложной цепи, составив на основе законов Кирхгофа систему уравнений и решив ее. В общем случае применение законов Кирхгофа в сочетании с заданными зависимостями между напряжениями на отдельных элементах и токами в них приводит к системе дифференциальных уравнений. Применение комплексного метода

позволяет найти частное решение системы дифференциальных уравнений в установившемся режиме при протекании синусоидальных токов в линейной электрической цепи. При этом дифференциальные уравнения для мгновенных искомых токов заменяются алгебраическими уравнениями для комплексных токов, напряжений и ЭДС.

Число независимых уравнений должно быть равно числу неизвестных. Если отыскиваются токи во всех ветвях, то число уравнений должно быть равно числу ветвей в цепи. Такое равенство имеет место в цепи, в которой отсутствуют идеальные источники тока. При наличии идеальных источников тока в s ветвях число уравнений будет меньше общего числа ветвей на эту величину s, так как в таких ветвях токи заданы независимо от режима в остальной цепи.

Таким образом, в самом общем случае максимальное число уравнений определяется числом ветвей p, не содержащих только идеальные источники тока. Источники тока, содержащиеся в обобщенных ветвях, не входят в это число.

В § 3.17 была получена полная система уравнений электрической цепи, в которую входили $q - 1$ уравнений, составленных для токов (в узлах или в сечениях) согласно первому закону Кирхгофа, и $n = p - q + 1$ уравнений, составленных для напряжений (в контурах) согласно второму закону Кирхгофа.

В матричной форме с учетом перехода от мгновенных токов и напряжений к комплексным токам и напряжениям можно записать $q - 1$ уравнений Кирхгофа для узлов $\mathbf{AI} = -\mathbf{A}\mathfrak{J}$

или для сечений $\mathbf{DI} = -\mathbf{D}\mathfrak{J}$

и $n = p - q + 1$ уравнений Кирхгофа для контуров $\mathbf{CU} = \mathbf{CE}$,

где

$$\mathbf{I} = \begin{Vmatrix} \dot{I}_1 \\ \vdots \\ \dot{I}_p \end{Vmatrix}; \quad \mathfrak{J} = \begin{Vmatrix} \dot{\mathfrak{J}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\mathfrak{J}}_p \end{Vmatrix}; \quad \mathbf{U} = \begin{Vmatrix} \dot{U}_1 \\ \vdots \\ \dot{U}_p \end{Vmatrix}; \quad \mathbf{E} = \begin{Vmatrix} \dot{E}_1 \\ \vdots \\ \dot{E}_p \end{Vmatrix}$$

— матрицы-векторы (матрицы-столбцы) порядка $p \times 1$; $\mathbf{A}$ — матрица узловых соединений порядка $(q - 1) \times p$; $\mathbf{D}$ — матрица сечений порядка $(q - 1) \times p$; $\mathbf{C}$ — матрица контуров порядка $n \times p$. Напомним, что первое число определяет число строк матрицы, а второе — число столбцов. Все матрицы упорядочены, т. е. сначала пронумерованы ветви дерева (от 1 до $q - 1$), а затем уже связи (от q до p).

Применение комплексного метода требует записи в комплексной форме всех заданных ЭДС, токов источников и зависимостей между токами и напряжениями. Учитывая особенности линейных цепей и перехода от дифференциальных уравнений к их алгебраическим изображениям, для пассивных элементов обобщенной ветви можем записать

$$\dot{U}_k = r_k \dot{I}_k + j\omega L_k \dot{I}_k + \frac{1}{j\omega C_k} \dot{I}_k = Z_k \dot{I}_k \quad \text{или} \quad \dot{I}_k = Y_k \dot{U}_k.$$

Такие уравнения могут быть записаны для p ветвей электрической цепи. Введем в рассмотрение матрицу сопротивлений и матрицу проводи-

мостей, представляющие собой квадратные матрицы порядка $p \times p$, состоящие из диагональных ненулевых элементов Z_k и Y_k соответственно:

$$\mathbf{Z} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & p \\ 1 & Z_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & Z_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Z_{p-1} & 0 \\ p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & Z_p \end{array}; \quad \mathbf{Y} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & p \\ 1 & Y_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & Y_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Y_{p-1} & 0 \\ p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & Y_p \end{array}.$$

Имеют место очевидные равенства

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1} \quad \text{и} \quad \mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}.$$

Уравнения, связывающие токи и напряжения пассивных частей ветвей, представляют собой законы Ома в комплексной форме. В матричной форме закон Ома будет иметь вид

$$\mathbf{U} = \mathbf{ZI} \quad \text{или} \quad \mathbf{I} = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{YU}.$$

С учетом последних равенств можем составить систему из p уравнений для искомых p напряжений

$$\mathbf{AI} = \mathbf{AYU} = -\mathbf{A}\mathfrak{Z} \quad (\text{или } \mathbf{DYU} = -\mathbf{D}\mathfrak{Z}) \quad \text{и} \quad \mathbf{CU} = \mathbf{CE},$$

или составить систему из p уравнений для искомых p токов

$$\mathbf{CU} = \mathbf{CZI} = \mathbf{CE} \quad \text{и} \quad \mathbf{AI} = -\mathbf{A}\mathfrak{Z} \quad (\text{или } \mathbf{DU} = -\mathbf{D}\mathfrak{Z}).$$

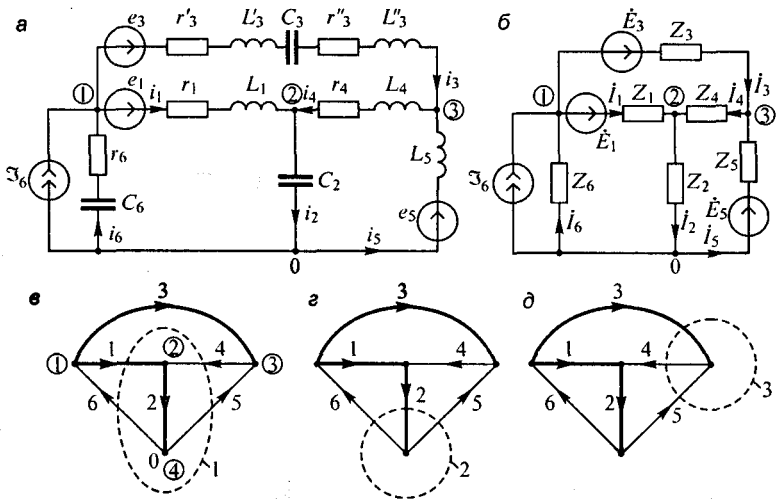


Рис. 5.5

В качестве примера рассмотрим цепь, изображенную на рис. 5.5, *а*. На рис. 5.5, *б* эта цепь представлена в виде двухполюсников с комплексными параметрами. Граф схемы (рис. 5.5, *б*), изображенный на рис. 5.5, *в*, совпадает с гра-

фом схемы (рис. 5.5, *а*), для которой в § 3.17 мы записали систему дифференциальных уравнений. Пусть заданы ЭДС и ток источника тока:

$$e_1 = E_{1m}(\sin\omega t + \psi_1); \quad e_3 = E_{3m}(\sin\omega t + \psi_3); \quad e_5 = E_{5m}(\sin\omega t + \psi_5);$$
$$\Im_6 = \Im_{6m}(\sin\omega t + \psi_6),$$

а также параметры r, L, C в ветвях цепи.

Для расчета с помощью комплексного метода мы должны записать исходные данные цепи (рис. 5.5, *б*) в виде

$$\dot{E}_1 = \frac{E_{1m}}{\sqrt{2}} e^{j\psi_1} = E_1 e^{j\psi_1}; \quad \dot{E}_3 = \frac{E_{3m}}{\sqrt{2}} e^{j\psi_3} = E_3 e^{j\psi_3}; \quad \dot{E}_5 = \frac{E_{5m}}{\sqrt{2}} e^{j\psi_5} = E_5 e^{j\psi_5};$$

$$\dot{\Im}_6 = \frac{\Im_{6m}}{\sqrt{2}} e^{j\psi_6} = \Im_6 e^{j\psi_6}; \quad Z_1 = r_1 + j\omega L_1; \quad Z_2 = \frac{1}{j\omega C_2};$$

$$Z_3 = (r_3' + r_3'') + j\omega(L_3' + L_3'') + \frac{1}{j\omega C_3}; \quad Z_4 = r_4 + j\omega L_4;$$

$$Z_5 = j\omega L_5; \quad Z_6 = r_6 + \frac{1}{j\omega C_6}.$$

Для графа схемы (рис. 5.5, *в*) согласно § 3.13 и 3.14 имеем:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & & 1 & & & -1 \\ 2 & -1 & 1 & & -1 & & \\ 3 & & & -1 & 1 & -1 & \end{array};$$

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 4 & -1 & & 1 & 1 & & \\ 5 & 1 & 1 & -1 & & 1 & \\ 6 & 1 & 1 & & & & 1 \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{F} & \mathbf{1} \\ \hline \end{array}.$$

Запишем в матричной форме все исходные данные:

$$\mathbf{I} = \begin{Vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 \\ \dot{I}_6 \end{Vmatrix}_{6\times1}; \quad \mathbf{U} = \begin{Vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \\ \dot{U}_5 \\ \dot{U}_6 \end{Vmatrix}_{6\times1}; \quad \mathbf{E} = \begin{Vmatrix} \dot{E}_1 \\ 0 \\ \dot{E}_3 \\ 0 \\ \dot{E}_5 \\ 0 \end{Vmatrix}_{6\times1}; \quad \mathbf{\Im} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{\Im}_6 \end{Vmatrix}_{6\times1};$$

$$\mathbf{Z} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline Z_1 & & & & & \\ \hline & Z_2 & & & & \\ \hline & & Z_3 & & & \\ \hline & & & Z_4 & & \\ \hline & & & & Z_5 & \\ \hline & & & & & Z_6 \\ \hline \end{array} = \operatorname{diag}(Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5 Z_6).$$

6×6

Символ diag означает, что матрица **Z** — квадратная, диагональная и ее диагональными элементами являются записанные в скобках величины.

Тогда система узловых уравнений Кирхгофа для токов может быть представлена в матричной форме:

$$\underset{[(q-1)\times p]\times(p\times 1)}{\mathbf{AI}} = \begin{array}{c|c|}\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 1 & \dot{I}_1 + \dot{I}_3 - \dot{I}_6 \\ \hline 2 & -\dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_4 \\ \hline 3 & -\dot{I}_3 + \dot{I}_4 - \dot{I}_5 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \dot{\mathfrak{I}}_6 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array};$$

$(q-1)\times 1$

Падения напряжений в ветвях можно представить в виде вектора $\mathbf{U} = \mathbf{ZI}$, который ввиду диагональности матрицы **Z** будет иметь вид $\begin{Vmatrix} Z_1\dot{I}_1 \\ Z_2\dot{I}_2 \\ \vdots \end{Vmatrix}$.

Падение напряжений и ЭДС в контурах можно представить в виде **CU** и **CE**. Тогда система контурных уравнений согласно второму закону Кирхгофа будет иметь вид

$$\underset{(n\times p)\times(p\times 1)}{\mathbf{CU}} = \underset{(n\times p)\times(p\times p)\times(p\times 1)}{\mathbf{CZI}} = \begin{array}{c|c|}\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 4 & -Z_1\dot{I}_1 + Z_3\dot{I}_3 + Z_4\dot{I}_4 \\ \hline 5 & Z_1\dot{I}_1 + Z_2\dot{I}_2 - Z_3\dot{I}_3 + Z_5\dot{I}_5 \\ \hline 6 & Z_1\dot{I}_1 + Z_2\dot{I}_2 + Z_6\dot{I}_6 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline -\dot{E}_1 + \dot{E}_3 \\ \hline \dot{E}_1 - \dot{E}_3 + \dot{E}_5 \\ \hline \dot{E}_1 \\ \hline \end{array} = \mathbf{CE}.$$

$(n\times 1)$

Итак, произведение диагональной матрицы **Z** на столбцовую матрицу **I** определяет также столбцовую матрицу, строками которой являются произведения диагональных элементов (в данном случае комплексные сопротивления ветвей)

на токи соответствующих ветвей. Это обстоятельство облегчает выполнение такого матричного перемножения. Перемножение прямоугольных матриц **A** и **C** на столбцовые матрицы сводится к суммированию тех элементов строк столбцовой матрицы, номера которых соответствуют номерам ненулевых элементов столбцов прямоугольных матриц. По этой причине можно, рассматривая только матрицу **A**, или **C**, или **D**, записать соответствующее уравнение для данного контура, или узла, или сечения. Например, в контурное уравнение, записанное для контура *5*, образованного связью *5* (см. строку 5 матрицы **C**), должны входить напряжения (а следовательно, и $\dot{Z}I$) ветвей *1, 2, 5* со знаком «плюс» (в строке 5 эти столбцы имеют положительные ненулевые элементы) и ветви *3* со знаком «минус» (в строке 5 столбец 3 имеет отрицательный ненулевой элемент). Соответственно, для этого контура имеем

$$\dot{U}_1 + \dot{U}_2 - \dot{U}_3 + \dot{U}_5 = Z_1\dot{I}_1 + Z_2\dot{I}_2 - Z_3\dot{I}_3 + Z_5\dot{I}_5.$$

В контур *5* входят ЭДС именно этих же ветвей. Поскольку $\dot{E}_2 = 0$, то

$$Z_1\dot{I}_1 + Z_2\dot{I}_2 - Z_3\dot{I}_3 + Z_5\dot{I}_5 = \dot{E}_1 - \dot{E}_3 + \dot{E}_5.$$

Если расписать всю систему уравнений, получим для узлов *1, 2, 3*, соответственно,

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_3 - \dot{I}_6 = \dot{\mathfrak{I}}_6; \quad -\dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_4 = 0; \quad -\dot{I}_3 + \dot{I}_4 - \dot{I}_5 = 0$$

и для контуров *4*, *5* и *6*, соответственно,

$$-Z_1\dot{I}_1 + Z_3\dot{I}_3 + Z_4\dot{I}_4 = -\dot{E}_1 + \dot{E}_3; \quad Z_1\dot{I}_1 + Z_2\dot{I}_2 - Z_3\dot{I}_3 + Z_5\dot{I}_5 =$$
$$= \dot{E}_1 - \dot{E}_3 + \dot{E}_5; \quad Z_1\dot{I}_1 + Z_2\dot{I}_2 + Z_6\dot{I}_6 = \dot{E}_1.$$

Для расчета данной цепи, следовательно, необходимо решить систему из шести уравнений.

Трудность расчета сложных линейных цепей заключается в необходимости решать совместно p линейных алгебраических уравнений. В связи с этим представляют ценность методы, позволяющие тем или иным путем упростить задачу. Эти методы дают возможность или преобразовать цепь так, что расчет упрощается, или уменьшить число уравнений, или, наконец, расчленить сложную задачу на ряд более простых. В следующих параграфах будет рассмотрен ряд основных таких методов.

5.9. Расчет цепи, основанный на преобразовании соединения треугольником в эквивалентное соединение звездой

Для упрощения расчета сложной цепи в ряде случаев целесообразно осуществить преобразование некоторой части цепи. Эта часть цепи до ее преобразования должна быть эквивалентна этой же части цепи после ее преобразования при условии, что режим в остальной, не преобразованной части остается неизменным.

К числу таких преобразований относится, например, преобразование соединения треугольником в эквивалентное соединение звездой, которое рассмотрим в настоящем параграфе, а также преобразование нескольких параллельно соеди-

ненных ветвей с источниками ЭДС в одну эквивалентную им ветвь с одним источником ЭДС, что будет рассмотрено в следующем параграфе.

На рис. 5.6, *а* между точками *1*, *2* и *3* некоторой сложной цепи включены три участка с сопротивлениями Z_1, Z_2 и Z_3, соединенные звездой. На рис. 5.6, *б* между этими же точками включены три участка Z_{12}, Z_{23} и Z_{31}, соединенные треугольником. Остальная, не подвергающаяся преобразованию, часть сложной цепи на рисунке не показана.

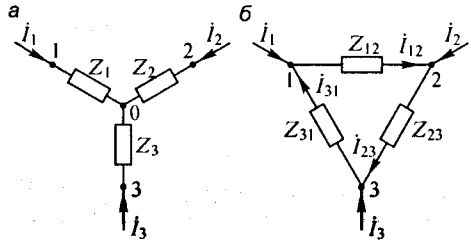


Рис. 5.6

Соединения звездой и треугольником эквивалентны друг другу при условии, что при одинаковых в обоих случаях напряжениях $\dot{U}_{12}, \dot{U}_{23}$ и $\dot{U}_{31}$ между точками *1*, *2* и *3* и токи $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$, подходящие к этим точкам от остальной части цепи, одинаковы в обоих случаях. Составим уравнения для соединения з в е з д о й:

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0;$$

$$\dot{U}_{12} = \dot{I}_1 Z_1 - \dot{I}_2 Z_2 = \dot{I}_1 Z_1 + (\dot{I}_1 + \dot{I}_3) Z_2 = \dot{I}_1 (Z_1 + Z_2) + \dot{I}_3 Z_2;$$

$$\dot{U}_{23} = \dot{I}_2 Z_2 - \dot{I}_3 Z_3 = -(\dot{I}_1 + \dot{I}_3) Z_2 - \dot{I}_3 Z_3 = -\dot{I}_1 Z_2 - \dot{I}_3 (Z_2 + Z_3).$$

Решая эти уравнения относительно токов $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_3$, получим

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_{12} \frac{Z_2 + Z_3}{D} + \dot{U}_{23} \frac{Z_2}{D}; \quad \dot{I}_3 = -\dot{U}_{12} \frac{Z_2}{D} - \dot{U}_{23} \frac{Z_1 + Z_2}{D},$$

где

$$D = Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1.$$

Для соединения т р е у г о л ь н и к о м имеем уравнения

$$\dot{U}_{12} + \dot{U}_{23} + \dot{U}_{31} = 0;$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{12} - \dot{I}_{31} = \dot{U}_{12} \frac{1}{Z_{12}} - \dot{U}_{31} \frac{1}{Z_{31}} = \dot{U}_{12} \left(\frac{1}{Z_{12}} + \frac{1}{Z_{31}} \right) + \dot{U}_{23} \frac{1}{Z_{31}};$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_{31} - \dot{I}_{23} = \dot{U}_{31} \frac{1}{Z_{31}} - \dot{U}_{23} \frac{1}{Z_{23}} = -\dot{U}_{12} \frac{1}{Z_{31}} - \dot{U}_{23} \left(\frac{1}{Z_{31}} + \frac{1}{Z_{23}} \right).$$

Токи $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_3$, а следовательно, и ток $\dot{I}_2 = -\dot{I}_1 - \dot{I}_3$ должны быть одинаковыми в обеих схемах при одинаковых в обоих случаях напряжениях $\dot{U}_{12}$ и $\dot{U}_{23}$, причем это должно быть справедливо при любых соотношениях между $\dot{U}_{12}$ и $\dot{U}_{23}$. Следовательно, коэффициенты в выражениях для токов $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_3$ должны быть одинаковыми в случаях соединения звездой и треугольником. Получаем

$$\frac{Z_2 + Z_3}{D} = \frac{1}{Z_{12}} + \frac{1}{Z_{31}}; \quad \frac{Z_2}{D} = \frac{1}{Z_{31}}; \quad \frac{Z_1 + Z_2}{D} = \frac{1}{Z_{31}} + \frac{1}{Z_{23}}.$$

Из этих уравнений определяются сопротивления искомого эквивалентного треугольника через заданные сопротивления звезды:

$$Z_{12} = D/Z_3; \quad Z_{23} = D/Z_1; \quad Z_{31} = D/Z_2,$$

где

$$D = Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1.$$

Если заданы сопротивления треугольника и отыскиваются сопротивления эквивалентной ему звезды, то следует пользоваться формулами

$$Z_1 = \frac{Z_{12}Z_{31}}{Z_{12}+Z_{23}+Z_{31}}; \quad Z_2 = \frac{Z_{23}Z_{12}}{Z_{12}+Z_{23}+Z_{31}}; \quad Z_3 = \frac{Z_{31}Z_{23}}{Z_{12}+Z_{23}+Z_{31}}.$$

Например, формула для Z_1 легко получается, если заметить, что

$$Z_{12}Z_{31} = \frac{D^2}{Z_2Z_3} \quad \text{и} \quad Z_{12}+Z_{23}+Z_{31} = \frac{D^2}{Z_1Z_2Z_3}.$$

При эквивалентном преобразовании треугольника в звезду и наоборот возможны случаи, когда это преобразование теряет смысл, что имеет место при равенстве нулю сумм сопротивлений или проводимостей. Возможны и случаи, когда эквивалентное преобразование приводит к появлению отрицательных активных сопротивлений в отдельных лучах звезды или сторонах треугольника, означающему невозможность реализации таких схем при помощи одних элементов r, L, C. На ход расчета последнее обстоятельство не влияет. В окончательном выражении комплексное сопротивление всей пассивной цепи содержит положительную вещественную часть.

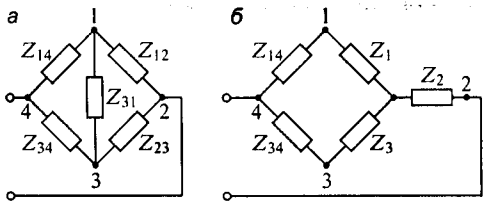


Рис. 5.7

Упрощение расчета сложной цепи при помощи эквивалентного преобразования конфигурации цепи можно проследить на примере расчета цепи, изображенной на рис. 5.7, *а*. В этой цепи упрощение достигается преобразованием треугольника Z_{12}, Z_{23}, Z_{31} (рис. 5.7, *а*) в эквивалентную звезду Z_1, Z_2, Z_3 (рис. 5.7, *б*). После такого преобразования получаем простую цепь с последовательно-параллельным соединением участков.

5.10. Преобразование источников ЭДС и тока

Для удобства расчета электрических цепей иногда полезно производить замену источника ЭДС эквивалентным источником тока или выполнять обратную замену источника тока эквивалентным источником ЭДС.

Источники ЭДС и тока являются эквивалентными, если они обладают одной и той же внешней характеристикой $u = f(i)$ (или $i = \varphi(u)$). При присоединении к ним приемника с некоторым сопротивлением $r_{пр} = 1/g_{пр}$ (или $Z_{пр} = 1/Y_{пр}$) напряжение u (или $\dot{U}$) и ток i (или $\dot{I}$) в приемнике будут в обоих случаях одинаковы.

Уравнение внешней характеристики источника ЭДС имеет вид $u = e - r_{вн}i$ (или $\dot{U} = \dot{E} - Z_{вн}\dot{I}$). Запишем это уравнение иначе, а именно: $i = e/r_{вн} - u/r_{вн}$ (или $\dot{I} = \dot{E}/Z_{вн} - \dot{U}/Z_{вн}$). Уравнение внешней характеристики источника тока имеет вид $i = \mathfrak{I} - ug_{вн}$ (или $\dot{I} = \dot{\mathfrak{I}} - Y_{вн}\dot{U}$). Эти внешние характеристики совпадут, если соблюдать условия

$$\Im = \frac{e}{r_{вн}} \text{ и } g_{вн} = \frac{1}{r_{вн}} \quad \text{или} \quad \dot{\Im} = \frac{\dot{E}}{Z_{вн}} \text{ и } Y_{вн} = \frac{1}{Z_{вн}}.$$

По этим равенствам можно вычислить параметры $\Im$ и $g_{вн}$ ($\dot{\Im}$ и $Y_{вн}$) источника тока, эквивалентного заданному источнику ЭДС, имеющему параметры e и $r_{вн}$ ($\dot{E}$ и $Z_{вн}$). Соответственно, из соотношений

$$e = \Im / g_{вн} \text{ и } r_{вн} = 1/g_{вн} \quad \text{или} \quad \dot{E} = \dot{\Im}/Y_{вн} \text{ и } Z_{вн} = 1/Y_{вн}$$

можно получить параметры источника ЭДС, эквивалентного источнику тока. Эквивалентные замены могут быть произведены и для зависимых источников. Пусть в некоторой ветви p с проводимостью Y_p имеется зависимый, управляемый током $\dot{I}_q$ ветви q источник тока $\dot{\Im}_p = \beta \dot{I}_q$. Согласно вышеприведенным формулам, можно преобразовать управляемый током источник тока в управляемый током источник ЭДС. Значение ЭДС будет равно $\dot{E}_p = \beta \dot{I}_q / Y_p$, и внутреннее сопротивление $Z_{вн} = Z_p = 1/Y_p$.

Преобразуем две параллельно соединенные ветви, содержащие источники ЭДС $\dot{E}_1$ и $\dot{E}_2$ и сопротивления $Z_1 = 1/Y_1$ и $Z_2 = 1/Y_2$ (рис. 5.8), в одну эквивалентную ветвь.

Рассматривая параллельно соединенные на рис. 5.8 ветви как источники ЭДС $\dot{E}_1$ и $\dot{E}_2$ с внутренними сопротивлениями Z_1 и Z_2, заменим их эквивалентными источниками тока $\dot{\Im}_1 = \dot{E}_1 Y_1$ и $\dot{\Im}_2 = \dot{E}_2 Y_2$ с внутренними проводимостями $Y_1 = 1/Z_1$ и $Y_2 = 1/Z_2$ (рис. 5.8). Объединив эти два источника тока в один $\dot{\Im} = \dot{\Im}_1 + \dot{\Im}_2$ с внутренней проводимостью $Y = Y_1 + Y_2$, перейдем от него к источнику ЭДС

$$\dot{E}_1 = \frac{\dot{\Im}}{Y} = \frac{\dot{E}_1 Y_1 + \dot{E}_1 Y_2}{Y_1 + Y_2}$$

с внутренним сопротивлением $Z = \dfrac{1}{Y_1 + Y_2}$.

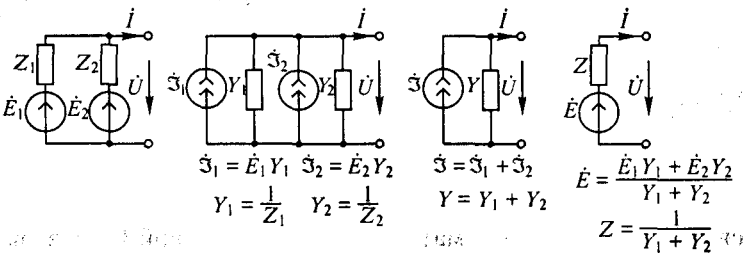


Рис. 5.8

Распространяя полученный результат на n параллельно соединенных ветвей, найдем, что заменяющая их эквивалентная ветвь содержит источник ЭДС.

$$\dot{E} = \frac{\dot{E}_1 Y_1 + \dot{E}_1 Y_2 + \ldots + \dot{E}_n Y_n}{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \dot{E}_k Y_k}{\sum_{k=1}^{n} Y_k}$$

и сопротивление

$$Z = \frac{1}{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n}.$$

5.11. Метод контурных токов

То обстоятельство, что контур, образованный данной связью графа схемы, проходит только по ветвям дерева, дает возможность выразить токи в ветвях дерева через токи в связях. Такая связь в матричном виде записывается следующим образом (см. § 3.16):

$$\tilde{\mathbf{I}}_1 = -\mathbf{D}_2\tilde{\mathbf{I}}_2.$$

Здесь $\tilde{\mathbf{I}}_1$ — матрица-столбец порядка $(q-1)\times 1$, элементами которой являются токи $\tilde{I}_1 \ldots \tilde{I}_{q-1}$ в обобщенных ветвях дерева; $\tilde{\mathbf{I}}_2$ — матрица-столбец порядка $n \times 1$, элементами которой являются токи обобщенных ветвей-связей графа $\tilde{I}_q \ldots \tilde{I}_p$. Напомним, что в обобщенных ветвях наряду с пассивными элементами Z и Y содержатся также источники ЭДС и тока (см. § 3.10). Подматрица $\mathbf{D}_2 = -\mathbf{F}^t$ является прямоугольной матрицей порядка $(q-1)\times n$, состоящей из элементов ± 1 и 0. Строки этой матрицы нумеруются согласно номерам ветвей дерева, а столбцы — согласно номерам связей графа схемы (см. § 3.15). Матрицу-столбец токов во всех ветвях графа схемы можно определить через матрицу токов в связях, имея в виду, что

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{Vmatrix} \tilde{\mathbf{I}}_1 \\ \tilde{\mathbf{I}}_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\mathbf{D}_2\tilde{\mathbf{I}}_2 \\ \tilde{\mathbf{I}}_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\mathbf{D}_2 \\ 1 \end{Vmatrix} \tilde{\mathbf{I}}_2 = \begin{Vmatrix} \mathbf{F}^t \\ 1 \end{Vmatrix} \tilde{\mathbf{I}}_2.$$

Сравнивая множитель-матрицу у $\tilde{\mathbf{I}}_2$ с матрицей $\mathbf{C} = \boxed{\mathbf{F}\,|\,1}$, можно заметить, что имеет место равенство

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{F}^t \\ 1 \end{Vmatrix} = \mathbf{C}^t.$$

Таким образом, токи во всех обобщенных ветвях графа схемы выражаются через матрицу токов в связях ($\tilde{\mathbf{I}}_2$) равенством

$$\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{C}^t\tilde{\mathbf{I}}_2.$$

Токи в связях, записанные в матричной форме буквой $\tilde{\mathbf{I}}_2$, называют контурными токами, так как связи и определяют контуры. Контурные токи, число которых равно n, можно принять за искомые неизвестные и составить уравнения именно для них. Напомним, что матричная связь между токами ветвей дерева и токами связей графа схемы получена из матричного равенства $\mathbf{D}\tilde{\mathbf{I}} = 0$ (см. § 3.15), записанного на основе первого закона Кирхгофа применительно к сечениям графа схемы.

Уравнения на основе второго закона Кирхгофа записываются в виде

$$\mathbf{C}\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{0} \quad \text{или} \quad \mathbf{CU} = \mathbf{CE},$$

где $\tilde{\mathbf{U}}$ = матрица-столбец порядка $p \times 1$, элементами которой являются напряжения обобщенных ветвей; $\mathbf{U}$ — матрица-столбец порядка $p \times 1$, элементами которой являются напряжения пассивных элементов обобщенных ветвей (рис. 5.9). Для пассивных элементов можно записать закон Ома в матричной форме, а именно:

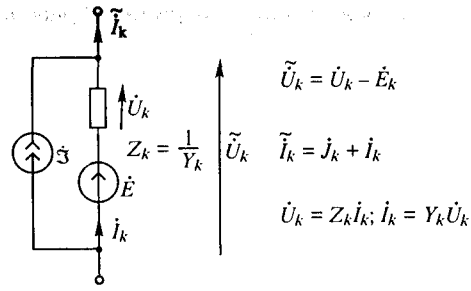


Рис. 5.9

$$\mathbf{U} = \mathbf{ZI},$$

где $\mathbf{Z}$ — квадратная матрица порядка $p \times p$ сопротивлений ветвей цепи (см. § 5.8). Кроме того, справедливо соотношение

$$\dot{I}_k = \tilde{I}_k - \mathfrak{J}_k$$

или в матричной форме

$$\mathbf{I} = \tilde{\mathbf{I}} - \mathfrak{J}.$$

Подставим эти соотношения в контурное уравнение, получим

$$\mathbf{CU} = \mathbf{CZI} = \mathbf{CZ}(\tilde{\mathbf{I}} - \mathfrak{J}) = \mathbf{CZ}\tilde{\mathbf{I}} - \mathbf{CZ}\mathfrak{J} = \mathbf{CE}$$

или

$$\mathbf{CZ}\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{C}(\mathbf{E} + \mathbf{Z}\mathfrak{J}).$$

Но $\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{C}^t\tilde{\mathbf{I}}_2$, поэтому окончательно имеем

$$\underset{(n\times p)\times(p\times p)\times(p\times m)\times(m\times 1)}{\mathbf{C}\ \mathbf{Z}\ \mathbf{C}^t\ \tilde{\mathbf{I}}_2} = \underset{(n\times p)\ \ p\times 1}{\mathbf{C}\ (\mathbf{E} + \mathbf{Z}\ \mathfrak{J})}.$$

Система уравнений в матричной форме для контурных токов состоит из n уравнений и содержит следующие члены:

$\mathbf{CZC}^t$ — квадратную матрицу контурных сопротивлений порядка $n \times n$. Эта матрица связывает падения напряжений в контурах с контурными токами. Она имеет вид

$$\mathbf{CZC}^t = \begin{Vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \dots & Z_{nn} \end{Vmatrix};$$

$\mathbf{CE}$ — матрицу-столбец порядка $n \times 1$, состоящую из элементов, представляющих собой суммы ЭДС ветвей, входящих в контуры, образованные связями, номера которых определяют номера элементов;

$\mathbf{CZ}\mathfrak{J} = \mathbf{C}(\mathbf{Z}\mathfrak{J})$ — матрицу-столбец порядка $n \times 1$, состоящую из элементов, представляющих собой суммы ЭДС эквивалентных источников ЭДС, образованных за счет преобразования источников токов $\mathfrak{J}$ в ветвях в источники ЭДС $\mathbf{Z}\mathfrak{J}$.

Правая сторона матричного равенства, таким образом, определяет суммы ЭДС, которые впредь будем писать в виде

$$\mathbf{C}(\mathbf{E}+\mathbf{Z}\mathfrak{I}) = \left\| \begin{matrix} \dot{E}_{11} \\ \dot{E}_{22} \\ \vdots \\ \dot{E}_{nn} \end{matrix} \right\|.$$

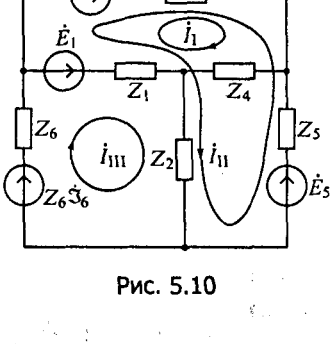


Рис. 5.10

Решив систему уравнений, найдем контурные токи (матрицу-столбец $\tilde{\mathbf{I}}_2$).

Зная $\tilde{\mathbf{I}}_2$, можно определить токи во всех обобщенных ветвях из выражения $\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{C}^t\tilde{\mathbf{I}}_2$, токи во всех пассивных элементах цепи — из формулы $\mathbf{I} = \tilde{\mathbf{I}} - \mathfrak{I}$, а также напряжения на пассивных элементах $\mathbf{U} = \mathbf{ZI}$ и напряжения обобщенных ветвей (между парами узлов) $\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U} - \mathbf{E}$.

Рассмотрим цепь, изображенную на рис. 5.10 (аналогичную рис. 5.5, *а*). Выделим ветви *1, 2, 3* в качестве дерева графа. Тогда ветви 4, 5 и 6 определят связи этого графа. Матрицы **C**, **E**, $\mathfrak{I}$ и **Z** можно записать в виде

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & -1 & & 1 & 1 & & \\ 5 & 1 & 1 & -1 & & 1 & \\ 6 & 1 & 1 & & & & 1 \end{array};$$

$$\mathbf{E} = \left\| \begin{matrix} \dot{E}_1 \\ 0 \\ \dot{E}_3 \\ 0 \\ \dot{E}_5 \\ 0 \end{matrix} \right\|; \qquad \mathfrak{I} = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathfrak{I}_6 \end{matrix} \right\};$$

$$\mathbf{Z} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline Z_1 & & & & & \\ \hline & Z_2 & & & & \\ \hline & & Z_3 & & & \\ \hline & & & Z_4 & & \\ \hline & & & & Z_5 & \\ \hline & & & & & Z_6 \\ \hline \end{array}.$$

Матрицы **CZ**, **CZC**^{t}, **ZЭ** и **C(E + ZЭ)** можно получить, выполнив соответствующие матричные операции умножения:

$$\mathbf{CZ} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & -Z_1 & & Z_3 & Z_4 & & \\ 5 & Z_1 & Z_2 & -Z_3 & & Z_5 & \\ 6 & Z_1 & Z_2 & & & & Z_6 \end{array};$$

$$\mathbf{CZC}^t = \begin{vmatrix} Z_1+Z_3+Z_4 & -Z_1-Z_3 & -Z_1 \\ -Z_1-Z_3 & Z_1+Z_2+Z_3+Z_5 & Z_1+Z_2 \\ -Z_1 & Z_1+Z_2 & Z_1+Z_2+Z_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{ZЭ} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Z_6\dot{Э}_6 \end{Vmatrix};$$

$$\mathbf{C(E + ZЭ)} = \begin{Vmatrix} -\dot{E}_1 + \dot{E}_3 \\ \dot{E}_1 - \dot{E}_3 + \dot{E}_5 \\ \dot{E}_1 + Z_6\dot{Э}_6 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dot{E}_{11} \\ \dot{E}_{22} \\ \dot{E}_{33} \end{Vmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{I}}_2 = \begin{Vmatrix} \tilde{I}_4 \\ \tilde{I}_5 \\ \tilde{I}_6 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dot{I}_{\text{I}} \\ \dot{I}_{\text{II}} \\ \dot{I}_{\text{III}} \end{Vmatrix}.$$

Окончательно система уравнений примет вид

$$\mathbf{CZC}^t\tilde{\mathbf{I}}_2 = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \dot{I}_{\text{I}} \\ \dot{I}_{\text{II}} \\ \dot{I}_{\text{III}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{E}_{11} \\ \dot{E}_{22} \\ \dot{E}_{33} \end{vmatrix}$$

или

$$\begin{aligned} Z_{11}\dot{I}_{\text{I}} + Z_{12}\dot{I}_{\text{II}} + Z_{13}\dot{I}_{\text{III}} &= \dot{E}_{11}; \\ Z_{21}\dot{I}_{\text{I}} + Z_{22}\dot{I}_{\text{II}} + Z_{23}\dot{I}_{\text{III}} &= \dot{E}_{22}; \\ Z_{31}\dot{I}_{\text{I}} + Z_{32}\dot{I}_{\text{II}} + Z_{33}\dot{I}_{\text{III}} &= \dot{E}_{33}. \end{aligned}$$

Если внимательно рассмотреть матрицу **CZ**, то можно заметить весьма простое ее отличие от матрицы **C**. Там, где в столбце матрицы **C** имеются ненулевые элементы, в матрице **CZ** появляются комплексные сопротивления, номера которых совпадают с номерами столбца. Поэтому заполнение этой матрицы как вручную, так и при помощи ЭВМ можно осуществить простым перебором элементов матрицы **C**, не прибегая для этой цели к матричному умножению. Произведение **CZC**^{t} также просто получить, рассматривая матрицу **C**. Пусть нас интересует j, s-й элемент **CZC**^{t}. Для этого должно быть выполнено умножение j-й строки матрицы **CZ** на s-й столбец матрицы **C**^{t}. Но s-й столбец матрицы **C**^{t} есть s-я строка матрицы **C**. Поэтому j, s-й элемент матрицы **CZC**^{t} есть сумма сопротивлений тех столбцов матрицы **CZ**, где в j-й и s-й строках матрицы **C** одновременно будут содержаться ненулевые элементы, причем знак сопротивления

в сумме определится по сочетанию знаков ненулевых элементов (знак «плюс» если знаки одинаковы, и «минус» — если они разные). Так, например, Z_{23} есть произведение 2-й строки матрицы **CZ** на 3-й столбец матрицы $\mathbf{C}^t$ или на 3-ю строку матрицы **C**, рассмотренную как столбец (по номерам 2-й строке соответствует число 5, а 3-й строке — число 6 в матрице **C**). В этих строках одновременно не равны нулю элементы в столбцах 1 (знаки совпадают) и 2 (знаки совпадают). Поэтому $Z_{23} = Z_1 + Z_2$. Разумеется, такой закономерности не будет при отсутствии совпадения ненулевых элементов у матриц **CZ** и $\mathbf{C}^t$, что может быть, если **Z** — несимметричная матрица (диагональная матрица симметрична).

Строка матрицы **C** определяет ветви, входящие в данный контур, поэтому элемент Z_{kk}, вычисляемый как произведение k-й строки матрицы **CZ** на k-й столбец матрицы $\mathbf{C}^t$, определит собственное сопротивление k-го контура, равное сумме всех комплексных сопротивлений ветвей, входящих в k-й контур. Точно так же произведение k-й строки матрицы **CZ** на m-й столбец матрицы $\mathbf{C}^t$ определит общее сопротивление контуров k и m, равное сумме комплексных сопротивлений тех ветвей дерева, которые входят в k-й и в m-й контуры. При этом сопротивления тех ветвей, контурные токи в которых совпадают по направлению, войдут в сумму со знаком «плюс», в противном случае — со знаком «минус».

Уравнения относительно контурных токов для не очень сложных цепей можно составить непосредственно, рассматривая схему цепи. Для этого следует выделить контуры, по которым проходят эти токи. Выделим в качестве таковых токи $\dot{I}_{\text{I}}, \dot{I}_{\text{II}}, \dot{I}_{\text{III}}$, показанные на рис. 5.10. Для них можно составить систему из трех уравнений. Для составления системы уравнений относительно n контурных токов пронумеруем контурные токи от 1 до n и выберем контуры таким образом, чтобы в них обязательно входила какая-либо новая ветвь (проще всего в качестве контурных токов выбирать токи в связях и нумеровать связи от 1 до n). Выберем произвольно положительные направления обходов контуров и будем считать эти направления также положительными направлениями контурных токов. Обозначим через $\dot{E}_{kk}$ сумму ЭДС, входящих в контур k. ЭДС, направление которых совпадает с направлением обхода, следует брать со знаком «плюс», а несовпадающие — со знаком «минус». Обозначим через Z_{kk} сумму сопротивлений, входящих в контур k, и назовем величину Z_{kk} собственным сопротивлением контура. Сумму сопротивлений в общей для контуров k и m ветви обозначим через Z_{km} или Z_{mk} и назовем общим сопротивлением контуров k и m. Согласно второму закону Кирхгофа, получаем для n независимых контуров следующую систему из n линейных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 + \ldots + Z_{1n}\dot{I}_n = \dot{E}_{11};\\
&Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 + \ldots + Z_{2n}\dot{I}_n = \dot{E}_{22};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&Z_{n1}\dot{I}_1 + Z_{n2}\dot{I}_2 + \ldots + Z_{nn}\dot{I}_n = \dot{E}_{nn}.
\end{aligned}
$$

Составление таких уравнений, содержащих n контурных токов, и решение их относительно этих токов и является содержанием метода контурных токов.

Для соблюдения единообразия в написании уравнений перед всеми членами, содержащими общие сопротивления Z_{km}, ставим знак «плюс». При этом следует считать $Z_{km} = Z_{mk} = r_{km} + jx_{km}$, если условные положительные направления контурных токов в общей ветви контуров k и m совпадают, и $Z_{km} = Z_{mk} = -r_{km} - jx_{km}$, если они противоположны. В этих выражениях r_{km} и x_{km} — алгебраические суммы активных и реактивных сопротивлений в общей ветви.

Упрощение, достигаемое введением понятия контурных токов, не ограничивается уменьшением числа уравнений, оно определяется еще и тем, что достигается некоторый автоматизм в записи системы уравнений. Так, приведенная выше система из n уравнений записана даже без рассмотрения конкретных контуров цепи — выяснено лишь число независимых контуров. Естественно, для определения величин Z_{kk}, Z_{km} и $\dot{E}_{kk}$ необходимо учесть входящие в контуры конкретные сопротивления и ЭДС, а также выбранные положительные направления токов и ЭДС.

Решая приведенную выше систему уравнений для контурного тока $\dot{I}_k$ в контуре k, найдем

$$\dot{I}_k = \dot{E}_{11}\frac{\Delta_{k1}}{\Delta} + \dot{E}_{22}\frac{\Delta_{k2}}{\Delta} + \ldots + \dot{E}_{mm}\frac{\Delta_{km}}{\Delta} + \ldots + \dot{E}_{nn}\frac{\Delta_{kn}}{\Delta},$$

где Δ — главный определитель системы, причем

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{1n} & \ldots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & \ldots & Z_{2n} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & \ldots & Z_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & Z_{n3} & \ldots & Z_{nn} \end{vmatrix},$$

а Δ_{k1}, Δ_{k2}, ..., Δ_{km}, ..., Δ_{kn} — алгебраические дополнения, получаемые из определителя Δ путем вычеркивания в нем k-й строки и m-го столбца и умножения вновь полученного определителя на $(-1)^{k+m}$. Весьма существенно заметить, что для линейных цепей без зависимых источников энергии $\Delta_{km} = \Delta_{mk}$. Действительно, Δ_{km} получается из Δ путем вычеркивания k-й строки и m-го столбца, а Δ_{mk} — путем вычеркивания m-й строки и k-го столбца. Так как при отсутствии зависимых источников энергии $Z_{km} = Z_{mk}$, то в результате вычеркивания получаются два определителя, в которых элементы строк одного равны элементам соответствующих столбцов другого, а такие определители, как известно, равны друг другу.

В матричной форме решение для контурных токов записывается в виде

$$\tilde{\mathbf{I}}_2 = (\mathbf{CZC}')^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{E} + \mathbf{Z}\tilde{\mathfrak{I}}),$$

где $(\mathbf{CZC}^t)^{-1}(\mathbf{CZC}^t) = \mathbf{1}$, т. е. $(\mathbf{CZC}^t)^{-1}$ — обратная матрица контурных сопротивлений.

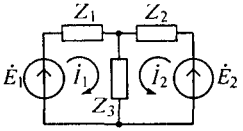


Рис. 5.11

В качестве примера рассмотрим цепь, изображенную на рис. 5.11. Положительные направления контурных токов $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ направим так, как указано стрелками. Контурные токи $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ в данном частном случае равны действительным токам в первой и во второй ветвях. Действительный же ток в третьей ветви равен

сумме контурных токов $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$. Пользуясь методом контурных токов, имеем только два уравнения:

$$Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 = \dot{E}_{11}; \quad Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 = \dot{E}_{22},$$

причем собственные сопротивления контуров

$$Z_{11} = Z_1 + Z_3 \quad \text{и} \quad Z_{22} = Z_2 + Z_3$$

и общее сопротивление

$$Z_{12} = Z_{21} = Z_3;$$

кроме того, $\dot{E}_{11} = \dot{E}_1$; $\dot{E}_{22} = \dot{E}_2$.

Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix} = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2 = (Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_3) - Z_3^2 =$$

$$= Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1 = D.$$

Соответственно,

$$\Delta_{11} = Z_{22} = Z_2 + Z_3; \quad \Delta_{22} = Z_{11} = Z_1 + Z_3;$$

$$\Delta_{12} = \Delta_{21} = -Z_{12} = -Z_3.$$

Получаем

$$\dot{I}_1 = \dot{E}_1\frac{Z_2 + Z_3}{D} - \dot{E}_2\frac{Z_3}{D}; \quad \dot{I}_2 = -\dot{E}_1\frac{Z_3}{D} + \dot{E}_2\frac{Z_1 + Z_3}{D}.$$

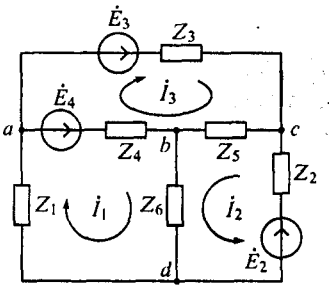


Рис. 5.12

Ток $\dot{I}_3$ получается алгебраическим суммированием токов $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$:

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{E}_1\frac{Z_2}{D} + \dot{E}_2\frac{Z_1}{D}.$$

Составим уравнения по методу контурных токов для цепи, изображенной на рис. 5.12, причем изберем независимые контуры и положительные направления контурных токов в них согласно рис. 5.12. Этих уравнений будет только три, и они имеют вид

$$Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 + Z_{13}\dot{I}_3 = \dot{E}_{11};$$

$$Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 + Z_{23}\dot{I}_3 = \dot{E}_{22};$$

$$Z_{31}\dot{I}_1 + Z_{32}\dot{I}_2 + Z_{33}\dot{I}_3 = \dot{E}_{33},$$

причем

$$Z_{11} = Z_4 + Z_6 + Z_1; \quad Z_{22} = Z_2 + Z_5 + Z_6; \quad Z_{33} = Z_3 + Z_5 + Z_4;$$

$$Z_{12} = Z_{21} = Z_6; \quad Z_{23} = Z_{32} = Z_5; \quad Z_{13} = Z_{31} = -Z_4;$$

$$\dot{E}_{11} = \dot{E}_4; \quad \dot{E}_{22} = \dot{E}_2; \quad \dot{E}_{33} = \dot{E}_3 - \dot{E}_4.$$

Здесь получаем определитель третьего порядка, выражение для которого уже достаточно громоздко. С увеличением числа уравнений решение становится все более трудоемким.

Если в цепи действует лишь одна ЭДС $\dot{E}_{kk} = \dot{E}_k$, то для токов имеем

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta}\dot{E}_k;\ \dot{I}_2 = \frac{\Delta_{2k}}{\Delta}\dot{E}_k;\ \ldots;\ \dot{I}_k = \frac{\Delta_{kk}}{\Delta}\dot{E}_k;\ \ldots;\ \dot{I}_m = \frac{\Delta_{mk}}{\Delta}\dot{E}_k;\ \ldots;\ \dot{I}_n = \frac{\Delta_{nk}}{\Delta}\dot{E}_k.$$

Здесь величину Δ/Δ_{kk}, имеющую размерность сопротивления и определяющую ток в k-м контуре от ЭДС, содержащейся в этом же контуре, назовем входным сопротивлением k-го контура.

Величину Δ/Δ_{mk}, определяющую ток в m-м контуре от ЭДС, действующей в k-м контуре, назовем взаимным сопротивлением от k-го контура к m-му контуру. Входное и взаимное сопротивления определены здесь для контуров цепи. Однако их всегда можно определять и для ветвей цепи. Это ясно из того, что всегда можно выбрать независимые контуры так, чтобы две ветви, например ветви ab и cd, вошли каждая только в один контур, скажем, ветвь ab — в k-й контур, а ветвь cd — в m-й контур.

Обратим внимание на то, что взаимное и общее сопротивления — величины существенно различные. *Общее* сопротивление Z_{km} есть сопротивление ветви, входящей как в k-й, так и в m-й контур. Для него, как и для сопротивления любой ветви, имеет место соотношение $Z_{km} = Z_{mk}$. *Взаимное* же сопротивление может относиться к двум любым контурам цепи, в общем случае и не имеющим общей ветви. Поэтому если обозначать взаимные сопротивления $\dot{E}_k/\dot{I}_m$ и $\dot{E}_m/\dot{I}_k$ также через Z_{km} и Z_{mk}, то для них связь $Z_{km} = Z_{mk}$ будет иметь место только при дополнительном условии, что положительные направления для ЭДС $\dot{E}_k$ и тока $\dot{I}_k$ в k-м контуре согласованы между собой, так же как и для ЭДС $\dot{E}_m$ и тока $\dot{I}_m$ в m-м контуре, т. е. в *обоих* контурах положительные направления ЭДС и тока приняты в одном направлении или же в обоих контурах положительные направления ЭДС и тока друг другу противоположны. В противном случае для взаимных сопротивлений будет $Z_{km} = -Z_{mk}$. Это важное обстоятельство более детально будет обосновано в § 5.16 при рассмотрении принципа взаимности.

Существенно различный смысл имеют также входное и собственное сопротивления контура. *Собственное* сопротивление есть сумма всех сопротивлений, входящих только в данный контур. *Входное* же сопротивление есть сопротивление всей цепи, определенное по отношению к источнику ЭДС в данном контуре при условии, что ЭДС всех других источников приняты равными нулю.

Заметим еще, что при определении входного и взаимного сопротивлений можно исходить не из ЭДС в контуре или в ветви, а из напряжения между двумя точками контура или ветви, например напряжения на входных или выходных зажимах в какой-нибудь части цепи. При этом, естественно, в собственном сопротивлении этого контура необходимо учесть только сопротивления участков контура между этими зажимами, входящих в рассматриваемую цепь.

5.12. Метод узловых напряжений

При расчете сложных электрических цепей, когда уменьшенное на единицу число узлов меньше числа независимых контуров, целесообразно воспользоваться

методом узловых напряжений. Узловыми напряжениями, которые являются искомыми величинами при этом методе, называют напряжения между каждым из $q-1$ узлов и одним определенным, но произвольно выбранным опорным узлом, который обозначим индексом 0. Узловое напряжение $\dot{U}_{k0}$ имеет положительное направление от k-го узла ($k = 1, 2, \ldots, q-1$) к опорному узлу. Определив $q-1$ искомых узловых напряжений, нетрудно найти напряжения между любыми парами узлов и токи в ветвях цепи. Поскольку по первому закону Кирхгофа можно записать $q-1$ независимых уравнений, то выразим все токи в ветвях через искомые узловые напряжения для получения системы уравнений, записанных относительно $q-1$ искомых величин.

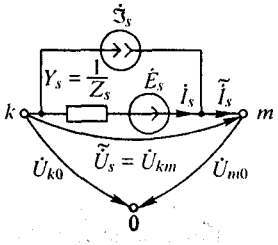


Рис. 5.13

Условимся направлять узловое напряжение от k-го узла к опорному, или базисному, узлу. Обозначим узловое напряжение между k-м и базисным узлами через $\dot{U}_{k0}$ (рис. 5.13). Тогда напряжение некоторой обобщенной ветви s, присоединенной к узлам k и m, будет равно

$$\tilde{U}_s = \dot{U}_{km} = \dot{U}_{k0} - \dot{U}_{m0} = a_{sk}\dot{U}_{k0} + a_{sm}\dot{U}_{m0}.$$

Заметим, что номера узловых напряжений совпадают с номерами узлов графа схемы и эти напряжения входят в выражение для напряжения s-й ветви обязательно с разными знаками. Примем $a_{sk} = 1$, если напряжение s-й ветви направлено от k-го узла, и $a_{sk} = -1$, если напряжение s-й ветви направлено к m-му узлу. Если сопоставить эти правила с правилами заполнения матрицы узловых соединений $\mathbf{A}$, то можно заметить, что матрица-столбец напряжений ветвей графа схемы представляется через матрицу-столбец узловых напряжений как произведение

$$\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{A}^t\mathbf{U}_0 = \mathbf{A}^t \begin{Vmatrix} \dot{U}_{10} \\ \vdots \\ \dot{U}_{q-1,0} \end{Vmatrix}.$$

Действительно, строки матрицы $\mathbf{A}^t$ определяются ветвями графа схемы, а столбцы — узлами, и поэтому, если данная ветвь не соединена с опорным (или базисным) узлом, то в данной строке будут только два ненулевых (единичных) элемента обязательно с противоположными знаками. Произведение данной матрицы-строки на матрицу-столбец узловых напряжений равно разности двух узловых напряжений, которая и определяет напряжение данной обобщенной ветви.

Для формирования системы уравнений относительно узловых напряжений выразим $\tilde{\mathbf{U}}$ через параметры пассивных и активных элементов обобщенной ветви, так как в общем случае такие ветви содержат и источники ЭДС, и источники тока. Получим

$$\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U} - \mathbf{E}; \quad \tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{I} + \mathfrak{I} \quad \text{и} \quad \mathbf{I} = \mathbf{YU}.$$

Согласно первому закону Кирхгофа, для узлов графа схемы имеем

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{AI} + \mathbf{A}\mathfrak{I} = \mathbf{0} \quad \text{или} \quad \mathbf{AYU} = -\mathbf{A}\mathfrak{I}.$$

Но $\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{E} = \mathbf{A}^t\mathbf{U}_0 + \mathbf{E}$, поэтому

$$\mathbf{AYA}^t\mathbf{U}_0 = -\mathbf{A}(\mathfrak{J} + \mathbf{YE}).$$

Мы получили в матричной форме уравнение для узловых напряжений ($q - 1$ скалярных уравнений), содержащее следующие члены:

$\mathbf{AYA}^t$ — квадратная матрица узловых проводимостей порядка $(q - 1) \times (q - 1)$. Эту матрицу запишем в виде

$$\mathbf{AYA}^t = \begin{Vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1,q-1} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2,q-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{q-1,1} & Y_{q-1,2} & \dots & Y_{q-1,q-1} \end{Vmatrix},$$

где Y_{kk} — собственная проводимость k-го узла; Y_{km} — общая проводимость узлов k и m;

$\mathbf{A}\mathfrak{J}$ — матрица-столбец порядка $(q - 1) \times 1$, состоящая из элементов, представляющих собой суммы токов источников токов ветвей, соединенных с данным узлом, номер которого определяет номер элемента;

$\mathbf{A}(\mathbf{YE})$ — матрица-столбец порядка $(q - 1) \times 1$, элементы которой представляют собой суммы токов эквивалентных источников тока, образованных за счет преобразования источников ЭДС ($\mathbf{E}$) в ветвях в источники тока ($\mathbf{YE}$).

Правая часть матричного равенства, таким образом, определяет сумму токов источников токов, которую запишем в виде

$$-\mathbf{A}(\mathfrak{J} + \mathbf{YE}) = \begin{Vmatrix} \dot{\mathfrak{J}}_{11} \\ \dot{\mathfrak{J}}_{22} \\ \vdots \\ \dot{\mathfrak{J}}_{q-1,q-1} \end{Vmatrix}.$$

Решив тем или иным способом систему уравнений относительно узловых напряжений $\mathbf{U}_0$, получим возможность определить напряжения всех ветвей графа схемы из выражения $\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{A}^t\mathbf{U}_0$, напряжения на пассивных элементах цепи из формулы $\mathbf{U} = \mathbf{E} + \tilde{\mathbf{U}}$, токи в этих элементах $\mathbf{I} = \mathbf{YU}$ и токи в обобщенных ветвях графа схемы $\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{I} + \mathfrak{J}$.

Здесь, так же как и в методе контурных токов, произведение $\mathbf{AY}$ (при условии диагональности матрицы $\mathbf{Y}$) определит матрицу, отличающуюся от $\mathbf{A}$ тем, что вместо единиц в столбцах будут комплексные проводимости, номера которых совпадают с номерами столбцов (номерами ветвей) матрицы $\mathbf{A}$. Произведение $\mathbf{AY}$ на $\mathbf{A}^t$ определяет элементы матрицы узловых проводимостей. Произведение k-й строки матрицы $\mathbf{AY}$ на k-й столбец матрицы $\mathbf{A}^t$ определит *собственную проводимость* k-го узла, равную сумме комплексных проводимостей ветвей, соединенных с k-м узлом. Произведение k-й строки матрицы $\mathbf{AY}$ на m-й столбец матрицы $\mathbf{A}^t$ определит *общую проводимость* узлов k и m и будет всегда равно сумме проводимостей ветвей, соединяющих узлы k и m, взятой с обратным знаком.

В развернутой форме совокупность уравнений по методу узловых напряжений имеет вид

$$Y_{11}\dot{U}_{10} + Y_{12}\dot{U}_{20} + \ldots + Y_{1,q-1}\dot{U}_{q-1,0} = \dot{\mathfrak{I}}_{11};$$
$$Y_{21}\dot{U}_{10} + Y_{22}\dot{U}_{20} + \ldots + Y_{2,q-1}\dot{U}_{q-1,0} = \dot{\mathfrak{I}}_{22};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Y_{q-1,1}\dot{U}_{10} + Y_{q-1,2}\dot{U}_{20} + \ldots + Y_{q-1,q-1}\dot{U}_{q-1,0} = \dot{\mathfrak{I}}_{q-1,q-1}.$$

Здесь

$$Y_{kk} = \sum_{j=1}^{p} a_{kj}Y_j a_{jk}; \quad Y_{km} = \sum_{j=1}^{p} a_{kj}Y_j a_{jm}; \quad \dot{\mathfrak{I}}_{kk} = -\sum_{j=1}^{p} a_{kj}(\dot{\mathfrak{I}}_j + Y_j\dot{E}_j).$$

Решив эту систему, найдем узловые напряжения, причем для k-го узла величина $\dot{U}_{k0}$ будет равна

$$\dot{U}_{k0} = \dot{\mathfrak{I}}_{11}\frac{\Delta_{1k}}{\Delta} + \dot{\mathfrak{I}}_{22}\frac{\Delta_{2k}}{\Delta} + \ldots + \dot{\mathfrak{I}}_{q-1,q-1}\frac{\Delta_{q-1,k}}{\Delta},$$

где Δ — главный определитель системы и Δ_{mk} — его алгебраическое дополнение.

В матричной форме решение системы узловых уравнений записывается в виде

$$\mathbf{U}_0 = -(\mathbf{AYA}^t)^{-1}\mathbf{A}(\mathfrak{I} + \mathbf{YE}),$$

где $(\mathbf{AYA}^t)^{-1}(\mathbf{AYA}^t) = \mathbf{1}$, т. е. $(\mathbf{AYA}^t)^{-1}$ — обратная матрица узловых проводимостей.

Если матрицу узловых проводимостей записать в виде $\| Y_{jk} \|$, то обратную ей матрицу запишем в форме $\|Y_{jk}\|^{-1} = \left\| \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} \right\| = \frac{1}{\Delta}\|\Delta_{jk}\|$, где Δ и Δ_{jk} — определитель и его алгебраическое дополнение. По размерности элементы обратной матрицы проводимостей являются комплексными сопротивлениями.

В качестве примера составим уравнения по методу узловых напряжений для цепи, изображенной на рис. 5.14, *а*, в которой имеются источники ЭДС и тока:

$$\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I}_{1m}\sin(\omega t + \psi_1); \quad e_5 = E_{5m}\sin(\omega t + \psi_5);$$
$$e_6 = E_{6m}\sin(\omega t + \psi_6); \quad e_7 = E_{7m}\sin(\omega t + \psi_7);$$
$$e_8 = E_{8m}\sin(\omega t + \psi_8).$$

Прежде всего запишем в комплексной форме все исходные данные, соответствующие схеме замещения цепи (рис. 5.14, *б*):

$$\dot{\mathfrak{I}}_1 = \frac{\mathfrak{I}_{1m}}{\sqrt{2}}e^{j\psi_1} = \mathfrak{I}_1 e^{j\psi_1}; \quad \dot{E}_5 = E_5 e^{j\psi_5}; \quad \dot{E}_6 = E_6 e^{j\psi_6}; \quad \dot{E}_7 = E_7 e^{j\psi_7};$$
$$\dot{E}_8 = E_8 e^{j\psi_8}; \quad Y_1 = 1/(r_1 + j\omega L_1); \quad Y_2 = 1/r_2; \quad Y_3 = 1/(j\omega L_3);$$
$$Y_4 = 1\Big/\left(r_4 + j\omega L_4 + \frac{1}{j\omega C_4}\right); \quad Y_5 = 1\Big/\left(r_5 + \frac{1}{j\omega C_5}\right); \quad Y_6 = j\omega C_6;$$
$$Y_7 = 1/r_7; \quad Y_8 = 1\Big/\left(j\omega L_8 + \frac{1}{j\omega C_8}\right).$$

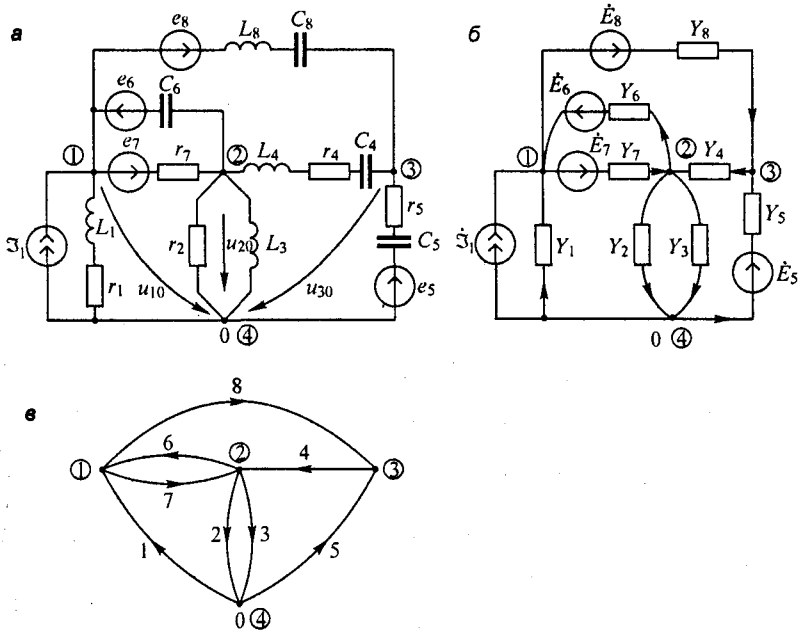


Рис. 5.14

Матрица соединений для графа схемы (рис. 5.14, *в*) равна (здесь, как и ранее, пустые клетки обозначают нулевые элементы)

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline \mathbf{1} & -1 & & & & & -1 & 1 & 1 \\ \mathbf{2} & & 1 & 1 & -1 & & 1 & -1 & \\ \mathbf{3} & & & & 1 & -1 & & & -1 \end{array}.$$

Кроме того, можем записать

$$\tilde{\mathbf{U}}^t = \left\| \tilde{U}_1 \quad \tilde{U}_2 \quad \tilde{U}_3 \quad \tilde{U}_4 \quad \tilde{U}_5 \quad \tilde{U}_6 \quad \tilde{U}_7 \quad \tilde{U}_8 \right\|;$$

$$\mathbf{E}^t = \left\| 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dot{E}_5 \quad \dot{E}_6 \quad \dot{E}_7 \quad \dot{E}_8 \right\|;$$

$$\mathbf{Y} = \operatorname{diag}(Y_1 \quad Y_2 \quad Y_3 \quad Y_4 \quad Y_5 \quad Y_6 \quad Y_7 \quad Y_8);$$

$$\mathbf{I}^t = \left\| \dot{I}_1 \quad \dot{I}_2 \quad \dot{I}_3 \quad \dot{I}_4 \quad \dot{I}_5 \quad \dot{I}_6 \quad \dot{I}_7 \quad \dot{I}_8 \right\|;$$

$$\mathfrak{I}^t = \left\| \dot{\mathfrak{I}}_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right\|;$$

$$\mathbf{U}_0^t = \left\| \dot{U}_{10} \quad \dot{U}_{20} \quad \dot{U}_{30} \right\|.$$

Здесь для удобства записи вместо матрицы-столбца напряжений обобщенных ветвей $\tilde{\mathbf{U}}$ записана ее транспонированная матрица в виде матрицы-строки. Аналогичная запись сделана для остальных матриц-столбцов. Также для удобства

и квадратная диагональная матрица проводимостей цепи **Y** записана в краткой форме.

Имея в виду особенности матричного произведения **AY** и диагональный характер **Y**-матрицы, элементы матрицы **AY** можно записать непосредственно по матрице **A** (см. § 5.11). Имеем

$$\mathbf{AY} = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & -Y_1 & & & & & -Y_6 & Y_7 & Y_8 \\ 2 & & Y_2 & Y_3 & -Y_4 & & Y_6 & -Y_7 & \\ 3 & & & & Y_4 & -Y_5 & & & -Y_8 \end{array}$$

и

$$\mathbf{AYA}^t = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & Y_1 + Y_6 + Y_7 + Y_8 & -Y_6 - Y_7 & -Y_8 \\ 2 & -Y_6 - Y_7 & Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_6 + Y_7 & -Y_4 \\ 3 & -Y_8 & -Y_4 & Y_4 + Y_5 + Y_8 \end{array}.$$

Произведение **AY** на $\mathbf{A}^t$ можно, конечно, получить по формальным правилам матричного умножения. Но этот же результат можно получить простым сопоставлением строк матрицы **A** (или **AY**), как это сделано в § 5.11 с матрицей контуров.

Произведение **YE** есть матрица-столбец, которая в транспонированном виде равна

$$(\mathbf{YE})^t = \left\| 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad Y_5\dot{E}_5 \quad Y_6\dot{E}_6 \quad Y_7\dot{E}_7 \quad Y_8\dot{E}_8 \right\|,$$

что очень просто записать непосредственно по матрице **E**.

Так как $(\mathfrak{Z} + \mathbf{YE})^t = \left\| \dot{\mathfrak{Z}}_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad Y_5\dot{E}_5 \quad Y_6\dot{E}_6 \quad Y_7\dot{E}_7 \quad Y_8\dot{E}_8 \right\|$, то

$$\mathbf{A}(\mathfrak{Z} + \mathbf{YE}) = \begin{array}{c|c} & \\ \hline 1 & -\dot{\mathfrak{Z}}_1 - Y_6\dot{E}_6 + Y_7\dot{E}_7 + Y_8\dot{E}_8 \\ 2 & Y_6\dot{E}_6 - Y_7\dot{E}_7 \\ 3 & -Y_5\dot{E}_5 - Y_8\dot{E}_8 \end{array} = -\begin{array}{c} \\ \hline \dot{\mathfrak{Z}}_{11} \\ \dot{\mathfrak{Z}}_{22} \\ \dot{\mathfrak{Z}}_{33} \end{array}$$

определяет матрицу-столбец, элементы которой являются суммой тех элементов матрицы $(\mathfrak{Z} + \mathbf{YE})$, номера которых совпадают с номерами столбцов матрицы **A** с ненулевыми элементами. Например, во второй строке матрицы **A** имеются лишь следующие ненулевые элементы: $a_{22} = 1$, $a_{23} = 1$, $a_{24} = -1$, $a_{26} = 1$, $a_{27} = -1$. Следовательно, имеем сумму $Y_6E_6 - Y_7E_7$.

В результате всех операций получаем

$$\mathbf{AYA}^t\mathbf{U}_0 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ \hline Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ \hline Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline \dot{U}_{10} \\ \hline \dot{U}_{20} \\ \hline \dot{U}_{30} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \dot{\mathfrak{I}}_{11} \\ \hline \dot{\mathfrak{I}}_{22} \\ \hline \dot{\mathfrak{I}}_{33} \\ \hline \end{array}$$

или

$$Y_{11}\dot{U}_{10} + Y_{12}\dot{U}_{20} + Y_{13}\dot{U}_{30} = \dot{\mathfrak{I}}_{11};$$
$$Y_{21}\dot{U}_{10} + Y_{22}\dot{U}_{20} + Y_{23}\dot{U}_{30} = \dot{\mathfrak{I}}_{22};$$
$$Y_{31}\dot{U}_{10} + Y_{32}\dot{U}_{20} + Y_{33}\dot{U}_{30} = \dot{\mathfrak{I}}_{33},$$

где

$$Y_{11} = Y_1 + Y_6 + Y_7 + Y_8; \quad Y_{22} = Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_6 + Y_7;$$
$$Y_{12} = Y_{21} = -Y_6 - Y_7; \quad Y_{13} = Y_{31} = -Y_8;$$
$$\dot{\mathfrak{I}}_{11} = \dot{\mathfrak{I}}_1 + Y_6\dot{E}_6 - Y_7\dot{E}_7 - Y_8\dot{E}_8; \quad \dot{\mathfrak{I}}_{22} = -Y_6\dot{E}_6 + Y_7\dot{E}_7;$$
$$Y_{33} = Y_4 + Y_5 + Y_8;$$
$$Y_{23} = Y_{32} = -Y_4;$$
$$\dot{\mathfrak{I}}_{33} = Y_5\dot{E}_5 + Y_8\dot{E}_8.$$

Таким образом, собственная проводимость узлов есть сумма проводимостей, присоединенных к данному узлу, а общая проводимость узлов есть сумма проводимостей ветвей, соединяющих данную пару узлов, взятая с обратным знаком.

При наличии в цепи только одного источника тока $\dot{\mathfrak{I}}_{0k}$, подключенного между опорным и k-м узлом, имеем

$$\dot{U}_{10} = \dot{\mathfrak{I}}_{0k}\frac{\Delta_{1k}}{\Delta}; \ldots; \quad \dot{U}_{k0} = \dot{\mathfrak{I}}_{0k}\frac{\Delta_{kk}}{\Delta}; \ldots; \quad \dot{U}_{m0} = \dot{\mathfrak{I}}_{0k}\frac{\Delta_{mk}}{\Delta}.$$

Величину Δ/Δ_{kk}, имеющую размерность проводимости, назовем *входной проводимостью* между опорным и k-м узлами, а величину Δ/Δ_{mk} — *взаимной проводимостью* между k-м и m-м узлами.

5.13. Метод сечений

Аналогично методу узловых напряжений, можно уменьшить число искомых величин до $q - 1$ выбором в качестве неизвестных — напряжений ветвей дерева $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \ldots, \tilde{U}_{q-1}$ или матрицы-столбца $\tilde{\mathbf{U}}_1$, имея в виду, что произведена упорядоченная нумерация ветвей графа схемы, а именно сначала пронумерованы ветви дерева, а затем связи. Обратим внимание на то обстоятельство, что для метода узловых напряжений нет такой необходимости. Согласно второму закону Кирхгофа, имеем

$$\mathbf{C}\tilde{\mathbf{U}} = \begin{array}{c} \\ q \\ \vdots \\ p \end{array} \overset{1\ldots(q-1), \quad q\ldots p}{\begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{F} & \mathbf{1} \\ \hline \end{array}} \times \begin{array}{|c|} \hline \tilde{\mathbf{U}}_1 \\ \hline \tilde{\mathbf{U}}_2 \\ \hline \end{array} = \mathbf{0} \quad \text{или} \quad \tilde{\mathbf{U}}_2 = -\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}_1.$$

Тогда напряжения всех обобщенных ветвей графа схемы можно выразить через напряжения ветвей дерева в следующем виде:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{array}{|c|}\hline \mathbf{1} \\ \hline -\mathbf{F} \\ \hline \end{array}\, \tilde{\mathbf{U}}_1 = \mathbf{D}^t \tilde{\mathbf{U}}_1, \text{ поскольку } \begin{array}{|c|}\hline \mathbf{1} \\ \hline -\mathbf{F} \\ \hline \end{array} = \left(\begin{array}{|c|c|}\hline \mathbf{1} & -\mathbf{F}^t \\ \hline \end{array} \right)^t = \mathbf{D}^t.$$

Запишем также следующие соотношения для активных и пассивных элементов цепи:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U} - \mathbf{E}; \quad \tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{I} + \mathfrak{I}.$$

Для сечений цепи имеем

$$\mathbf{D}\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{0} \quad \text{или} \quad \mathbf{DI} = -\mathbf{D}\mathfrak{I}.$$

Учитывая, что $\mathbf{I} = \mathbf{YU}$ и $\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{E}$, можно записать

$$\mathbf{DY}\tilde{\mathbf{U}} = -\mathbf{D}(\mathfrak{I} + \mathbf{YE}).$$

С учетом того, что $\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{D}^t \tilde{\mathbf{U}}_1$, получим

$$\mathbf{DYD}^t \tilde{\mathbf{U}}_1 = -\mathbf{D}(\mathfrak{I} + \mathbf{YE}).$$

Мы получили в матричной форме уравнение относительно напряжений ветвей дерева ($q - 1$ скалярных уравнений), куда входят:

$\mathbf{DYD}^t$ — квадратная матрица проводимостей сечений порядка $(q-1)\times(q-1)$. Эту матрицу запишем в виде, аналогичном матрице узловых проводимостей, а именно:

$$\mathbf{DYD}^t = \begin{Vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1,q-1} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2,q-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{q-1,1} & Y_{q-1,2} & \dots & Y_{q-1,q-1} \end{Vmatrix},$$

где Y_{kk} — собственная проводимость k-го сечения; Y_{km} — общая проводимость сечений k и m;

$\mathbf{D}\mathfrak{I}$ — матрица-столбец порядка $(q-1)\times 1$, состоящая из элементов, представляющих собой суммы токов источников тока ветвей, пересекаемых данным сечением, номер которого определяет номер ветви дерева;

$\mathbf{D}(\mathbf{YE})$ — матрица-столбец порядка $(q-1)\times 1$, состоящая из элементов, представляющих собой суммы токов эквивалентных источников тока, образованных за счет преобразования источников ЭДС в ветвях в источники тока ($\mathbf{YE}$).

В развернутой форме совокупность уравнений, полученных по методу сечений, имеет вид

$$Y_{11}\tilde{U}_1 + Y_{12}\tilde{U}_2 + \dots + Y_{1,q-1}\tilde{U}_{q-1} = \dot{\mathfrak{I}}_{11};$$

. . . . . .

. . . . . .

$$Y_{q-1,1}\tilde{U}_1 + Y_{q-1,2}\tilde{U}_2 + \dots + Y_{q-1,q-1}\tilde{U}_{q-1} = \dot{\mathfrak{I}}_{q-1,q-1}.$$

Здесь

$$Y_{kk} = \sum_{j=1}^{p} d_{kj} Y_j d_{jk}; \quad Y_{km} = \sum_{j=1}^{p} d_{kj} Y_j d_{jm}; \quad \Im_{kk} = -\sum_{j=1}^{p} d_{kj} (\dot{\Im}_j + Y_j \dot{E}_j).$$

Решение этой системы в матричной форме можно записать в виде

$$\tilde{\mathbf{U}}_1 = -(\mathbf{DYD}^t)^{-1}\mathbf{D}(\Im + \mathbf{YE}).$$

Для напряжения k-й ветви дерева можно записать

$$\tilde{U}_k = \dot{\Im}_{11}\frac{\Delta_{1k}}{\Delta} + \ldots + \dot{\Im}_{q-1,q-1}\frac{\Delta_{q-1,k}}{\Delta},$$

где Δ — главный определитель матрицы проводимостей сечений и Δ_{mk} — его алгебраическое дополнение.

В качестве примера составим уравнение по методу сечений для цепи, изображенной на рис. 5.5, *а* и *б*, графы которой представлены на рис. 5.5, *в*, *г* и *д*. Имеем следующие исходные данные:

$$\mathbf{E}^t = \left\| \dot{E}_1 \quad 0 \quad \dot{E}_3 \quad 0 \quad \dot{E}_5 \quad 0 \right\|; \qquad \dot{\Im}^t = \left\| 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dot{\Im}_6 \right\|;$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^t = \left\| \tilde{U}_1 \quad \tilde{U}_2 \quad \tilde{U}_3 \quad \tilde{U}_4 \quad \tilde{U}_5 \quad \tilde{U}_6 \right\|; \qquad \mathbf{Y} = \operatorname{diag}(Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6).$$

Для графа схемы (см. рис. 5.5) имеем три сечения: *1, 2, 3* (согласно трем номерам ветвей дерева). Тогда

$$\mathbf{D} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & & & 1 & -1 & -1 \\ 2 & & 1 & & & -1 & -1 \\ 3 & & & 1 & -1 & 1 & \end{array}; \qquad \mathbf{DY} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & Y_1 & & & Y_4 & -Y_5 & -Y_6 \\ 2 & & Y_2 & & & -Y_5 & -Y_6 \\ 3 & & & Y_3 & -Y_4 & Y_5 & \end{array};$$

$$\mathbf{DYD}^t = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & Y_1 + Y_4 + Y_5 + Y_6 & Y_5 + Y_6 & -Y_4 - Y_5 \\ 2 & Y_5 + Y_6 & Y_2 + Y_5 + Y_6 & -Y_5 \\ 3 & -Y_4 - Y_5 & -Y_5 & Y_3 + Y_4 + Y_5 \end{array};$$

$$(\mathbf{YE})^t = \left\| Y_1\dot{E}_1 \quad 0 \quad Y_3\dot{E}_3 \quad 0 \quad Y_5\dot{E}_5 \quad 0 \right\|;$$

$$\mathbf{D}(\Im + \mathbf{YE}) = \begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline 1 & Y_1\dot{E}_1 - Y_5\dot{E}_5 - \dot{\Im}_6 \\ 2 & -Y_5\dot{E}_5 - \dot{\Im}_6 \\ 3 & Y_3\dot{E}_3 + Y_5\dot{E}_5 \end{array} = -\begin{array}{c} \\ \hline \dot{\Im}_{11} \\ \dot{\Im}_{22} \\ \dot{\Im}_{33} \end{array}.$$

Следовательно, имеем следующую систему уравнений:

$$Y_{11}\tilde{U}_1 + Y_{12}\tilde{U}_2 + Y_{13}\tilde{U}_3 = \dot{\mathcal{Э}}_{11};$$
$$Y_{21}\tilde{U}_1 + Y_{22}\tilde{U}_2 + Y_{23}\tilde{U}_3 = \dot{\mathcal{Э}}_{22};$$
$$Y_{31}\tilde{U}_1 + Y_{32}\tilde{U}_2 + Y_{33}\tilde{U}_3 = \dot{\mathcal{Э}}_{33},$$

где

$$Y_{11} = Y_1 + Y_4 + Y_5 + Y_6; \quad Y_{22} = Y_2 + Y_5 + Y_6;$$
$$Y_{21} = Y_{12} = Y_5 + Y_6; \quad Y_{13} = Y_{31} = -Y_4 - Y_5;$$
$$\dot{\mathcal{Э}}_{11} = \dot{\mathcal{Э}}_6 - Y_1\dot{E}_1 + Y_5\dot{E}_5; \quad \dot{\mathcal{Э}}_{22} = \dot{\mathcal{Э}}_6 + Y_5\dot{E}_5;$$

$$Y_{33} = Y_3 + Y_4 + Y_5;$$
$$Y_{23} = Y_{32} = -Y_5;$$
$$\dot{\mathcal{Э}}_{33} = -Y_3\dot{E}_3 - Y_5\dot{E}_5.$$

Все эти величины могут быть получены путем формальных матричных операций и анализа элементов матрицы **D** точно так, как это делалось в § 5.11 и 5.12.

Метод сечений и метод узловых напряжений сводятся к формированию и решению системы, состоящей из $q - 1$ уравнений, и в этом отношении они равноценны. Однако в методе узловых напряжений используется матрица соединений, составление которой во всех случаях является обязательным, если речь идет не о непосредственной записи уравнений при помощи визуального способа составления матриц контуров и сечений. При использовании вычислительных машин процедура составления матриц **C** и **D** должна быть формализована. Одним из таких методов является расчет матрицы **F** через подматрицы $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$. Поэтому в вычислительном отношении метод узловых напряжений более экономичен. Однако методы сечений и контурных токов позволяют выделить те напряжения и токи, которые могут представлять непосредственный интерес, а поэтому данные методы даже в отношении использования вычислительной техники имеют свои области применения.

5.14. Метод смешанных величин

При решении некоторых задач, особенно задач расчета переходных процессов, часть ветвей целесообразно характеризовать сопротивлением, а другую часть — проводимостью, т. е. для части схемы может быть задано $\mathbf{I}_y = \mathbf{Y}_y\mathbf{U}_y$, а для другой части — $\mathbf{U}_z = \mathbf{Z}_z\mathbf{I}_z$. Здесь индексы y и z показывают принадлежность матриц y- или z-ветвям (назовем для краткости ветви, характеризуемые проводимостью, y-ветвями, а ветви, характеризуемые сопротивлением, z-ветвями).

Различный вид записи закона Ома предопределяет и выбор соответствующих искомых величин. Для Y-части схемы (часть схемы или графа схемы, содержащая только y-ветви) целесообразно в качестве искомых величин выбирать напряжения ветвей дерева. Для Z-части схемы (часть схемы или графа схемы, содержащая только z-ветви) целесообразно в качестве искомых величин (искомых переменных, как иногда говорят) выбирать токи в связях. Исходя из этой особенности, следует y-ветви отнести к ветвям дерева и только при невозможно-

сти этого, когда добавление новой y-ветви к предыдущим приводит к образованию контура, отнести эти ветви к связям. Если y-ветви не образуют дерево графа схемы, часть z-ветвей войдет в состав ветвей дерева, поэтому z-ветви могут содержаться также и в ветвях дерева графа схемы.

Вспомним, что **F**-матрица определяет контуры (номера которых совпадают с номерами ветвей, отнесенных к связям) и входящие в эти контуры ветви дерева. При составлении дерева графа сначала только из y-ветвей, а затем уже дополнением дерева до конца связями (если не хватает для этого y-ветвей) структура **F**-матрицы будет следующей:

$$\mathbf{F} = \begin{array}{|c|c|l} \multicolumn{2}{c}{\overset{y\text{-ветви}}{\downarrow}\quad\overset{z\text{-ветви}}{\downarrow}} & \\ \hline \mathbf{F}_{yy} & \mathbf{0} & \leftarrow y\text{-ветви} \\ \hline \mathbf{F}_{zy} & \mathbf{F}_{zz} & \leftarrow z\text{-ветви} \\ \hline \end{array}$$

y-ветви, z-ветви — отнесенные в дерево; y-ветви, z-ветви — отнесенные в связи

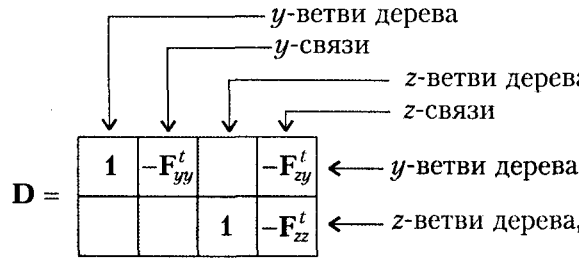
F-матрица разбивается на блоки, у которых первый нижний индекс показывает характер связи, образующей контур, а второй индекс — характер ветви дерева (y или z), входящей в данный контур. В контурах, образованных из y-связей, не могут находиться z-ветви дерева, так как y-ветвь становится связью при условии образования контура только из y-ветвей; поэтому $\mathbf{F}_{yz} = \mathbf{0}$ всегда. Индекс yz, согласно правилам индексации, показывает, что контуры образованы y-связями и z-ветвями дерева.

Столбцы контурной матрицы **C** разделим на четыре группы и пронумеруем столбцы последовательно: для группы y-ветвей дерева, затем для y-связей, после чего для z-ветвей дерева и завершим нумерацию z-связями. Соответственно, строки матрицы **C** определятся сначала y-связями, а затем уже z-связями. При условии такого разбиения **C**-матрицу можно записать так:

$$\mathbf{C} = \begin{array}{|c|c|c|c|l} \multicolumn{4}{c}{\overset{y\text{-ветви дерева}}{\downarrow}\quad\overset{y\text{-связи}}{\downarrow}\quad\overset{z\text{-ветви дерева}}{\downarrow}\quad\overset{z\text{-связи}}{\downarrow}} & \\ \hline \mathbf{F}_{yy} & \mathbf{1} & & & \leftarrow y\text{-связи} \\ \hline \mathbf{F}_{zy} & & \mathbf{F}_{zz} & \mathbf{1} & \leftarrow z\text{-связи} \\ \hline \end{array}$$

$\mathbf{C}_z$

При разделении ветвей на четыре группы матрицу сечений **D** также можно записать в виде



где

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \mathbf{1} & -\mathbf{F}_{yy}^t \\ \hline \end{array} = \mathbf{D}_y$$

Соответственно такому разделению топологических матриц должно быть проведено разделение матриц **Z** и **Y**. Каждая из этих матриц будет состоять из двух диагональных блоков. Согласно приоритету ветвей, в верхней левой части будут расположены ветви, отнесенные к дереву, в нижней правой части — отнесенные к связям. Соответственно, верхним подматрицам параметров ветвей дерева припишем нижний индекс 1, нижним подматрицам параметров связей — нижний индекс 2. Эти матрицы будут иметь вид

$$\mathbf{Y}_y = \begin{array}{|c|c|}\hline \mathbf{Y}_1 & \\ \hline & \mathbf{Y}_2 \\ \hline \end{array}; \qquad \mathbf{Z}_z = \begin{array}{|c|c|}\hline \mathbf{Z}_1 & \\ \hline & \mathbf{Z}_2 \\ \hline \end{array}.$$

Матрицы-столбцы токов, напряжений, источников ЭДС и тока также разделим по этому принципу. Имеем

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{array}{|c|}\hline \tilde{\mathbf{I}}_{1y} \\ \hline \tilde{\mathbf{I}}_{2y} \\ \hline \tilde{\mathbf{I}}_{1z} \\ \hline \tilde{\mathbf{I}}_{2z} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \tilde{\mathbf{I}}_y \\ \hline \tilde{\mathbf{I}}_z \\ \hline \end{array}; \quad \tilde{\mathbf{U}} = \begin{array}{|c|}\hline \tilde{\mathbf{U}}_{1y} \\ \hline \tilde{\mathbf{U}}_{2y} \\ \hline \tilde{\mathbf{U}}_{1z} \\ \hline \tilde{\mathbf{U}}_{2z} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \tilde{\mathbf{U}}_y \\ \hline \tilde{\mathbf{U}}_z \\ \hline \end{array}; \quad \mathbf{E} = \begin{array}{|c|}\hline \mathbf{E}_{1y} \\ \hline \mathbf{E}_{2y} \\ \hline \mathbf{E}_{1z} \\ \hline \mathbf{E}_{2z} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \mathbf{E}_y \\ \hline \mathbf{E}_z \\ \hline \end{array}; \quad \mathfrak{I} = \begin{array}{|c|}\hline \mathfrak{I}_{1y} \\ \hline \mathfrak{I}_{2y} \\ \hline \mathfrak{I}_{1z} \\ \hline \mathfrak{I}_{2z} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \mathfrak{I}_y \\ \hline \mathfrak{I}_z \\ \hline \end{array},$$

где $\mathbf{I}_y = \begin{array}{|c|}\hline \mathbf{I}_{1y} \\ \hline \mathbf{I}_{2y} \\ \hline \end{array}$; $\mathbf{I}_z = \begin{array}{|c|}\hline \mathbf{I}_{1z} \\ \hline \mathbf{I}_{2z} \\ \hline \end{array}$ и т. д.

Применим к части графа схемы, составленной из y-ветвей, метод сечений. Запись уравнений будет аналогична записи системы уравнений для сечений (см. § 5.13) с дополнительным членом, учитывающим токи z-связей, равным $-\mathbf{F}_{zy}^t\tilde{\mathbf{I}}_{2z}$. Имеем

$$\mathbf{D}_y\mathbf{Y}_y\mathbf{D}_y^t\tilde{\mathbf{U}}_{1y} - \mathbf{F}_{zy}^t\tilde{\mathbf{I}}_{2z} = -\mathbf{D}_y(\mathbf{Y}_y\mathbf{E}_y + \mathfrak{I}_y).$$

Точно так же, если применить метод контурных токов к части графа, составленной из z-ветвей, можно записать матричное уравнение, аналогичное полученному в § 5.11 с добавлением напряжений y-ветвей дерева, которые равны $\mathbf{F}_{zy}\tilde{\mathbf{U}}_{1y}$. Имеем

$$\mathbf{C}_z\mathbf{Z}_z\mathbf{C}_z^t\tilde{\mathbf{I}}_{2z}+\mathbf{F}_{zy}\tilde{\mathbf{U}}_{1y}=\mathbf{C}_z(\mathbf{Z}_z\mathfrak{I}_z+\mathbf{E}_z).$$

Эти уравнения можно записать вместе:

$$\begin{Vmatrix}\mathbf{D}_y\mathbf{Y}_y\mathbf{D}_y^t & -\mathbf{F}_{zy}^t\\ \mathbf{F}_{zy} & \mathbf{C}_z\mathbf{Z}_z\mathbf{C}_z^t\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\tilde{\mathbf{U}}_{1y}\\ \tilde{\mathbf{I}}_{2z}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}-\mathbf{D}_y(\mathbf{Y}_y\mathbf{E}_y+\mathfrak{I}_y)\\ \mathbf{C}_z(\mathbf{Z}_z\mathfrak{I}_z+\mathbf{E}_z)\end{Vmatrix}.$$

Эта система матричных уравнений и составляет систему уравнений для смешанных величин.

Нетрудно заметить, что если все ветви схемы отнести или к y-ветвям, или к z-ветвям, то получим, соответственно, уравнение метода сечений или метода контурных токов.

Для графа схемы (рис. 5.15) имеем

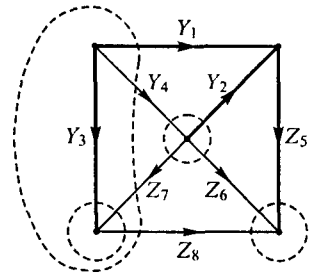


Рис. 5.15

$$\mathbf{C}=\begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ \hline 4 & -1 & 1 & & 1 & & & & \\ 6 & & -1 & & & -1 & 1 & & \\ 7 & 1 & -1 & -1 & & & & 1 & \\ 8 & -1 & & 1 & & -1 & & & 1 \end{array}$$

← y-связь; z-связь

y-дерево, y-связь; z-связь, z-дерево

$$\mathbf{D}=\begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ \hline 1 & 1 & & & 1 & & & -1 & 1\\ 2 & & 1 & & -1 & & 1 & 1 & \\ 3 & & & 1 & & & & 1 & -1\\ 5 & & & & & 1 & 1 & & 1 \end{array}$$

y-дерево; ← z-дерево

$$\mathbf{F}_{yy} = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & \\ \end{array};$$

$$-\mathbf{F}^{t}_{zz} = \begin{array}{c|ccc} & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & & 1 \\ \end{array};$$

$$\mathbf{F}_{zy} = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ 6 & & -1 & \\ 7 & 1 & -1 & -1 \\ 8 & -1 & & 1 \\ \end{array};$$

$$-\mathbf{F}^{t}_{zy} = \begin{array}{c|ccc} & 6 & 7 & 8 \\ 1 & & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \\ 3 & & 1 & -1 \\ \end{array};$$

$$\mathbf{C}_z = \begin{array}{c|cccc} & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & -1 & 1 & & \\ 7 & & & 1 & \\ 8 & -1 & & & 1 \\ \end{array};$$

$$\mathbf{D}_y = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & & & 1 \\ 2 & & 1 & & -1 \\ 3 & & & 1 & \\ \end{array};$$

$$\mathbf{Y}_y = \begin{bmatrix} Y_1 & & & \\ & Y_2 & & \\ & & Y_3 & \\ & & & Y_4 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{Z}_z = \begin{bmatrix} Z_5 & & & \\ & Z_6 & & \\ & & Z_7 & \\ & & & Z_8 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1y} = \begin{bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_3 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{\mathbf{I}}_{2z} = \begin{bmatrix} \tilde{I}_6 \\ \tilde{I}_7 \\ \tilde{I}_8 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{E}_y = \begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ \dot{E}_3 \\ \dot{E}_4 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{E}_z = \begin{bmatrix} \dot{E}_5 \\ \dot{E}_6 \\ \dot{E}_7 \\ \dot{E}_8 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{\mathfrak{I}}_y = \begin{bmatrix} \dot{\mathfrak{I}}_1 \\ \dot{\mathfrak{I}}_2 \\ \dot{\mathfrak{I}}_3 \\ \dot{\mathfrak{I}}_4 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{\mathfrak{I}}_z = \begin{bmatrix} \dot{\mathfrak{I}}_5 \\ \dot{\mathfrak{I}}_6 \\ \dot{\mathfrak{I}}_7 \\ \dot{\mathfrak{I}}_8 \end{bmatrix}.$$

Матрицы параметров $\mathbf{Z}_z$, $\mathbf{Y}_y$ в данном частном случае записаны в форме симметричных диагональных матриц. Это означает, что в цепи отсутствуют индуктивно связанные катушки и зависимые источники. При наличии индуктивно связанных катушек ветви, содержащие эти катушки, должны быть отнесены к z-ветвям, и тогда взаимная индуктивность может быть учтена добавлением недиагональных симметрично расположенных элементов в матрице $\mathbf{Z}_z$ (см. § 5.18). Наличие зависимых источников также может быть учтено в этом случае добавлением членов в **Z**- и **Y**-матрицах.

Допустим, имеется зависимый источник тока в 4-й ветви, управляемый напряжением 2-й ветви: $\dot{J}_{42} = Y_{42}\dot{U}_2$. Ток этого источника тока можно перенести в левую часть равенства и учитывать его добавлением в матрице $\mathbf{Y}_y$ ненулевого элемента Y_{42}. Заметим, что элемент $Y_{24} \neq 0$, и поэтому матрица $\mathbf{Y}_y$ становится несимметричной. Точно так же, если в некоторой ветви (например, 7) имеется управляемый током (например, током ветви 5) источник ЭДС $\dot{E}_{75} = Z_{75}\dot{I}_5$, то его можно учесть в виде дополнительного падения напряжения в контуре *7* от тока I_5 добавлением в матрице $\mathbf{Z}_z$ недиагонального элемента $-Z_{75}$.

Метод смешанных величин дает возможность без эквивалентных преобразований учесть управляемые напряжением источники тока и управляемые током источники ЭДС, если их раздельно расположить, соответственно, в y-подграфе схемы и z-подграфе схемы, т. е. разделение графа производить с учетом и этого обстоятельства. Заметим, что число иеизвестных, а следовательно, и порядок системы уравнений неминимальны. В рассматриваемом случае число неизвестных равно шести, в то время как по методу контурных токов и по методу сечений (и узловых напряжений) оно равно четырем. В этом отношении метод смешанных переменных уступает другим методам.

5.15. Принцип наложения и основанный на нем метод расчета цепи

В выражении для тока $\dot{I}_k$, полученном по методу контурных токов, величины $\dot{E}_{11}, \dot{E}_{22}, \ldots, \dot{E}_{mm}$ представляют собой каждая сумму ЭДС всех источников, входящих в соответствующие контуры. Точно так же в выражении для узлового напряжения $\dot{U}_{k0}$, полученном по методу узловых напряжений, величины $\dot{J}_1, \dot{J}_2, \ldots, \dot{J}_{q-1}$ представляют собой каждая сумму токов всех источников токов, подключенных к соответствующим узлам. Выписав эти суммы явно и сгруппировав в выражениях для $\dot{I}_k$ и $\dot{U}_{k0}$ члены, содержащие ЭДС или токи отдельных источников, получим выражения для $\dot{I}_k$ и $\dot{U}_{k0}$ в виде слагаемых, каждое из которых будет иметь множителем ЭДС или ток того или иного источника. Из этого следует, что контурный ток в любом контуре равен сумме токов, вызываемых в этом контуре каждой из ЭДС в отдельности, и, соответственно, узловое напряжение между любым узлом и опорным равно сумме узловых напряжений, созданных между этим узлом и опорным каждым в отдельности источником тока (или источником ЭДС ветви, приключенной к данному узлу). Это весьма важное положение о независимости действия источников ЭДС или тока, известное под наименованием п р и н ц и п а н а л о ж е н и я, вытекает из линейности уравнений, получаемых на основании законов Кирхгофа для линейных цепей, т. е. цепей с параметрами, не зависящими от токов и напряжений.

Принцип наложения справедлив не только для любого контурного тока, но и для тока в любой ветви, так как всегда можно выбрать совокупность контуров так, что интересующая нас ветвь войдет только в один контур. Это непосредственно вытекает также из линейности системы уравнений, записанных в отношении истинных токов в ветвях по законам Кирхгофа.

Следует иметь в виду, что принцип наложения не применим для квадратичных форм, каковыми являются выражения для мощностей.

Принцип наложения позволяет расчленить сложную задачу на ряд более простых, в каждой из которых в рассматриваемой сложной цепи действует только одна ЭДС или один источник тока, а все остальные источники энергии предполагаются отсутствующими. При этом все другие источники ЭДС должны быть замкнуты накоротко с сохранением в ветвях их внутренних сопротивлений, а все другие источники тока должны быть разомкнуты, но в соответствующих ветвях должны быть сохранены их внутренние проводимости.

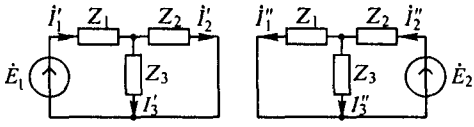


Рис. 5.16

Применяя, например, принцип наложения для решения задачи расчета цепи, изображенной на рис. 5.11, получаем две более простые задачи (рис. 5.16), токи в которых находятся просто:

$$\dot{I}_1' = \frac{\dot{E}_1}{Z_1 + \dfrac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}} = \frac{\dot{E}_1 (Z_2 + Z_3)}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} = \frac{\dot{E}_1 (Z_2 + Z_3)}{D};$$

$$\dot{I}_2' = \dot{I}_1' \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{\dot{E}_1 Z_3}{D}; \quad \dot{I}_3' = \dot{I}_1' \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} = \frac{\dot{E}_1 Z_2}{D};$$

$$\dot{I}_2'' = \frac{\dot{E}_2}{Z_2 + \dfrac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3}} = \frac{\dot{E}_2 (Z_1 + Z_3)}{D};$$

$$\dot{I}_1'' = \dot{I}_2'' \frac{Z_3}{Z_1 + Z_3} = \frac{\dot{E}_2 Z_3}{D}; \quad \dot{I}_3'' = \dot{I}_2'' \frac{Z_2}{Z_1 + Z_3} = \frac{\dot{E}_2 Z_1}{D}.$$

Следовательно, действительные токи в ветвях при действии обоих источников ЭДС с учетом направления стрелок на рис. 5.16 равны:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_1' - \dot{I}_1'' = \frac{\dot{E}_1 (Z_2 + Z_3) - \dot{E}_2 Z_3}{D};$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_2'' - \dot{I}_2' = \frac{\dot{E}_2 (Z_1 + Z_3) - \dot{E}_1 Z_3}{D};$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_3' + \dot{I}_3'' = \frac{\dot{E}_1 Z_2 + \dot{E}_2 Z_1}{D}.$$

Задача расчета цепи, изображенной на рис. 5.12, с помощью принципа наложения соответственно может быть расчленена на три более простые задачи расчета той же цепи при действии одной ЭДС $\dot{E}_2$, $\dot{E}_3$ или $\dot{E}_4$.

5.16. Принцип взаимности и основанный на нем метод расчета цепи

Для линейных цепей справедлив важный принцип взаимности, установленный Максвеллом, который гласит: если ЭДС $\dot{E}_{ab} = \dot{E}$, действуя в ветви ab сколь угодно сложной цепи, при отсутствии в цепи прочих ЭДС вызывает в другой ветви cd этой цепи ток $\dot{I}_{cd} = \dot{I}$, то такая же ЭДС $\dot{E}_{cd} = \dot{E}$, действуя в ветви cd, при отсутствии прочих ЭДС вызовет в ветви ab такой же ток $\dot{I}_{ab} = \dot{I}$.

Это положение вытекает из выражения для тока $\dot{I}_k$ по методу контурных токов. Выберем независимые контуры так, чтобы ветвь ab входила только в контур k, а ветвь cd — только в контур m, что по отношению к двум ветвям, как уже отмечалось ранее, всегда можно сделать. Тогда из равенств

$$\dot{I}_{ab} = \dot{I}_k = \dot{E}\frac{\Delta_{km}}{\Delta} \quad \text{и} \quad \dot{I}_{cd} = \dot{I}_m = \dot{E}\frac{\Delta_{mk}}{\Delta}$$

следует, что $\dot{I}_{ab} = \dot{I}_{cd} = \dot{I}$, так как $\Delta_{mk} = \Delta_{km}$. При этом отношение $\dot{E}_{ab}/\dot{I}_{cd} = \dot{E}/\dot{I}$ есть взаимное сопротивление Z_{km} от k-го контура к m-му контуру, а отношение $\dot{E}_{cd}/\dot{I}_{ab} = \dot{E}/\dot{I}$ есть взаимное сопротивление Z_{mk} от m-го контура к k-му контуру. Таким образом, сформулированный указанным образом принцип взаимности приводит к равенству этих взаимных сопротивлений: $Z_{km} = Z_{mk}$. Обратим внимание, что здесь, переставляя ЭДС $\dot{E}$ из одной ветви в другую, мы одинаково согласовывали положительные направления ЭДС и токов в каждой из этих ветвей, а именно: мы приняли $\dot{E} = \dot{E}_{ab}$ и $\dot{I} = \dot{I}_{ab}$, а также $\dot{E} = \dot{E}_{cd}$ и $\dot{I} = \dot{I}_{cd}$.

Если бы при перестановке ЭДС $\dot{E}$ из ветви ab в ветвь cd мы изменили ее положительное направление, т. е. приняли $\dot{E} = \dot{E}_{ab}$ и $\dot{E} = \dot{E}_{dc} = -\dot{E}_{cd}$, а положительные направления токов оставили прежними, т. е. приняли по-прежнему $\dot{I} = \dot{I}_{ab}$ и $\dot{I} = \dot{I}_{cd}$, то, очевидно, получили бы

$$Z_{km} = \frac{\dot{E}_{ab}}{\dot{I}_{cd}} = \frac{\dot{E}}{\dot{I}} \quad \text{и} \quad Z_{mk} = \frac{\dot{E}_{cd}}{\dot{I}_{ab}} = -\frac{\dot{E}_{dc}}{\dot{I}_{ab}} = -\frac{\dot{E}}{\dot{I}},$$

т. е. получили бы соотношение $Z_{km} = -Z_{mk}$, на что было уже указано в § 5.11.

В дальнейшем, пользуясь принципом взаимности, будем предполагать, что положительные направления ЭДС и токов во всех ветвях приняты согласованными одинаково, т. е. будем при этом иметь $Z_{km} = Z_{mk}$.

Принцип взаимности в сочетании с принципом наложения дает возможность существенно снизить трудоемкость расчета сложной цепи, в которой действует одновременно несколько ЭДС, особенно в случае, когда требуется определить ток в одной ветви этой цепи.

Пусть сложная цепь, состоящая из p ветвей, содержит s источников ЭДС $\dot{E}_1$, $\dot{E}_2$, ..., $\dot{E}_s$ в s первых по порядку номеров ветвях. Предположим, что в цепи действует только одна ЭДС $\dot{E}_k$ в k-й ветви ($1 \le k \le s$), а остальные источники ЭДС

закорочены с сохранением в ветвях их внутренних сопротивлений. Назовем эту сравнительно простую задачу основной. Вычислим в этой задаче токи во всех p ветвях: $\dot{I}_1^{(k)}, \dot{I}_2^{(k)}, \dot{I}_3^{(k)}, \ldots, \dot{I}_m^{(k)}, \ldots, \dot{I}_p^{(k)}$. Здесь верхний индекс в скобках показывает, под действием какой ЭДС возникает ток, а нижний — в какой ветви рассматривается ток.

Если единственный источник с ЭДС $\dot{E}_k$ переставить в m-ю ветвь, то, согласно *принципу взаимности*, в k-й ветви пойдет такой же ток, как в m-й ветви в основной задаче, т. е. при этом ток в k-й ветви будет равен току $\dot{I}_m^{(k)}$, вычисленному в основной задаче.

В действительности в m-й ветви действует источник ЭДС $\dot{E}_m$. Очевидно, ток в k-й ветви, возникающий под действием единственного источника ЭДС $\dot{E}_m$, включенного в m-ю ветвь, равен

$$\dot{I}_k^{(m)} = \dot{I}_m^{(k)} \frac{\dot{E}_m}{\dot{E}_k}.$$

Переставляя последовательно единственный источник ЭДС $\dot{E}_k$ во все ветви, в которых в исследуемой реальной цепи действуют источники ЭДС, т. е. изменяя индекс m от единицы до s, включая и значение $m = k$, и осуществляя пропорциональный пересчет значений токов от ЭДС $\dot{E}_k$ к действительным значениям ЭДС $\dot{E}_m$, вычислим таким методом токи в k-й ветви, возникающие в ней при действии всех действительных ЭДС поодиночке.

Согласно принципу наложения, ток $\dot{I}_k$ в k-й ветви, возникающий при действии всех заданных ЭДС одновременно, равен

$$\dot{I}_k = \sum_{m=1}^{s} \dot{I}_k^{(m)} = \sum_{m=1}^{s} \dot{I}_m^{(k)} \frac{\dot{E}_m}{\dot{E}_k}.$$

Таким образом, достаточно решить только сравнительно простую основную задачу, т. е. рассчитать токи $\dot{I}_m^{(k)}$ во всех ветвях, когда действует только одна ЭДС $\dot{E}_k$ в той ветви (k-й), в которой хотим найти ток $\dot{I}_k$, после чего искомый ток $\dot{I}_k$ вычисляется по последней формуле. Эта формула непосредственно пригодна для вычисления тока в ветви, содержащей источник ЭДС ($1 \le k \le s$), т. е. если $\dot{E}_k \ne 0$.

Для вычисления же тока в ветви, в которой нет источника ЭДС ($s < k \le p$), можно воспользоваться этой же формулой, если предположить, что в эту ветвь включен фиктивный источник ЭДС $\dot{E}_{k\,\text{фикт}} \ne 0$; тогда

$$\dot{I}_k = \sum_{m=1}^{s} \dot{I}_m^{(k\,\text{фикт})} \frac{\dot{E}_m}{\dot{E}_{k\,\text{фикт}}} \quad (k > s).$$

Поскольку суммирование идет только до $m = s$, $k > s$, то ток в k-й ветви от действия фиктивного источника, когда он включен в эту же k-ю ветвь, не учитывается.

5.17. Метод эквивалентного генератора

Задача отыскания тока в одной выделенной ветви, рассмотренная в предыдущем параграфе, может быть решена также с помощью метода эквивалентного генератора, или, как иногда говорят, с помощью теоремы об эквивалентном генераторе. Сущность этого метода заключается в том, что *по отношению к выделенной ветви ab с сопротивлением Z_{ab} вся остальная часть сложной цепи, содержащая источники ЭДС, может быть заменена одним эквивалентным генератором с ЭДС $\dot{E}_г$ и внутренним сопротивлением $Z_г$.*

Пусть ветвь с сопротивлением Z_{ab} входит в контур *1* и является связью в методе контурных токов. Собственное сопротивление этого контура запишем в виде $Z_{11} = Z_{ab} + Z_{11}^0$, имея в виду, что Z_{11}^0 есть собственное сопротивление контура, когда $Z_{ab} = 0$. Поскольку выделенная ветвь является связью, то Z_{ab} не войдет ни в какие другие элементы матрицы контурных сопротивлений. Согласно методу контурных токов, имеем

$$\dot{I}_{ab} = \dot{I}_1 = \sum_{k=1}^{n} \dot{E}_{kk} \frac{\Delta_{1k}}{\Delta} \quad \text{или} \quad \dot{I}_{ab}\Delta = \sum_{k=1}^{n} \dot{E}_{kk}\Delta_{1k}.$$

Разложим Δ по элементам первой строки. Тогда

$$\Delta = Z_{11}\Delta_{11} + Z_{12}\Delta_{12} + \ldots + Z_{1n}\Delta_{1n} = (Z_{ab} + Z_{11}^0)\Delta_{11} + Z_{12}\Delta_{12} + \ldots +$$
$$+ Z_{1n}\Delta_{1n} = Z_{ab}\Delta_{11} + Z_{11}^0\Delta_{11} + Z_{12}\Delta_{12} + \ldots + Z_{1n}\Delta_{1n} = Z_{ab}\Delta_{11} + \Delta^0.$$

Здесь Δ^0 — определитель матрицы контурных сопротивлений при условии, что $Z_{ab} = 0$. Учитывая это, предыдущее равенство можно записать в виде

$$Z_{ab}\dot{I}_{ab} + \frac{\Delta^0}{\Delta_{11}}\dot{I}_{ab} = \sum \frac{\Delta_{1k}}{\Delta_{11}}\dot{E}_{kk} = \dot{E}_0$$

или

$$(Z_{ab} + Z_г)\dot{I}_{ab} = \dot{E}_0.$$

Последнему равенству соответствует схема, изображенная на рис. 5.17. Эта схема и свидетельствует о возможности замены активного двухполюсника *A* эквивалентным генератором с ЭДС $\dot{E}_г = \dot{E}_0 = \dot{U}_0$ и сопротивлением $Z_г$. Следовательно, искомый ток в ветви *ab*

$$\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{U}_0}{Z_г + Z_{ab}},$$

что представляет математическую формулировку теоремы Тевенена.

Выше, по существу, был изложен метод замены сложной активной цепи по отношению к выделенной паре зажимов двухполюсником, содержащим неидеальный источник энергии. В данном случае такой источник был представлен источником ЭДС $\dot{E}_0$ с внутренним ненулевым сопротивлением $Z_г$. Заменим источник ЭДС источником тока $\dot{J}_0 = \dot{E}_0/Z_г = \dot{E}_0 Y_г$ и параллельно присоединенной к источнику тока проводимостью $Y_г = 1/Z_г$. Тогда напряжение $\dot{U}_{ab}$ на зажимах выделенной ветви *ab* может быть определено при помощи выражения

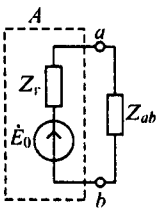


Рис. 5.17

$$\dot{U}_{ab} = \frac{\dot{\mathcal{Э}}_0}{Y_г + Y_{ab}},$$

что представляет математическую формулировку теоремы Нортона. Нетрудно заметить, что ток $\dot{\mathcal{Э}}_0 = \dot{E}_0 Y_г$ равен току в ветви ab при $Z_{ab} = 0$.

Таким образом, для определения тока $\dot{I}_{ab}$ в интересующей нас ветви необходимо экспериментально или расчетным путем найти напряжение $\dot{U}_0$ при разрыве ветви ab и сопротивление $Z_г$ всей прочей части цепи при замкнутых накоротко содержащихся в ней источниках ЭДС.

В реальных электрических цепях величина $Z_г$ может быть определена также и экспериментально. Обозначим ток в ветви ab при $Z_{ab} = 0$, т. е. при замыкании этой ветви накоротко, через $\dot{I}_k$. Тогда из выражения для $\dot{I}_{ab}$ получим $Z_г = \dot{U}_0 / \dot{I}_k$, т. е. $Z_г$ можно определить экспериментально как отношение напряжения $\dot{U}_0$ на зажимах ab цепи при холостом ходе к току $\dot{I}_k$ при ее коротком замыкании.

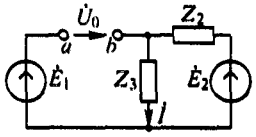


Рис. 5.18

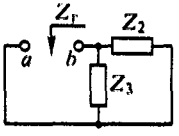


Рис. 5.19

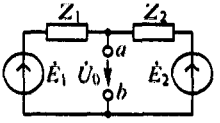


Рис. 5.20

Применим теорему об эквивалентном генераторе для определения токов в цепи, изображенной на рис. 5.11. Для определения тока $\dot{I}_1$ разомкнем первую ветвь и найдем напряжение на ее зажимах (рис. 5.18), причем положительное направление примем совпадающим с принятым на рисунке положительным направлением искомого тока $\dot{I}_1$. Имеем

$$\dot{U}_0 + \dot{I}Z_3 = \dot{E}_1;$$

$$\dot{U}_0 = \dot{E}_1 - \dot{I}Z_3 = \dot{E}_1 - \frac{\dot{E}_2}{Z_2 + Z_3} Z_3 = \frac{\dot{E}_1(Z_2 + Z_3) - \dot{E}_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}.$$

Сопротивление $Z_г$ найдем как сопротивление всей прочей цепи между зажимами ab при замкнутых накоротко источниках ЭДС (рис. 5.19):

$$Z_г = \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}.$$

Следовательно, искомый ток

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_0}{Z_г + Z_1} = \frac{\dot{E}_1(Z_2 + Z_3) - \dot{E}_2 Z_3}{D}.$$

Для определения этим методом тока $\dot{I}_3$ разомкнем третью ветвь (рис. 5.20). Напряжение на ее зажимах при этом имеет значение

$$\dot{U}_0 = \dot{E}_1 - \dot{I}Z_1 = \dot{E}_1 - \frac{\dot{E}_1 - \dot{E}_2}{Z_1 + Z_2} Z_1 = \frac{\dot{E}_1 Z_2 + \dot{E}_2 Z_1}{Z_1 + Z_2}.$$

Величина $Z_г$ в этом случае равна

$$Z_г = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Следовательно,

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_0}{Z_г + Z_3} = \frac{\dot{E}_1 Z_2 + \dot{E}_2 Z_1}{D}.$$

В качестве еще одного примера применения теоремы об эквивалентном генераторе рассмотрим задачу об определении тока $\dot{I}_0$ в ветви ab измерительного прибора неуравновешенной мостовой схемы (рис. 5.21) в случае, когда можно пренебречь внутренним сопротивлением источника ЭДС, питающего мост. Предположив, что ветвь ab разомкнута (рис. 5.22), найдем напряжение $\dot{U}_0$ на ее зажимах:

$$\dot{U}_0 = \dot{U}_{cb} - \dot{U}_{ca} = \dot{E}\left(\frac{Z_3}{Z_3 + Z_4} - \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}\right).$$

Для сопротивления $Z_г$ цепи между точками a и b при разомкнутой ветви измерительного прибора и при замыкании накоротко точек c и d (рис. 5.23) будем иметь выражение

$$Z_г = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} + \frac{Z_3 Z_4}{Z_3 + Z_4}.$$

Следовательно, искомый ток

$$\dot{I}_0 = \dot{E}\left(\frac{Z_3}{Z_3 + Z_4} - \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}\right) \Big/ \left(Z_{ab} + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} + \frac{Z_3 Z_4}{Z_3 + Z_4}\right),$$

где Z_{ab} — сопротивление измерительного прибора.

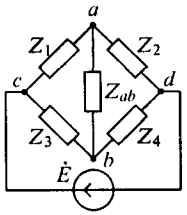


Рис. 5.21

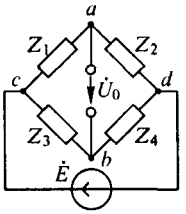


Рис. 5.22

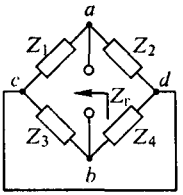


Рис. 5.23

В заключение рассмотрим еще один пример использования теоремы об эквивалентном генераторе, а именно задачу подбора параметров в данной ветви, подключенной к сложной цепи с целью получения максимальной активной мощности. Применив теорему об эквивалентном генераторе, можно определить ток в приемнике:

$$\dot{I}_{пр} = \frac{\dot{U}_0}{Z_г + Z_{пр}} = \frac{\dot{U}_0}{(r_г + r_{пр}) + j(x_г + x_{пр})}.$$

Активная мощность

$$P = I_{\text{пр}}^2 r_{\text{пр}} = \frac{U_0^2 r_{\text{пр}}}{(r_{\text{г}} + r_{\text{пр}})^2 + (x_{\text{г}} + x_{\text{пр}})^2}.$$

Из выражения для P при $r_{\text{пр}} \neq 0$ следует, что максимум мощности можно обеспечить при уменьшении знаменателя, добиваясь равенства $x_{\text{пр}} + x_{\text{г}} = 0$ ($x_{\text{пр}}$ и $x_{\text{г}}$ могут быть разного характера — индуктивного или емкостного). При этом

$$P = \frac{U_0^2 r_{\text{пр}}}{(r_{\text{г}} + r_{\text{пр}})^2}.$$

Учитывая, что $r_{\text{г}}$ — величина заданная, можно найти $P_{\max}$, изменяя $r_{\text{пр}}$. Условием обеспечения абсолютного максимума будет равенство $r_{\text{г}} = r_{\text{пр}}$. При этом

$$P_{\max} = \frac{U_0^2}{4r_{\text{г}}} \quad \text{и} \quad \eta = \frac{P_2}{P_0} \cdot 100 = \frac{I_{\text{пр}}^2 r_{\text{пр}} \cdot 100}{I_{\text{пр}}^2 (r_{\text{г}} + r_{\text{пр}})} = \frac{r_{\text{пр}} \cdot 100}{r_{\text{г}} + r_{\text{пр}}} = 50\%,$$

где η — коэффициент полезного действия рассматриваемого устройства. Режим максимальной мощности представляет интерес в маломощных передаточных устройствах, применяемых в электроизмерительной технике, в радиотехнике, радиоэлектронике и автоматике. В этих случаях получение как можно большей мощности нередко является более важным, чем достижение большого значения коэффициента полезного действия.

5.18. Расчет цепей при наличии взаимной индукции

Правило составления дифференциальных уравнений цепи при наличии взаимной индукции, рассмотренное в § 3.7, положим в основу для расчета цепей с взаимной индукцией при протекании синусоидальных токов. Применив комплексный метод, алгебраизируем эти уравнения.

Напомним правило, определяющее знак ЭДС взаимной индукции или падения напряжения, компенсирующего эту ЭДС. Точки, поставленные на одном из зажимов каждой катушки, означают следующее: если положительное направление тока в первой катушке принято от точки, то положительное направление ЭДС взаимной индукции, возникающей в другой катушке, также должно быть принято то точки. Будем считать, что для данной системы точек, отмеченных на зажимах всех индуктивносвязанных катушек, известны коэффициенты взаимной индукции по величине и знаку.

Для расчета цепей, содержащих индуктивно-связанные ветви, непосредственно применимы все изложенные ранее методы, за исключением метода узловых напряжений и формул преобразования соединения треугольника в эквивалентное соединение звездой и обратно. Применение этих последних требует введения некоторых дополнительных правил.

Рассчитаем цепь, изображенную на рис. 5.24. Катушки L_1 и L_2 индуктивно связаны, причем для данной системы точек задан коэффициент взаимной индукции $M_{12} = M_{21} = M$.

Составим уравнение по второму закону Кирхгофа для контура, обход которого производим по часовой стрелке. Пусть положительные направления тока и обхода контура совпадают. В контур входят пять ЭДС: ЭДС $\dot{E}$ внешнего источника, ЭДС самоиндукции $\dot{E}_{1L} = -j\omega L_1\dot{I}$ и $\dot{E}_{2L} = -j\omega L_2\dot{I}$ и ЭДС взаимной индукции $\dot{E}_{1M} = -j\omega M\dot{I}$ и $\dot{E}_{2M} = -j\omega M\dot{I}$. Положительные направления ЭДС самоиндукции $\dot{E}_{1L}$ и $\dot{E}_{2L}$ совпадают с положительным направлением тока в цепи.

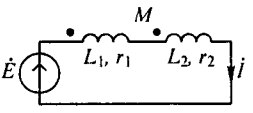


Рис. 5.24

Так как положительное направление тока в обеих катушках взято от точки, то в обеих катушках положительное направление ЭДС взаимной индукции $\dot{E}_{1M}$ и $\dot{E}_{2M}$ также будет от точек. Поэтому все ЭДС войдут в уравнение с одинаковым положительным знаком:

$$\dot{E} + \dot{E}_{1L} + \dot{E}_{2L} + \dot{E}_{1M} + \dot{E}_{2M} = \dot{I}(r_1 + r_2).$$

Вспомним, что все сказанное можно относить к падениям напряжения, для которых имеем $\dot{U}_L = -\dot{E}_L$ и $\dot{U}_M = -\dot{E}_M$, и, следовательно,

$$\dot{E} = \dot{U}_{1L} + \dot{U}_{1M} + \dot{U}_{2L} + \dot{U}_{2M} + \dot{I}(r_1 + r_2)$$

или

$$\dot{E} = j\omega L_1\dot{I} + j\omega M\dot{I} + j\omega L_2\dot{I} + j\omega M\dot{I} + \dot{I}(r_1 + r_2),$$

откуда

$$\dot{E} = \dot{I}(r_1 + r_2) + \dot{I}j\omega(L_1 + L_2 + 2M) = \dot{I}(r_э + j\omega L_э) = \dot{I}Z_э.$$

Величина $L_э = L_1 + L_2 + 2M$ представляет собой эквивалентную индуктивность всей цепи.

Эквивалентная индуктивность всегда положительна, что вытекает из равенства $W_м = \frac{1}{2} L_э i^2 > 0$, так как энергия магнитного поля всей цепи всегда положительна.

Эквивалентная индуктивность зависит от знака взаимной индуктивности. В зависимости от знака M различают два способа включения катушек: согласное включение, когда $M > 0$ ($M = |M|$), и встречное включение, когда $M < 0$ ($M = -|M|$). При согласном включении магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции совпадают по направлению, что приводит к увеличению эквивалентной индуктивности всей цепи: $L'_э = L_1 + L_2 + 2|M|$. При встречном включении магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции направлены встречно, что приводит к уменьшению эквивалентной индуктивности всей цепи: $L''_э = L_1 + L_2 - 2|M|$.

Определив измерением эквивалентные индуктивности $L'_э$ и $L''_э$ при согласном и встречном включениях катушек, можно вычислить абсолютное значение их взаимной индуктивности из соотношения

$$L'_э - L''_э = 4|M| \quad \text{или} \quad |M| = \frac{L'_э - L''_э}{4}.$$

Переход от согласного включения к встречному при этом следует выполнить пересоединением концов обмотки одной из катушек, не изменяя взаимного рас-

положения катушек. Знак коэффициента взаимной индукции положителен, когда эквивалентная индуктивность имеет большее значение.

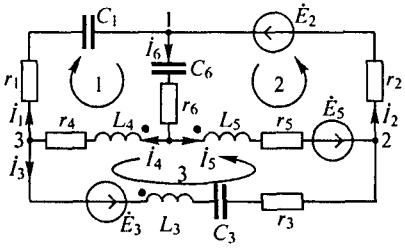


Рис. 5.25

В качестве примера расчета более сложной цепи рассмотрим составление уравнений по законам Кирхгофа и по методу контурных токов для цепи, изображенной на рис. 5.25, при наличии взаимной индукции между индуктивными катушками L_3, L_4 и L_5.

Положительные направления токов в ветвях показаны стрелками. Согласно сказанному в § 3.7, в индуктивно-связанных катушках положительные направления токов принимаются от зажима катушки, обозначенного точкой.

По законам Кирхгофа имеем:

для узлов

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_6 + \dot{I}_2 = 0; \quad -\dot{I}_2 + \dot{I}_3 + \dot{I}_5 = 0; \quad \dot{I}_4 - \dot{I}_1 - \dot{I}_3 = 0;$$

для контуров

$$0 = \left(r_1 + \frac{1}{j\omega C_1}\right)\dot{I}_1 + \left(r_6 + \frac{1}{j\omega C_6}\right)\dot{I}_6 + (r_4 + j\omega L_4)\dot{I}_4 + j\omega M_{45}\dot{I}_5 + j\omega M_{43}\dot{I}_3;$$

$$\dot{E}_2 + \dot{E}_5 = r_2\dot{I}_2 + \left(r_6 + \frac{1}{j\omega C_6}\right)\dot{I}_6 + (r_5 + j\omega L_5)\dot{I}_5 + j\omega M_{54}\dot{I}_4 + j\omega M_{53}\dot{I}_3;$$

$$-\dot{E}_5 + \dot{E}_3 = (r_4 + j\omega L_4)\dot{I}_4 + j\omega M_{45}\dot{I}_5 + j\omega M_{43}\dot{I}_3 + \left(r_3 + j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_3}\right)\dot{I}_3 +$$

$$+ j\omega M_{34}\dot{I}_4 + j\omega M_{35}\dot{I}_5 - (r_5 + j\omega L_5)\dot{I}_5 - j\omega M_{54}\dot{I}_4 - j\omega M_{53}\dot{I}_3.$$

Величины $M_{34} = M_{43}$, $M_{53} = M_{35}$ и $M_{45} = M_{54}$ заданы с их знаками для системы точек, которые указаны на катушках L_3, L_4 и L_5. В индуктивных катушках L_3, L_4 и L_5, где имеет место явление взаимной индукции, все токи направлены от точек, поэтому направления ЭДС самоиндукции и взаимной индукции совпадают, а следовательно, совпадают и направления соответствующих этим ЭДС падений напряжений. Поэтому знаки в членах $j\omega L_5\dot{I}_5$, $j\omega M_{53}\dot{I}_3$ и $j\omega M_{54}\dot{I}_4$ в последнем уравнении одинаковы.

По методу контурных токов в общем виде уравнения записываются в обычной форме, как и при отсутствии взаимной индукции:

$$Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 + Z_{13}\dot{I}_3 = \dot{E}_{11};$$
$$Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 + Z_{23}\dot{I}_3 = \dot{E}_{22};$$
$$Z_{31}\dot{I}_1 + Z_{32}\dot{I}_2 + Z_{33}\dot{I}_3 = \dot{E}_{33},$$

но в выражения для собственных и общих сопротивлений контуров войдут добавочные члены, учитывающие явление взаимной индукции. В данном частном случае контурные токи $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$ являются и токами в ветвях *1*, *2* и *3*.

Зададимся положительными направлениями контурных токов $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$, как показано на рис. 5.25 стрелками внутри контуров. Для рассматриваемой цепи имеем выражения собственных сопротивлений контуров:

$$Z_{11} = r_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + r_6 + \frac{1}{j\omega C_6} + r_4 + j\omega L_4;$$

$$Z_{22} = r_2 + r_5 + j\omega L_5 + r_6 + \frac{1}{j\omega C_6};$$

$$Z_{33} = r_3 + j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_3} + r_4 + j\omega L_4 + r_5 + j\omega L_5 - 2j\omega M_{45} - 2j\omega M_{53} + 2j\omega M_{43}.$$

В выражение Z_{33} два раза входит член $-j\omega M_{45}$, так как контурный ток $\dot{I}_3$, проходя по катушке L_4 от точки, индуцирует ЭДС взаимной индукции в катушке L_5, также направленную от точки и, следовательно, против направления обхода контура *3*. Тот же ток $\dot{I}_3$, проходя по катушке L_5 к точке, индуцирует ЭДС взаимной индукции в катушке L_4, направленную к точке катушки L_4, а следовательно, опять против направления обхода контура. По этой причине напряжения $j\omega L_4\dot{I}_3$ и $j\omega L_5\dot{I}_3$, уравновешивающие ЭДС самоиндукции, противоположны по знаку напряжению $-2j\omega M_{45}\dot{I}_3$, уравновешивающему ЭДС взаимной индукции, что учитывается знаками членов $j\omega L_4$, $j\omega L_5$ и $-2j\omega M_{45}$ в выражении для Z_{33}.

Точно так же рассуждая, найдем, что ЭДС самоиндукции и взаимной индукции от тока $\dot{I}_3$ в катушках L_5 и L_3 противоположны по направлению, и поэтому член $2j\omega M_{53}$ имеет знак «минус»; ЭДС самоиндукции и взаимной индукции от тока $\dot{I}_3$ в катушках L_3 и L_4 совпадают по направлению, и поэтому член $2j\omega M_{43}$ имеет знак «плюс».

Общие сопротивления контуров выражаются следующим образом:

$$Z_{12} = Z_{21} = r_6 + \frac{1}{j\omega C_6} + j\omega M_{45};$$

$$Z_{23} = Z_{32} = -r_5 - j\omega L_5 + j\omega M_{45} + j\omega M_{35};$$

$$Z_{31} = Z_{13} = r_4 + j\omega L_4 - j\omega M_{45} + j\omega M_{43}.$$

Член $j\omega M_{45}$ входит в выражение Z_{12} со знаком «плюс», так как ЭДС взаимной индукции в катушке L_4 от тока $\dot{I}_2$, направленного от точки на катушке L_5, направлена от точки на катушке L_4, а следовательно, и согласно с направлением обхода контура *1*. По этой же причине ставим знак «плюс» перед членами $j\omega M_{45}$ и $j\omega M_{35}$ в выражении Z_{23}. В выражении Z_{31} член $j\omega M_{43}$ также имеет знак «плюс», но член $j\omega M_{45}$ — знак «минус», так как ток $\dot{I}_3$ в катушке L_5 направлен к точке, а следовательно, к точке на катушке L_4, т. е. против направления обхода контура *1*, направлена и ЭДС взаимной индукции.

Для ЭДС $\dot{E}_{11}$, $\dot{E}_{22}$ и $\dot{E}_{33}$ в контурах получаем

$$\dot{E}_{11} = 0; \quad \dot{E}_{22} = \dot{E}_2 + \dot{E}_5; \quad \dot{E}_{33} = \dot{E}_3 - \dot{E}_5.$$

Приведенная выше методика расчета цепей при наличии взаимной индуктивности показывает, что ЭДС взаимной индукции можно учесть в виде дополни-

тельного падения напряжения в k-й ветви от тока в m-й ветви. Падения напряжения в ветвях связываются с токами законом Ома в матричной форме: $\mathbf{U} = \mathbf{ZI}$. При отсутствии ЭДС взаимной индукции матрица $\mathbf{Z}$ диагональна, и поэтому имеем $\dot{U}_k = Z_k \dot{I}_k$ и $\dot{U}_m = Z_m \dot{I}_m$. При наличии ЭДС взаимной индукции мы должны учесть дополнительные падения напряжения в k-й ветви в виде

$$j\omega M_{km} \dot{I}_m = Z_{km} \dot{I}_m$$

и в m-й ветви в виде

$$j\omega M_{mk} \dot{I}_k = Z_{mk} \dot{I}_k.$$

При этом

$$\dot{U}_k = Z_k \dot{I}_k + Z_{km} \dot{I}_m \text{ и } \dot{U}_m = Z_m \dot{I}_m + Z_{mk} \dot{I}_k.$$

Дополнительные члены написаны со знаком «плюс», так как токи $\dot{I}_k$ и $\dot{I}_m$ в ветвях k и m направлены от точек. Эти дополнительные члены можно учесть в матрице $\mathbf{Z}$, если элементы на пересечении k-й строки с m-м столбцом и m-й строки с k-м столбцом принять равными $Z_{km} = j\omega M_{km}$ и $Z_{mk} = j\omega M_{mk}$.

Матрица $\mathbf{Z}$ при наличии взаимной индукции между ветвями k и m будет иметь вид

$$\mathbf{Z} = \begin{array}{c} \\ \\ k \\ \\ m \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & & & k & & m & & \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccccccc} Z_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & Z_k & \cdots & Z_{km} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & Z_{mk} & \cdots & Z_m & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & Z_n \end{array} \right\| \end{array}$$

Наличие индуктивных связей, следовательно, приводит к тому, что матрица $\mathbf{Z}$ перестает быть диагональной. Однако она остается симметричной, так как $M_{km} = M_{mk}$ и поэтому $Z_{km} = j\omega M_{km} = j\omega M_{mk} = Z_{mk}$. Индуктивные связи никак не отражаются в графе схемы, поэтому матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ составляются обычным образом.

Если произвести матричную операцию обращения матрицы сопротивлений $\mathbf{Z}$, можно получить матрицу проводимостей $\mathbf{Y}$, где также учитываются индуктивные связи. По этой причине все методы расчета, а именно метод контурных токов, метод узловых напряжений и метод сечений в матричной форме, могут быть в равной мере применены для расчета цепей с взаимной индукцией.

Для цепи (см. рис. 5.25) матрицы $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}$ при наличии взаимной индукции между ветвями *3* и *4*, *5* и *3*, *5* и *4* и при условии направления токов в ветвях *3*, *4* и *5* от точек будут иметь вид

$$\mathbf{Z} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & Z_1 & & & & & \\ 2 & & Z_2 & & & & \\ 3 & & & Z_3 & Z_{34} & Z_{35} & \\ 4 & & & Z_{43} & Z_4 & Z_{45} & \\ 5 & & & Z_{53} & Z_{54} & Z_5 & \\ 6 & & & & & & Z_6 \end{array};$$

$$Z_{34} = Z_{43} = j\omega M_{34};$$

$$Z_{35} = Z_{53} = j\omega M_{35};$$

$$Z_{45} = Z_{54} = j\omega M_{45}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & Y_1 & & & & & \\ 2 & & Y_2 & & & & \\ 3 & & & Y_3 & Y_{34} & Y_{35} & \\ 4 & & & Y_{43} & Y_4 & Y_{45} & \\ 5 & & & Y_{53} & Y_{54} & Y_5 & \\ 6 & & & & & & Y_6 \end{array};$$

$$Y_{km} = (-1)^{k+m} \frac{\begin{vmatrix} Z_3 & Z_{34} & Z_{35} \\ Z_{43} & Z_4 & Z_{45} \\ Z_{53} & Z_{54} & Z_5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_3 & Z_{34} & Z_{35} \\ Z_{43} & Z_4 & Z_{45} \\ Z_{53} & Z_{54} & Z_5 \end{vmatrix}},$$

(столбец m, строка k)

где $Y_1 = 1/Z_1$; $Y_2 = 1/Z_2$; $Y_6 = 1/Z_6$.

5.19. Трансформаторы с линейными характеристиками. Идеальный трансформатор

Одним из важнейших элементов электрических цепей, в котором специально используются свойства магнитно-связанных контуров, является статическое устройство для преобразования значений тока и напряжения, называемое трансформатором. В простейшем случае трансформатор состоит из двух электрически не соединенных и неподвижных друг относительно друга катушек, называемых обмотками трансформатора, связанных между собой потоком взаимной индукции. Если обмотки трансформатора намотаны на ферромагнитный сердечник, то свойства такого трансформатора будут нелинейными. Процессы в трансформаторах с ферромагнитными сердечниками будут рассмотрены в т. III. Здесь будем предполагать, что ферромагнитные сердечники отсутствуют. Условно назовем такой трансформатор линейным, так как процессы в нем описываются линейными уравнениями, т. е. он обладает линейными характеристиками.

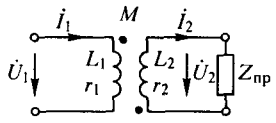


Рис. 5.26

Пусть к зажимам одной обмотки трансформатора, которую назовем первичной, приложена ЭДС e_1, а к зажимам другой обмотки — вторичной — присоединен приемник (рис. 5.26). Как и прежде, будем считать, что коэффициент взаимной индукции M задан по величине и знаку для приведенной на рис. 5.26 системы точек. Обозначим активные сопротивления обмоток r_1 и r_2, а их индуктивности L_1 и L_2.

По второму закону Кирхгофа имеем

$$u_1 = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}; \quad -M \frac{di_1}{dt} = r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + u_2.$$

Если напряжение u_1 синусоидально, то при установившемся режиме синусоидальными функциями времени будут также i_1, i_2 и u_2, и уравнения трансформатора можно записать в комплексной форме:

$$\dot{U}_1 = r_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2; \quad -j\omega M \dot{I}_1 = r_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + \dot{U}_2.$$

Если известны $\dot{U}_1$, параметры трансформатора и приемника $Z_{пр} = \dot{U}_2 / \dot{I}_2$, то, решая эту систему, можно найти токи $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ и напряжение $\dot{U}_2$. Можно также по заданным значениям $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$ и параметрам трансформатора найти $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$.

При известном $Z_{пр} = r_{пр} + jx_{пр}$ и заданном $\dot{U}_1$ найдем ток $\dot{I}_1$. Приняв

$$\omega L_1 = x_1; \quad r_2 + r_{пр} = r_{II}; \quad \omega L_2 + x_{пр} = x_{II},$$

имеем

$$\dot{U}_1 = (r_1 + jx_1)\dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2; \quad -j\omega M \dot{I}_1 = (r_{II} + jx_{II})\dot{I}_2,$$

откуда

$$\dot{U}_1 = (r_1 + jx_1)\dot{I}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{r_{II} + jx_{II}} \dot{I}_1$$

и, следовательно,

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\left(r_1 + \frac{\omega^2 M^2}{r_{II}^2 + x_{II}^2} r_{II}\right) + j\left(x_1 - \frac{\omega^2 M^2}{r_{II}^2 + x_{II}^2} x_{II}\right)} = \frac{\dot{U}_1}{Z_{вх}}.$$

Величина $Z_{вх} = r + jx$ представляет собой комплексное входное (эквивалентное) сопротивление всей цепи, состоящей из трансформатора и приемника. Из его выражения следует, что при $Z_{пр} \neq \infty$ эквивалентное активное сопротивление r больше r_1. Увеличение эквивалентного активного сопротивления связано с тем обстоятельством, что необратимые преобразования энергии во вторичном контуре происходят за счет энергии, передаваемой от первого контура, где имеется источник энергии, во второй контур, где нет такого источника. Поскольку для заданного значения тока активная мощность, определяющая необратимые преобразования энергии, прямо пропорциональна активному сопротивлению, то поглощение энергии во втором контуре приводит к увеличению эквивалентного активного сопротивления всей цепи.

Эквивалентное реактивное сопротивление x может быть больше x_1, если $x_{II} < 0$, и меньше x_1, если $x_{II} > 0$. ЭДС взаимной индукции во вторичном контуре отстает по фазе от потока взаимной индукции, а следовательно, при $M > 0$ и от тока $\dot{I}_1$ на угол $\pi/2$. При индуктивном характере цепи второго контура ($x_{II} > 0$) ток $\dot{I}_2$ в предельном случае будет отставать от этой ЭДС на угол $\pi/2$ и, следовательно, окажется в противофазе с током $\dot{I}_1$. Это означает, что магнитный поток, обусловленный током $\dot{I}_2$, направлен против магнитного потока, обусловленного током $\dot{I}_1$, что приводит к уменьшению магнитного потока в первом контуре, и это эквивалентно уменьшению реактивного сопротивления первого контура.

Другая картина наблюдается, если $x_{II} < 0$. При этом ток во вторичной обмотке имеет емкостный характер и в предельном случае может опережать ЭДС взаимной индукции на угол $\pi/2$, т. е. совпадать по фазе с током $\dot{I}_1$. При этом магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции будут также совпадающими, что равносильно увеличению эквивалентного реактивного сопротивления.

Полагая

$$r = r_1 + \Delta r; \quad x = x_1 + \Delta x,$$

имеем

$$\Delta r = \frac{\omega^2 M^2}{r_{II}^2 + x_{II}^2} r_{II}; \quad \Delta x = -\frac{\omega^2 M^2}{r_{II}^2 + x_{II}^2} x_{II},$$

причем Δr и Δx называют, соответственно, вносимыми активным и реактивным сопротивлениями.

Представим уравнения трансформатора в виде

$$\dot{U}_1 = r_1\dot{I}_1 + j\omega(L_1 - M)\dot{I}_1 + j\omega M(\dot{I}_1 + \dot{I}_2);$$
$$0 = r_2\dot{I}_2 + j\omega(L_2 - M)\dot{I}_2 + j\omega M(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) + Z_{пр}\dot{I}_2.$$

Схема цепи, для которой данная система уравнений справедлива, показана на рис. 5.27. Поскольку в этой цепи токи $\dot{I}_1, \dot{I}_2$ и напряжения $\dot{U}_1, \dot{U}_2$ равны таковым в трансформаторе, эта схема является эквивалентной схемой трансформатора. Если M лежит между L_2 и L_1, то или $L_1 - M$, или $L_2 - M$ будет отрицательно. Это обстоятельство представляет интерес, так как при некоторых задачах, связанных с синтезом электрических цепей, возникает необходимость реализации отрицательной индуктивности в сочетании с положительными индуктивностями, соединенными, как показано на схеме (рис. 5.27).

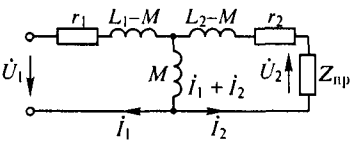


Рис. 5.27

Метод замены действительной электрической цепи, в которой отдельные контуры связаны друг с другом через взаимную индуктивность, эквивалентной ей электрической цепью, в которой все контуры электрически связаны друг с другом, а взаимная индуктивность между контурами учтена в параметрах отдельных цепей (например, рис. 5.27), находит применение в практике расчета цепей.

Степень магнитной связи контуров характеризуется величиной $k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}$, которая носит название коэффициента связи. Покажем, что во всех реальных случаях k меньше единицы. Пусть активное сопротивление вторичного контура равно нулю и этот контур замкнут накоротко, т. е. $r_2 = 0$ и $Z_{пр} = 0$. При этом

$$r_{II} = 0;\ x_{II} = \omega L_2; \quad \Delta x = -\omega \frac{M^2}{L_2}$$

и

$$x = \omega L_1 - \omega \frac{M^2}{L_2} = \omega L_1 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right) = \omega L_1 (1 - k^2) = \omega L_э.$$

Величина $L_э$ должна быть положительной, так как энергия магнитного поля $W_м = \frac{1}{2} i_1^2 L_э$ положительна. Следовательно, только в предельном случае, когда первичный и вторичный контуры расположены столь близко, что поток взаимной индукции и поток самоиндукции в первичной цепи взаимно компенсируются, величина k приближается к единице.

Рассмотрим некоторые особенные свойства трансформаторов в предельных идеализированных случаях.

Предположим, что

$$r_1 = r_2 = 0 \quad \text{и} \quad k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} = 1.$$

При этом уравнения трансформатора запишутся в виде

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2;$$

$$-j\omega M \dot{I}_1 = Z_{пр} \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 = \dot{U}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2.$$

Выразим $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$ через $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$. Получим

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \left(-\frac{\dot{U}_2}{j\omega M} - \frac{L_2}{M} \dot{I}_2\right) + j\omega M \dot{I}_2 = -\frac{L_1}{M} \dot{U}_2 + j\omega \left(M - \frac{L_1 L_2}{M}\right) \dot{I}_2;$$

$$\dot{I}_1 = -\frac{\dot{U}_2}{j\omega M} - \frac{L_2}{M} \dot{I}_2.$$

Легко заметить, что при $k = 1$ имеем $M - L_1 L_2 / M = 0$ ($M = L_1 L_2 / M$), и тогда, обозначая $c = L_1 / M$, получим

$$\dot{U}_1 = -c\dot{U}_2;\ \dot{I}_1 = -\frac{c\dot{U}_2}{j\omega L_1} - \frac{1}{c} \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1}{j\omega L_1} - \frac{1}{c} \dot{I}_2.$$

Трансформатор, для которого соблюдается условие $U_1 / U_2 = c$ при любой нагрузке, назовем совершенным трансформатором.

Если, кроме вышеуказанных условий, принять, что $L_1 = \infty$ (практически L_1 должно иметь достаточно большое значение, чтобы можно было пренебречь

током $U_1/(\omega L_1)$ по сравнению с током $\frac{1}{c}\dot{I}_2$), то между токами и напряжениями имели бы место соотношения

$$\dot{U}_1 = -c\dot{U}_2 \quad \text{и} \quad \dot{I}_1 = -\frac{1}{c}\dot{I}_2.$$

Трансформатор, для которого соблюдаются эти условия, назовем идеальным трансформатором. Такой трансформатор действительно обладает свойством изменять токи и напряжения независимо от значения сопротивления, включенного во вторичный контур, в определенное число раз. Для идеального трансформатора получим

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_{\text{вх}} = \frac{-c\dot{U}_2}{-\frac{1}{c}\dot{I}_2} = c^2 Z_{\text{пр}},$$

откуда видно, что при помощи идеального трансформатора можно произвести также и изменение сопротивления в определенное число раз, не зависящее от характера этого сопротивления. Это обстоятельство особенно важно для рационального конструирования отдельных элементов электрических цепей, например для согласования отдельных участков цепей по их сопротивлениям.

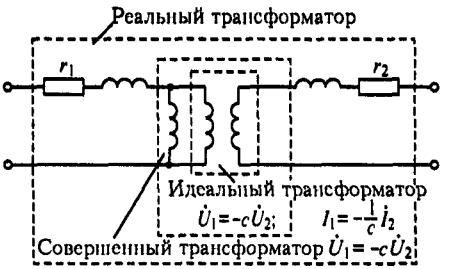


Рис. 5.28

Совершенный трансформатор можно получить, присоединив к зажимам идеального трансформатора индуктивности по схемам на рис. 5.28. Реальный трансформатор может быть представлен при помощи идеального трансформатора и дополнительных индуктивностей и активных сопротивлений, учитывающих наличие сопротивлений r_1 и r_2 и обмоток, а также условие $k < 1$ (рис. 5.28)

Свойствами, близкими к свойствам идеального и совершенного трансформаторов, обладают трансформаторы с ферромагнитными сердечниками, с достаточно большим числом витков и с большой магнитной проницаемостью ферромагнитного материала.

5.20. Цепи, связанные через электрическое поле

Отдельные части электрической цепи могут быть связаны также при помощи электрического поля. Такую связь называют емкостной. Аналогично магнитной связи степень емкостной связи можно охарактеризовать коэффициентом связи k_C, определяемым значениями соответствующих емкостных сопротивлений.

Для коэффициента связи в индуктивно-связанных контурах имеем

$$k_L = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{\omega|M|}{\sqrt{\omega L_1 \omega L_2}} = \frac{\omega L_{12}}{\sqrt{\omega L_1 \omega L_2}},$$

где $L_{12} = |M|$. Поэтому, определив аналогично и k_C, получим

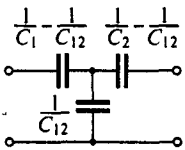


Рис. 5.29

$$k_C = \frac{1}{\omega C_{12}} \Big/ \sqrt{\frac{1}{\omega C_1}\frac{1}{\omega C_2}} = \frac{\sqrt{C_1 C_2}}{C_{12}}.$$

Как и магнитносвязанные контуры, контуры, связанные только при помощи общего электрического поля, можно представить в виде эквивалентной схемы (рис. 5.29), расчет токов в которой можно производить по всем изложенным ранее методам.

5.21. Баланс мощностей в сложной цепи

Баланс мощностей в приемниках и источниках энергии электрической цепи доказывается теоремой Ланжевена. Эта теорема решает вопрос о равенстве суммы реактивных мощностей всех источников энергии, имеющихся в сколь угодно сложной электрической цепи, сумме реактивных мощностей приемников в этой цепи. Попутно решается и вопрос о равенстве соответствующих активных мощностей, которое, вообще говоря, вытекает непосредственно из закона сохранения энергии.

Для любой цепи при записи уравнений по методу узловых напряжений имеем

$$\begin{Vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1,q-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{q-1,1} & Y_{q-1,2} & \dots & Y_{q-1,q-1} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \\ \vdots \\ \dot{U}_{q-1,0} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \sum_{j=1}^{q-1} \dot{\mathcal{Z}}_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{q-1} \dot{\mathcal{Z}}_{q-1,j} \end{Vmatrix}.$$

Перемножая матрицу проводимости на матрицу-столбец узловых напряжений, получим выражение, в котором каждый элемент матрицы-столбца слева от знака равенства представляет собой сумму токов в ветвях (в приемниках), сходящихся к узлу, номер которого соответствует первому индексу у тока. Каждый элемент в матрице справа есть сумма токов соответствующих источников тока:

$$\begin{Vmatrix} \sum_{j=1}^{q-1} \dot{I}_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{q-1} \dot{I}_{q-1,j} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \sum_{j=1}^{q-1} \dot{\mathcal{Z}}_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{q-1} \dot{\mathcal{Z}}_{q-1,j} \end{Vmatrix}.$$

Помножим эти матрицы на транспонированную матрицу сопряженных комплексных узловых напряжений. Имеем

$$\begin{Vmatrix} \dot{U}_{10} & \dot{U}_{20} & \dots & \dot{U}_{q-1,0} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \sum_{j=1}^{q-1} \dot{I}_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{q-1} \dot{I}_{q-1,j} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dot{U}_{10} & \dot{U}_{20} & \dots & \dot{U}_{q-1,0} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \sum_{j=1}^{q-1} \dot{\mathcal{Z}}_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{q-1} \dot{\mathcal{Z}}_{q-1,j} \end{Vmatrix}.$$

После выполнения операции перемножения получим слева и справа члены вида

$$\dot{U}_{i0}\dot{I}_{ij} + \dot{U}_{j0}\dot{I}_{ji} \quad \text{и} \quad \dot{U}_{i0}\dot{\mathfrak{I}}_{ij} + \dot{U}_{j0}\dot{\mathfrak{I}}_{ji}.$$

Учитывая, что $\dot{I}_{ji} = -\dot{I}_{ij}$ и $\dot{U}_{i0} - \dot{U}_{j0} = \dot{U}_{ij}$, имеем

$$(\dot{U}_{12}\dot{I}_{12} + \ldots + \dot{U}_{q-1,0}\dot{I}_{q-1,0}) = (\dot{U}_{12}\dot{\mathfrak{I}}_{12} + \ldots + \dot{U}_{q-1,0}\dot{\mathfrak{I}}_{q-1,0}).$$

Произведение $\dot{U}_{ij}\dot{I}_{ij} = \dot{S}'_{ij} = \dot{S}'_k$ есть комплексная мощность приемника, подключенного между узлами i и j. Произведение $\dot{U}_{ij}\dot{\mathfrak{I}}_{ij} = \dot{S}_{ij} = \dot{S}_k$ есть комплексная мощность источника, также подключенного к узлам i и j.

Таким образом, приходим к выводу, что

$$\sum \dot{S}_k = \sum \dot{S}'_k \quad \text{или} \quad \sum P_k = \sum P'_k \quad \text{и} \quad \sum Q_k = \sum Q'_k,$$

где $\sum P_k$ и $\sum Q_k$ — сумма активных и сумма реактивных мощностей всех источников энергии, имеющихся в цепи, а $\sum P'_k$ и $\sum Q'_k$ — сумма активных и сумма реактивных мощностей всех приемников. Последние два равенства и выражают теорему Ланжевена.

Для каждого приемника справедливы соотношения

$$P'_k = I_k^2 r_k \quad \text{и} \quad Q'_k = I_k^2 \omega L_k - \frac{I_k^2}{\omega C_k}.$$

Поэтому для комплексной мощности всей цепи справедливо соотношение

$$\sum \dot{S}'_k = \sum I_k^2 r_k + j\omega \sum I_k^2 L_k + \frac{1}{j\omega} \sum \frac{I_k^2}{C_k}.$$

5.22. Расчет сложных цепей при постоянном токе

Расчет сложных электрических цепей при воздействии источников с постоянными во времени ЭДС и токами в установившемся режиме можно производить, используя все изложенные выше методы расчета сложных цепей при синусоидальных ЭДС и токах. Особенность заключается в том, что в реальных индуктивных катушках учитываются только активные сопротивления их обмоток, а в реальных конденсаторах — только их проводимости утечки. Если речь идет о расчете цепи, уже представленной в виде эквивалентной электрической схемы, в которой участки с L и C не обладают потерями, а сопротивления обмоток катушек и проводимости утечки конденсаторов вынесены в отдельные участки, то участки с L следует считать короткозамкнутыми, а участки с C — разомкнутыми. Это вытекает формально из выражений для сопротивлений x_L и x_C при $\omega \to 0$. Действительно, при $\omega = 0$ имеем $x_L = \omega L = 0$, $x_C = 1/(\omega C) = \infty$. Физически это связано с тем, что при постоянном токе в катушках не индуцируется ЭДС самоиндукции и при постоянном напряжении на зажимах идеальных конденсаторов ток через них не проходит.

Аналогично при расчете цепей с индуктивными связями при постоянном токе отсутствуют ЭДС взаимной индукции. Это формально учитывается тем, что члены с множителями ωM равны нулю при $\omega = 0$.

Естественно, расчет цепей при постоянном токе является более простым, чем при синусоидальных токах, так как вместо комплексных величин в уравнения

будут входить вещественные величины. Очевидно, что при составлении уравнений надо соблюдать все правила знаков.

В особом случае, когда в схеме цепи во всех ветвях включены идеальные конденсаторы, при действии постоянных ЭДС ток в такой цепи равен нулю и может стоять вопрос только об отыскании распределения напряжения по конденсаторам цепи. В таком идеализированном случае в предположении, что до начала действия ЭДС все конденсаторы были разряжены, распределение напряжения под действием постоянных ЭДС будет таким же, как распределение синусоидального напряжения в аналогичной схеме, но содержащей во всех ветвях только идеальные конденсаторы, если в ней действуют синусоидальные ЭДС, равные по действующему значению заданным постоянным ЭДС и находящиеся друг с другом в фазе.

В реальных цепях все конденсаторы обладают конечной проводимостью утечки. Поэтому при действии постоянных ЭДС установившиеся напряжения на конденсаторах будут определяться сопротивлениями их утечек и сопротивлениями остальных участков схемы. Значения емкости конденсаторов при этом на распределение напряжения не оказывают никакого влияния. Последнее соответствует сделанному выше указанию, что в эквивалентной схеме участки с идеальными конденсаторами при расчете должны быть разомкнуты.

5.23. Проблемы расчета установившихся режимов сложных электрических цепей

В предыдущих параграфах в основном рассматривались не столько методы, позволяющие получить решение задачи, сколько методы составления системы уравнений цепи. Для выполнения анализа процессов в цепи эта система должна быть решена относительно выделенных искомых величин (иногда говорят — искомых переменных).

В математическом плане такое решение сводится к обращению матриц, т. е. к нахождению определителя матрицы узловых проводимостей или матрицы проводимостей сечений и их $q - 1$ алгебраических дополнений или же к нахождению определителя матрицы контурных сопротивлений и его n алгебраических дополнений. При высоком порядке этих матриц такое обращение связано с большим числом вычислительных операций. Если воспользоваться формулой Крамера, согласно которой записаны выражения для контурных токов и узловых напряжений в § 5.11 и 5.12, т. е. непосредственно раскрыть определители при решении системы с m неизвестными, то потребуется выполнить порядка $m \cdot m!$ арифметических операций. Уже для системы уравнений с $m = 15$ число операций достигает $2 \cdot 10^{13}$. И даже использование мощной вычислительной машины, которая может выполнить 10^9 операций в секунду, время решения затянется на $2 \cdot 10^4$ с = 5,5 ч. Этими формулами имеет смысл пользоваться, если $m < 10$. По этой причине систему уравнений решают главным образом методом исключения по Гауссу (или его разновидностями). Этот метод требует выполнения меньшего числа операций — порядка $2m^3$. Однако и такой способ решения имеет смысл применять при $m < 10\,000$, так как уже для $m = 10\,000$ число операций равно $2 \cdot 10^{12}$, и вычислительная машина с производительностью 10^9 операций в секунду такие задачи будет решать в течение 33 мин. Метод непосредственного

раскрытия определителей и метод Гаусса позволяют при отсутствии округлений найти точное решение задачи.

Однако при использовании ЭВМ неизбежны ошибки округления, и поэтому при большом числе уравнений полученное решение может заметно отличаться от точного. Кроме того, для размещения элементов матрицы и промежуточных результатов в памяти ЭВМ потребуется m^2 ячеек. Поэтому наряду со временем решения существенным параметром является и число используемых ячеек памяти, которое при $m = 10\,000$ достигнет 10^8.

По этой причине при большом числе уравнений приходится отказываться от точных методов решения и использовать те или иные итерационные методы, когда решение находится как предел последовательных приближений (итераций), например вида (простые итерации)

$$\mathbf{I}^{(n)} = \mathbf{B}\mathbf{I}^{(n-1)} + \mathbf{a},$$

где $\mathbf{I}^{(n-1)}$ — матрица-столбец решений на $(n-1)$-м шаге итераций; $\mathbf{I}^{(n)}$ — матрица-столбец уточненных решений на следующем, n-м, шаге итераций (приближений).

5.24. Топологические методы расчета цепей

Представляет большой интерес возможность составления элементов обратной матрицы и ее определителя непосредственно по графу схемы, минуя стадию составления системы уравнений. В качестве примера такого подхода рассмотрим метод узловых напряжений.

Для матрицы узловых проводимостей имеем выражение $\mathbf{AYA}^t$, где $\mathbf{A}$ — топологическая матрица соединений порядка $(q-1) \times n$; $\mathbf{A}^t$ — транспонированная матрица соединений порядка $n \times (q-1)$; $\mathbf{Y}$ — диагональная матрица проводимостей ветвей (в цепи отсутствуют взаимная индукция и зависимые источники) порядка $n \times n$.

Согласно теореме Коши—Бине, определитель такой матрицы может быть представлен как

$$\det(\mathbf{AYA}^t) = \det(\mathbf{AY})\,\mathbf{A}^t = \Sigma \text{ соответствующих миноров максимального порядка матриц } \mathbf{AY} \text{ и } \mathbf{A}^t.$$

Соответствие миноров означает совпадение номеров столбцов в матрице $\mathbf{AY}$ с номерами строк матрицы $\mathbf{A}^t$. В матрицах $\mathbf{AY}$ и $\mathbf{A}$ из-за диагональности матрицы $\mathbf{Y}$ одинаково расположены ненулевые элементы (если $a_{jk} \neq 0$, то $a_{jk}Y_k \neq 0$).

Максимальный порядок миноров равен $(q-1)\times(q-1)$. Примем во внимание, что транспонированный минор равен исходному минору. Ранее (см. § 3.16) мы указали, что ненулевой минор порядка $(q-1)\times(q-1)$ матрицы $\mathbf{A}$ равен ± 1. Следовательно, произведение соответствующих миноров имеет всегда положительный знак. Кроме того, минор $\mathbf{A}$ не равен нулю только в том случае, если входящие в его состав ветви $(q-1)$ соединяют все q узлов графа схемы. Это положение легко усмотреть из процедуры разложения минора по элементам строк или столбцов. При исключении соответствующей ветви и узла оставшийся минор не должен иметь строку (или столбец), состоящую только из нулевых

элементов. Это же положение легко увидеть из рассмотрения максимального минора [порядка $(q-1)\times(q-1)$] матрицы **AY**. В результате раскрытия минора мы должны иметь произведение вида $Y_iY_jY_pY_q...Y_n$, где должны быть $q-1$ элементов. Причем эти элементы должны состоять из проводимостей ветвей, которые соединят все узлы графа схемы. Но такая совокупность ветвей есть дерево графа схемы. Поэтому можем написать

$$\det(\mathbf{AYA}^t) = \Sigma\Pi \text{ проводимостей ветвей графа схемы} = \Sigma\Pi Y_k \text{ ветвей дерева графа схемы},$$

где суммирование выполняется по всем неповторяющимся деревьям графа схемы.

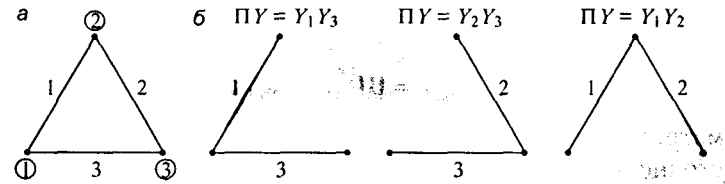


Рис. 5.30

Для графа схемы (рис. 5.30, *а*), деревья которого показаны на рис. 5.30, *б*

$$\det(\mathbf{AYA}^t) = Y_1Y_3 + Y_2Y_3 + Y_1Y_2.$$

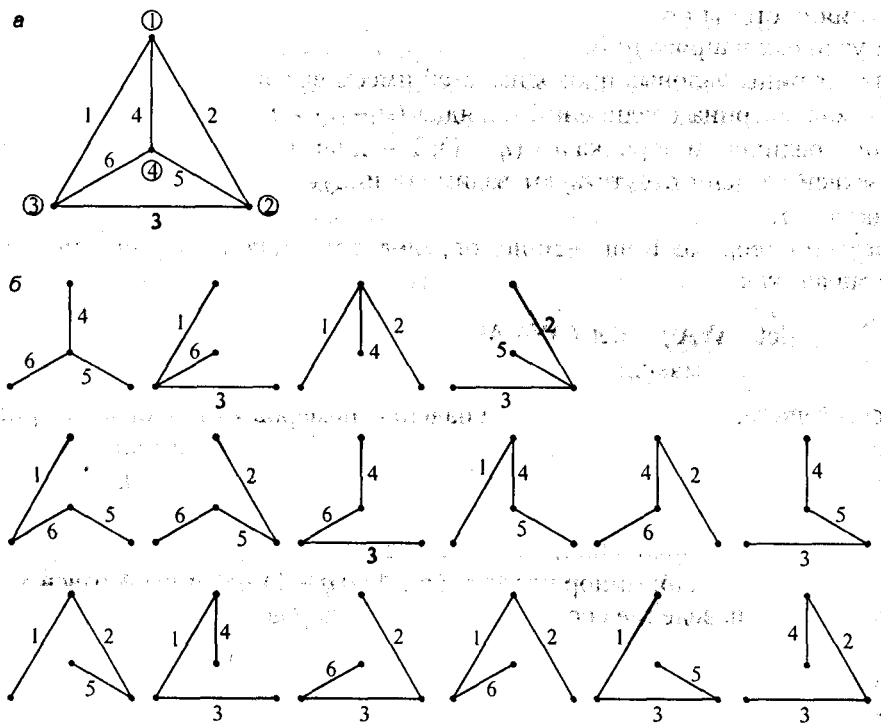


Рис. 5.31

Для графа схемы (рис. 5.31, *а*), деревья которого показаны на рис. 5.31, *б*

$$\det(\mathbf{AYA}^t) = Y_4Y_5Y_6 + Y_1Y_3Y_6 + Y_1Y_2Y_4 + Y_2Y_3Y_5 + Y_1Y_5Y_6 + Y_2Y_5Y_6 + Y_3Y_4Y_6 +$$
$$+ Y_1Y_4Y_5 + Y_2Y_4Y_6 + Y_3Y_4Y_5 + Y_1Y_2Y_5 + Y_1Y_3Y_4 + Y_2Y_3Y_6 + Y_1Y_2Y_6 + Y_1Y_3Y_5 + Y_2Y_3Y_4.$$

Для получения алгебраического дополнения порядка Δ_{jj}, исходя из теоремы Коши—Бине, мы должны из матрицы **AY** исключить j-ю строку, а из матрицы $\mathbf{A}^t$ — j-й столбец. Это равносильно присоединению узла j к базисному узлу. Тогда получаем новый граф схемы, где объединены j-й и базисный узлы прежнего графа схемы. Например, определитель Δ_{11} графа схемы (рис. 5.31, *а*) можно вычислить из условия, что он равен определителю нового графа схемы (рис. 5.32, *а*), деревья которого изображены на рис. 5.32, *б*:

$$\Delta_{11} = Y_3(Y_1 + Y_6) + Y_3(Y_2 + Y_5) + (Y_1 + Y_6)(Y_2 + Y_5).$$

На рис. 5.32, *в* и *г*, представлены графы и деревья схемы для Δ_{33}:

$$\Delta_{33} = Y_2(Y_1 + Y_4) + Y_2(Y_3 + Y_5) + (Y_1 + Y_4)(Y_3 + Y_5).$$

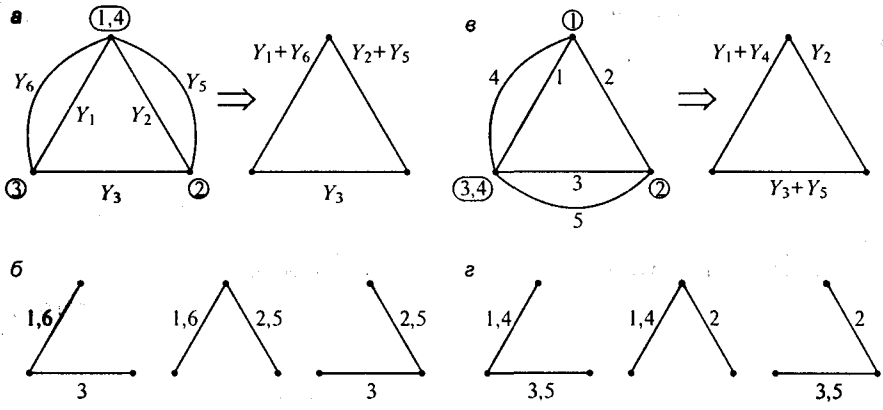


Рис. 5.32

Алгебраические дополнения вида Δ_{jk} могут быть определены из той же формулы Коши—Бине, если вычеркнуть в матрице **AY** строку j и в матрице $\mathbf{A}^t$ — столбец k. Очевидно, что миноры **AY** совпадут с минорами Δ_{jj}, а миноры $\mathbf{A}^t$ — с минорами Δ_{kk}. Поскольку следует суммировать произведения соответствующих миноров, то это означает, что из выражений для Δ_{jj} и Δ_{kk} должны быть взяты совпадающие члены. Например, для Δ_{13} таковыми являются

$$\Delta_{13} = (-1)^{(1+3)}(Y_1Y_2 + Y_2Y_3 + Y_1Y_5 + Y_1Y_3).$$

Условие совпадения миноров и то обстоятельство, что узлы j и k вычеркнуты из соответствующих матриц, можно представить в виде разделения графа цепи на два несвязанных подграфа со своими деревьями, сумма произведений проводимостей ветвей которых определит Δ_{jk}. При этом следует учесть, что узлы j и k мысленно уже соединены с опорным узлом, и поэтому узлы j и k, с одной сто-

роны, и опорный узел — с другой, должны быть в разных подграфах. Деревья этих подграфов называют двойным деревом графа схемы (2-дерево). На рис. 5.33 изображено 2-дерево для определителя Δ_{13}. Минор подграфа, состоящего из отдельного узла (узел *4*, он же опорный), равен единице. Имея в виду это обстоятельство, из рис. 5.33 получим

$$\Delta_{13} = (-1)^{(1+3)}(Y_1Y_2 + Y_2Y_3 + Y_1Y_5 + Y_1Y_3).$$

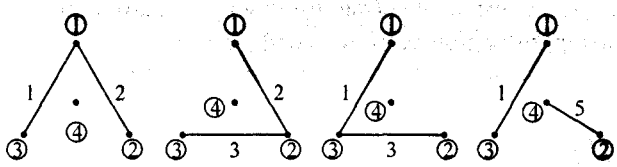


Рис. 5.33

Использование топологических методов связано с трудоемким процессом отыскания всех ветвей графа схемы. Эта задача относительно упрощается, если заранее известно общее число деревьев.

Из выражения для определителя вытекает, что если проводимости всех ветвей единичны, то Δ равно числу деревьев графа цепи, т. е. если $\mathbf{Y} = \mathbf{1}$, то

$$\det(\mathbf{AYA}^t) = \det(\mathbf{AA}^t).$$

Если все узлы соединены попарно между собой, то общее число деревьев по этому выражению равно q^{q-2}. В рассмотренном выше графе (рис. 5.31, *а*) мы имели случай, когда все узлы попарно соединены и $q = 4$. Число деревьев графа цепи было равно $4^{4-2} = 4^2 = 16$. Если в графе отсутствуют некоторые ветви, то число деревьев соответственно уменьшается. Для графа (рис. 5.31, *а*) отсутствие ветви *1* приведет к сокращению числа деревьев до 8.

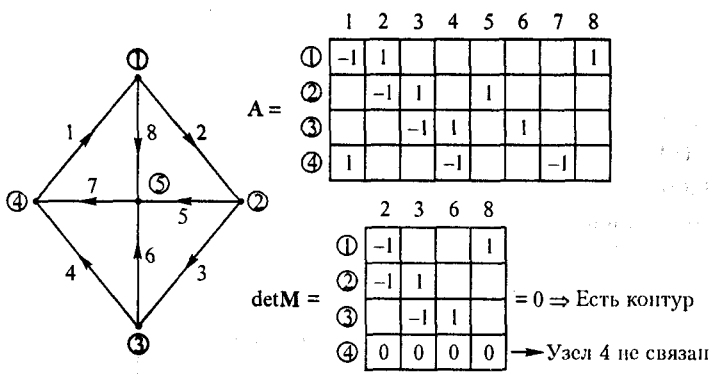


Рис. 5.34

Для графа схемы (рис. 5.34), у которого непосредственно не связаны только две пары узлов, а именно *1, 3* и *2, 4*, число деревьев равно

$$\det(\mathbf{AA}^t) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 81,$$

что существенно меньше максимального числа деревьев, равного $5^{5-2} = 125$.

Именно необходимость отыскания большого числа различных деревьев является серьезным недостатком топологического метода расчета цепей, основные понятия и формулы которого были предложены Кирхгофом еще в 1847 г. и Максвеллом в 1892 г. Внедрение в расчетную практику ЭВМ и развитие теории графов вновь возбудили интерес к этому разделу теории цепей, однако даже мощные современные ЭВМ не в состоянии устранить основной недостаток метода. Необходимость отыскания и хранения большого числа деревьев, которое уже для цепи с $q = 10$ достигает 10^8, проблематична даже и для мощных ЭВМ. Поэтому топологические методы приемлемы для схем с относительно малым числом узлов.

Глава шестая

Резонансные явления и частотные характеристики

6.1. Понятие о резонансе и о частотных характеристиках в электрических цепях

Реактивные сопротивления и проводимости отдельных участков цепи могут быть как положительными, так и отрицательными величинами и, следовательно, могут взаимно компенсироваться. Поэтому возможны случаи, когда, несмотря на наличие в цепи индуктивных катушек и конденсаторов, входное реактивное сопротивление или входная реактивная проводимость всей цепи оказываются равными нулю. При этом ток и напряжение на входе цепи совпадают по фазе, и эквивалентное сопротивление всей цепи будет активным. Такое явление называют резонансным.

Выясним характерные черты этого явления и его связь с так называемыми частотными характеристиками на некоторых частных случаях, понимая под частотными характеристиками зависимости от частоты параметров цепи (r, x, z, g, b, y), а также величин, определяемых параметрами, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{x}{r}$, $\cos\varphi = \frac{r}{z}$ и т. д.

Зависимости действующих токов I в цепи, напряжений U на зажимах цепи и на отдельных ее участках, а также активной и реактивной мощностей в цепи от частоты при неизменном значении одной из этих величин аналогичны зависимостям от частоты соответствующих параметров цепи или величин, определяемых как функции этих параметров. Поэтому такие зависимости, характеризующие изменение режима в цепи при изменении частоты, точно так же могут рассматриваться как частотные характеристики цепи.

6.2. Резонанс в случае последовательного соединения участков r, L, C

Комплексное сопротивление цепи, состоящей из последовательно соединенных участков r, L и C (рис. 6.1), определяется как

$$Z = r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = r + jx = ze^{j\varphi};$$

$$x = \omega L - \frac{1}{\omega C}; \quad z = \sqrt{r^2 + x^2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L - 1/\omega C}{r}.$$

Резонанс имеет место, если $\varphi = 0$, что равносильно при последовательном соединении условию $x = \omega L - 1/(\omega C) = 0$, т. е. $\omega L = 1/(\omega C)$ или $\omega^2 LC = 1$. Резонанса можно достичь, изменяя или частоту приложенного к цепи напряжения, или индуктивность катушки, или емкость конденсатора. При этом значения угловой частоты, индуктивности и емкости, при которых наступает резонанс, определяются формулами

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}};\ L_0 = \frac{1}{\omega^2 C};\ C_0 = \frac{1}{\omega^2 L}.$$

Частоту ω_0 называют **резонансной частотой**. Если напряжение U на зажимах цепи и активное сопротивление r цепи не изменяются, то ток в рассматриваемой цепи при резонансе имеет наибольшее значение, равное U/r, не зависящее от значений реактивных сопротивлений. Векторная диаграмма в случае резонанса приведена на рис. 6.1. Если реактивные сопротивления $x_L = x_C$ при резонансе превосходят по значению активное сопротивление r, то напряжения на зажимах реактивной катушки и конденсатора могут превосходить, и иногда весьма значительно, напряжение на зажимах цепи. Поэтому резонанс при последовательном соединении называют **резонансом напряжений**. Превышение напряжения на реактивных элементах цепи над напряжением на зажимах цепи имеет место при условии

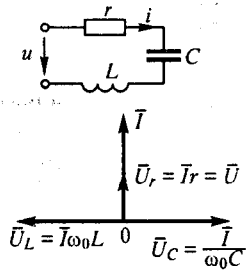


Рис. 6.1

$$r < \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho.$$

Величина $\sqrt{L/C}$, имеющая размерность сопротивления и обозначенная нами через ρ, носит название **волнового сопротивления контура**.

Отношение

$$Q = \frac{U_{C0}}{U} = \frac{U_{L0}}{U} = \frac{I_0 \omega_0 L}{I_0 r} = \frac{\omega_0 L}{r} = \frac{\rho}{r}$$

определяет кратность превышения напряжения на зажимах индуктивного и емкостного сопротивлений над напряжением на зажимах всей цепи. Величину Q, определяющую резонансные свойства контура, называют **добротностью контура**. Принято также резонансные свойства характеризовать величиной $1/Q$, носящей название **затухание контура**.

В § 4.7 для рассматриваемой цепи были получены выражения для мгновенной мощности на зажимах катушки и конденсатора: $p_L = U_L I \sin 2\omega t$ и $p_C = -U_C I \sin 2\omega t$. При резонансе, когда $U_L = U_C$, эти мощности в любой момент времени равны и противоположны по знаку. Это значит, что происходит обмен энергией между магнитным полем катушки и электрическим полем конденсатора, причем обмен энергией между полями цепи и источником, питающим цепь, не происходит, так как $p_L + p_C = dW_м/dt + dW_э/dt$ и $W_м + W_э = \text{const}$, т. е. суммарная энергия полей в цепи остается постоянной. Энергия переходит из конденсатора в катушку в течение четверти периода, когда напряжение на конденсаторе по абсолютному значению убывает, а ток по абсолютному значению возрастает. В течение следующей четверти периода, когда напряжение на конденсаторе по абсолютному значению растет, а ток по абсолютному значению убывает, энергия переходит обратно из катушки в конденсатор. Источник энергии, питающий цепь, только покрывает расход энергии на участке с сопротивлением r.

6.3. Частотные характеристики цепи с последовательным соединением участков *r*, *L*, *C*

Зависимости полного и реактивного сопротивлений цепи и угла сдвига φ между током и напряжением от частоты приведены на рис. 6.2. В данной цепи активное сопротивление не зависит от частоты. Реактивное сопротивление (рис. 6.3) $x = \omega L - \frac{1}{\omega C} = \frac{L}{\omega}(\omega^2 - \omega_0^2)$ при трех характерных значениях частоты принимает предельные значения, равные либо нулю, либо бесконечности.

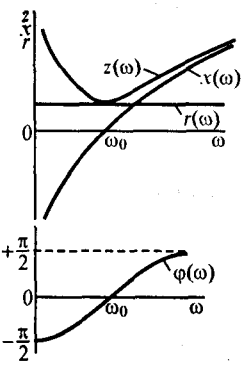


Рис. 6.2

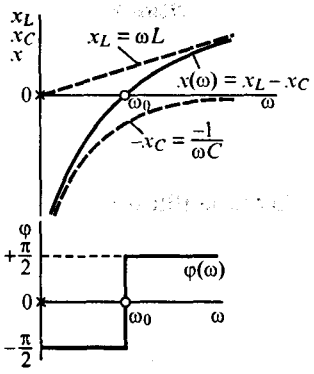


Рис. 6.3

Аргумент функции, при котором она принимает бесконечное значение, называют полюсом функции, а аргумент, при котором функция принимает нулевое значение, называют нулем этой функции. В данном случае имеем функцию $x(\omega)$, и, следовательно, ее полюсами будут частоты, при которых $x(\omega) = \infty$, т. е. $\omega = 0$ и $\omega = \infty$, а нулем будет частота, при которой $x(\omega) = 0$, т. е. $\omega = \omega_0$. На рис. 6.3 полюсы обозначены крестиками, а нули — кружками. Таких же обозначений будем придерживаться и в дальнейшем. Характерное свойство функции $x(\omega)$ заключается в том, что при всех частотах $dx/d\omega > 0$. Действительно, с увеличением частоты растут оба слагаемых величины $x = \omega L + \left(-\frac{1}{\omega C}\right)$, т. е. ωL и $\left(-\frac{1}{\omega C}\right)$, так как $\frac{d(\omega L)}{d\omega} = L > 0$ и $\frac{d\left(-\frac{1}{\omega C}\right)}{d\omega} = \frac{1}{\omega^2 C} > 0$.

Таким образом, с увеличением частоты величина x, понимаемая алгебраически, всегда растет. Как увидим в дальнейшем, это характерное свойство относится к реактивным сопротивлениям любых сколь угодно сложных цепей без потерь.

Обратим особое внимание на то обстоятельство, что в момент резонанса происходит изменение характера реактивного сопротивления (см. рис. 6.2 и 6.3). Если при $\omega < \omega_0$ реактивное сопротивление имело емкостный характер ($x < 0$, $\varphi < 0$), то при $\omega > \omega_0$ оно принимает индуктивный характер ($x > 0$, $\varphi > 0$). В частном случае, если $r = 0$, при частоте $\omega = \omega_0$ происходит скачкообразное изменение угла φ от $-\pi/2$ до $+\pi/2$, т. е. происходит, как иногда говорят, «опрокидывание фазы» (рис. 6.3).

Рассмотрим зависимость от частоты реактивной проводимости той же цепи (см. рис. 6.1). Как известно,

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{r + jx} = \frac{r}{z^2} - j\frac{x}{z^2} = g - jb.$$

Для случая, когда $r = 0$,

$$b = \frac{x}{r^2 + x^2} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} = \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

Реактивная проводимость при отсутствии r в цепи также имеет три характерные частоты — два нуля ($\omega = 0$, $\omega = \infty$), при которых $b = 0$, и один полюс ($\omega = \omega_0$), при котором $b = \infty$. По характеру кривой $b(\omega)$ (рис. 6.4) можно заметить, что с увеличением частоты величина b всегда убывает, т. е. при всех частотах $db/d\omega < 0$. Действительно, при $r = 0$ имеем

$$\frac{db}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dx}{d\omega} < 0, \text{ так как } x^2 > 0 \text{ и } \frac{dx}{d\omega} > 0.$$

Как увидим в дальнейшем, это свойство относится к реактивным проводимостям любых сколь угодно сложных цепей без потерь.

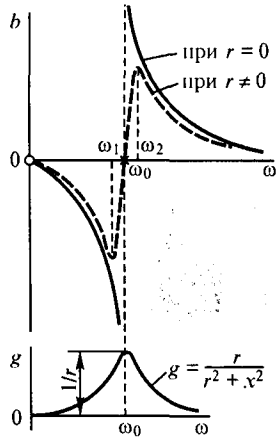


Рис. 6.4

При $r \neq 0$, в отличие от зависимости $x(\omega)$ для последовательного соединения r, L, C, реактивная проводимость зависит не только от L и C, но и от активного сопротивления r. При наличии активного сопротивления в цепи и при $\omega = \omega_0$ для данной цепи $b = 0$, т. е. резонансная частота является нулем b. Однако влево и вправо от этой частоты реактивная проводимость резко возрастает (штриховая кривая на рис. 6.4). Легко подсчитать, что экстремумы $b(\omega)$ наступают при $\omega_{1,2} = \omega_0\left[\sqrt{1 + \frac{d^2}{4}} \mp \frac{d}{2}\right]$ и равны, соответственно, $-b_1 = b_2 = 1/(2r)$. Заметим, что $\omega_2 - \omega_1 = \omega_0 d$.

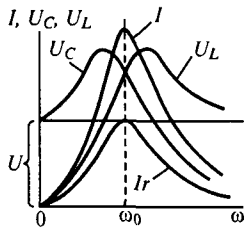


Рис. 6.5

Частотная характеристика $I(\omega)$ при $U = \text{const}$, $r = \text{const}$, $L = \text{const}$ и $C = \text{const}$ выражается формулой

$$I(\omega) = U \Big/ \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

и изображается кривой, представленной на рис. 6.5. На рисунке также приведены частотные характеристики $U_C(\omega) = I(\omega)\frac{1}{\omega C}$ и $U_L(\omega) = I(\omega)\,\omega L$. При $\omega = 0$ будет $I = 0$, так как конденсатор не пропускает постоянный ток и, соответственно, все приложенное напряжение приходится на зажимы конденсатора ($U_C = U$). При $\omega = \infty$ имеем $I = 0$, так как сопротивление катушки бесконечно и, соответственно, все напряжение падает на зажимы катушки ($U_L = U$). При частоте резонанса $\omega = \omega_0$ имеем $U_L = U_C$, и так как напряжения на катушке и на конденсаторе взаимно компенсируются, то все напряжение приходится на участок с сопротивлением r ($U_r = Ir = U$). Диаграмма на рисунке приведена для случая $d < 1$, вследствие чего при частоте резонанса $U_C = U_L > U$. Максимум U_C наступает при частоте,

меньшей ω_0, т. е. раньше максимума I, так как для получения величины U_C необходимо умножить ток I на убывающую величину $1/(\omega C)$. Максимум же U_L достигается при частоте, превышающей ω_0, т. е. позже максимума I, так как для получения величины U_L необходимо умножить ток на возрастающую величину ωL.

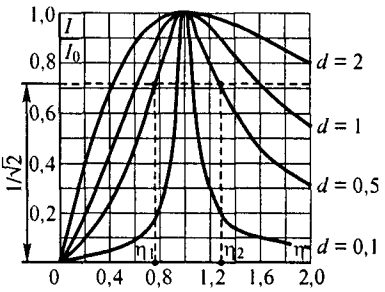


Рис. 6.6

Кривые, выражающие зависимость величин I, U_L и U_C от частоты, дающие графическое изображение частотных характеристик цепи, называют также резонансными кривыми. Резонансными кривыми называют также зависимости этих величин от изменяющейся индуктивности или от изменяющейся емкости при неизменной частоте.

Рассмотрим зависимость от относительной частоты $\eta = \omega/\omega_0$ относительного значения тока I/I_0, где $I_0 = U/r$ и $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — ток и частота при резонансе. Имеем

$$\frac{I}{I_0} = \frac{U}{z} \Big/ \frac{U}{r} = \frac{r}{z} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\dfrac{\omega_0 L}{r}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)\right]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{d^2}\left(\eta - \dfrac{1}{\eta}\right)^2}}.$$

Таким образом, частотная характеристика $\dfrac{I}{I_0}(\eta)$ зависит только от затухания d. Для определения d примем $I/I_0 = 1/\sqrt{2}$. Получаем $1 + \dfrac{1}{d^2}\left(\eta - \dfrac{1}{\eta}\right)^2 = 2$. Положительные корни уравнения равны $\eta_{1,2} = \mp d/2 + \sqrt{d^2/4 + 1}$, следовательно, $\eta_2 - \eta_1 = d$. Отсюда и из рис. 6.6 видно, что чем больше затухание контура, тем более широкой оказывается резонансная кривая $\dfrac{I}{I_0}(\eta)$, и наоборот, эта кривая тем более узкая, чем меньше затухание.

Принято условно говорить, что цепь пропускает частоты, при которых $I > \dfrac{1}{\sqrt{2}} I_0$, т. е. когда мощность $I^2 r$, поглощаемая цепью, больше половины максимальной мощности $I_0^2 r$ при резонансе. Соответственно будем говорить, что цепь не пропускает частот, для которых $I < \dfrac{1}{\sqrt{2}} I_0$, т. е. $I^2 r < \dfrac{1}{2} I_0^2 r$. В этом смысле можно ввести понятие полосы пропускания

$$\omega_0(\eta_2 - \eta_1) = \omega_0 d = \frac{\omega_0}{Q}$$

как диапазона частот, для которых имеет место условие $I > \dfrac{1}{\sqrt{2}} I_0$.

Назовем расстройкой контура по частоте величину $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ и относительной расстройкой — величину $\Delta\omega/\omega_0$. При этом

$$\eta - \frac{1}{\eta} = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0\omega} = \frac{(\omega_0 + \Delta\omega)^2 - \omega_0^2}{\omega_0\omega} = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}\frac{1 + 0{,}5\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0}}{1 + \dfrac{\Delta\omega}{\omega_0}}.$$

При больших значениях добротности ток резко спадает при небольших отклонениях η от единицы. Если $\Delta\omega/\omega_0 << 1$, то приближенно можно считать

$$\eta - \frac{1}{\eta} \approx \frac{2\Delta\omega}{\omega_0},$$

и тогда

$$\frac{I}{I_0} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{2\Delta\omega}{\omega_0}Q\right)^2}}, \quad \varphi \approx \operatorname{arctg}\left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0}Q\right).$$

Величину $a = \dfrac{2\Delta\omega}{\omega_0}Q$ назовем обобщенной расстройкой контура.

Таким образом, через обобщенную расстройку окончательно можно записать

$$\frac{I}{I_0} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad \varphi \approx \operatorname{arctg} a.$$

На границах полосы пропускания обобщенная расстройка равна единице, а $\varphi = \pm 45°$.

6.4. Резонанс при параллельном соединении участков *g, L, C*

Условием резонанса при параллельном соединении активного, индуктивного и емкостного сопротивлений (рис. 6.7) является также отсутствие сдвига фаз между током и напряжением на зажимах цепи.

Поскольку $Y = g - jb = ye^{-j\varphi}$, где

$$y = \sqrt{g^2 + b^2} = \sqrt{g^2 + (b_L - b_C)^2} = \sqrt{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2};$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b_L - b_C}{g} = \operatorname{arctg}\frac{b}{g},$$

то условие $\varphi = 0$ означает, что $b = b_L - b_C = 0$ или

$$\frac{1}{\omega L} - \omega C = 0; \quad \omega^2 LC = 1.$$

Таким образом, взаимная компенсация реактивных проводимостей, при которой наступает резонанс в данной цепи, имеет место, если либо частота, либо индуктивность, либо емкость подобраны согласно соотношениям

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}};\quad L_0 = \frac{1}{\omega^2 C};\quad C_0 = \frac{1}{\omega^2 L}.$$

Следовательно, резонанса при параллельном соединении можно добиться изменением либо частоты, либо индуктивности, либо емкости. Частота ω_0 является резонансной частотой.

При резонансе реактивная проводимость цепи равна нулю и полная проводимость цепи достигает минимального значения. Поэтому ток в общей ветви $I = Uy$ при неизменном напряжении оказывается наименьшим в отличие от резонанса при последовательном соединении, когда ток, наоборот, имел максимальное значение. Векторная диаграмма при резонансе в рассматриваемой цепи приведена на рис. 6.7.

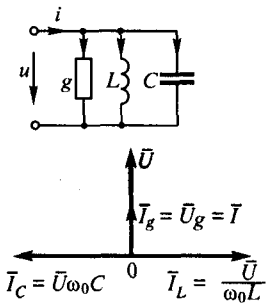


Рис. 6.7

Так как вектор тока в общей ветви оказывается геометрической суммой векторов трех токов, два из которых I_L и I_C находятся в противофазе, то при резонансе возможны случаи, когда токи в индуктивной катушке и в конденсаторе могут превосходить, и иногда намного, суммарный ток в цепи. Поэтому резонанс при параллельном соединении называют **резонансом токов**.

Превышение токов в реактивных элементах цепи над суммарным током цепи имеет место при условии

$$g < \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} = \sqrt{\frac{C}{L}} = \gamma.$$

Величина $\sqrt{C/L}$, имеющая размерность проводимости и обозначенная нами через γ, носит название **волновой проводимости контура**.

Отношение

$$Q = \frac{I_{L0}}{I_0} = \frac{I_{C0}}{I_0} = \frac{U\omega_0 C}{Ug} = \frac{\omega_0 C}{g} = \frac{\gamma}{g}$$

определяет кратность превышения тока в реактивной катушке и в конденсаторе над суммарным током при резонансе. Величина Q является добротностью контура. Как и ранее (см. § 6.2), величина $d = 1/Q$, обратная добротности, является затуханием контура.

Энергетические процессы при резонансе в цепи с параллельным соединением участков g, L и C аналогичны энергетическим процессам при резонансе в цепи с последовательным соединением участков r, L и C. Теперь также имеем $p_L = -p_C$, т. е. $p_L + p_C = 0$. Действительно, при параллельном соединении при резонансе $i_L = -i_C$ в любой момент времени, а напряжение является общим и, так как $p_L = ui_L$, $p_C = ui_C$, то $p_L = -p_C$. Таким образом, и в этом случае происходят колебания энергии в цепи. Энергия полей переходит из конденсатора в катушку и обратно, не обмениваясь с источником, питающим цепь. Источник же энергии только покрывает потери энергии в ветви с проводимостью g.

6.5. Частотные характеристики цепи с параллельным соединением участков *g, L, C*

Зависимости реактивных и полной проводимостей цепи и угла сдвига φ между током и напряжением от частоты приведены на рис. 6.8. В данной цепи активная проводимость не зависит от частоты. Реактивная проводимость (рис. 6.9) $b = b_L - b_C = \frac{1}{\omega L} - \omega C = \frac{C}{\omega}(\omega_0^2 - \omega^2)$ имеет три характерные частоты — два полюса $\omega = 0$ и $\omega = \infty$, при которых $b = \infty$, и один нуль $\omega = \omega_0$, когда $b = 0$.

Отмеченное в § 6.3 общее характерное свойство функции $b(\omega)$, заключающееся в том, что при всех частотах $db/d\omega < 0$, должно соблюдаться и в данном случае. Действительно,

$$\frac{db}{d\omega} = -\frac{1}{\omega^2 L} - C < 0.$$

Как и для цепи с последовательным соединением *r, L, C*, и в этом случае в момент резонанса происходит изменение характера реактивной проводимости (рис. 6.8 и 6.9). Если при $\omega < \omega_0$ реактивная проводимость имела индуктивный характер ($b > 0$, $\varphi > 0$), то при $\omega > \omega_0$ она принимает емкостный характер ($b < 0$, $\varphi < 0$). В частном случае, если $g = 0$, при частоте $\omega = \omega_0$ происходит скачкообразное изменение угла φ от $+\pi/2$ до $-\pi/2$, т. е. происходит «опрокидывание фазы» (рис. 6.9).

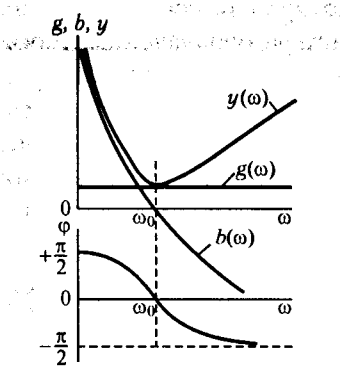


Рис. 6.8

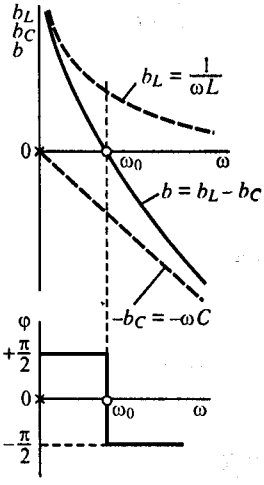


Рис. 6.9

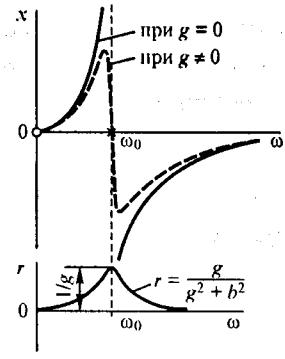


Рис. 6.10

Реактивное сопротивление x контура можно найти из выражения

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{g - jb} = \frac{g}{g^2 + b^2} + j\frac{b}{g^2 + b^2} = r + jx.$$

Если $g = 0$, то $x = \frac{1}{b} = \frac{\omega/C}{\omega_0^2 - \omega^2}$. Для этого случая зависимость $x(\omega)$ дана на рис. 6.10. Заметим, что и в данных условиях $dx/d\omega > 0$. В момент резонанса реак-

тивное сопротивление становится бесконечно большим и одновременно меняет свой характер. До резонанса характер цепи был индуктивный, после резонанса – емкостный.

При отличной от нуля активной проводимости ($g \neq 0$) в цепи зависимость $x(\omega)$ имеет вид, показанный на рис. 6.10 штриховой линией. Прохождение кривой $x(\omega)$ через нуль при $\omega = \omega_0$ вовсе не означает, что и полное сопротивление цепи мало. При $\omega = \omega_0$

$$z = r = \frac{g}{g^2 + b^2} = \frac{1}{g} = \rho Q = \omega_0 L Q.$$

При больших значениях Q это сопротивление оказывается достаточно большим. В отличие от активной проводимости, которая не зависит от частоты, активное сопротивление $r = \dfrac{g}{g^2 + b^2}$ зависит от частоты (см. рис. 6.10).

Частотная характеристика $U(\omega)$ при $I = \text{const}$, $g = \text{const}$, $L = \text{const}$ и $C = \text{const}$ выражается формулой

$$U(\omega) = I \Big/ \sqrt{g^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}$$

и изображается кривой, представленной на рис. 6.11. На рисунке также приведены частотные характеристики $I_L(\omega) = \dfrac{U(\omega)}{\omega L}$ и $I_C(\omega) = U(\omega)\,\omega C$. При $\omega = 0$ имеем $U = 0$, так как сопротивление катушки при постоянном токе равно нулю и, соответственно, весь ток проходит через катушку ($I_L = I$). При $\omega = \infty$ также $U = 0$, так как при этом сопротивление конденсатора падает до нуля и, соответственно, весь ток проходит через конденсатор ($I_C = I$). При частоте резонанса $\omega = \omega_0$ имеем $I_C = I_L$, и так как токи в катушке и конденсаторе взаимно компенсируются, то весь ток I проходит через участок с проводимостью g ($I_g = Ug = I$). Диаграмма на рисунке приведена для случая $d < 1$, вследствие чего при частоте резонанса $I_C = I_L > I$. Максимумы величин I_L и I_C не совпадают с максимумом напряжения U по тем же причинам, которые были указаны при рассмотрении последовательной цепи.

Рассматривая зависимость $\dfrac{U}{U_0}(\eta)$, где $U_0 = I/g$ и $\eta = \omega/\omega_0$, и строя соответствующие ей резонансные кривые для различных затуханий, нетрудно показать, что и в этом случае имеет место равенство $\eta_2 - \eta_1 = d$, где η_2 и η_1 — значения относительной частоты, при которых $U/U_0 = 1/\sqrt{2}$.

Как и в случае последовательного соединения r, L, C, здесь также можно ввести понятия полосы пропускания, расстройки контура, относительной расстройки и обобщенной расстройки.

Представляет интерес сопоставить кривые на рис. 6.5 и 6.11 для последовательной и параллельной цепей. Зависимости в этих цепях полностью совпадут, если заменить токи на напряжения, емкость на индуктивность и сопротивление на проводимость и наоборот. Такие цепи называются д у а л ь н ы м и. Дуальными являются и любые две сложные планарные электрические цепи, в которых

взаимно соответствуют: контурам — узлы, последовательному соединению — параллельное, источникам ЭДС — источники тока, индуктивностям, — емкости, сопротивлениям, — проводимости (рис. 6.12). Процессы в дуальных цепях аналогичны при замене напряжений на токи и наоборот, в частности, резонансу напряжений в одной цепи соответствует резонанс токов в другой.

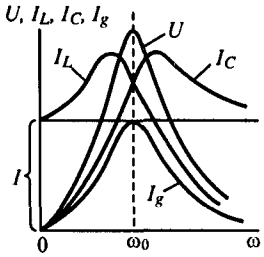


Рис. 6.11

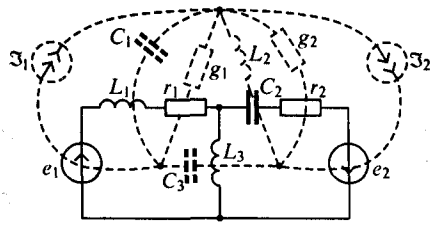


Рис. 6.12

Узлы и контуры дуальных схем I и II взаимно определяются. Поэтому для дуальных схем $\mathbf{C}_{\mathrm{I}} = \mathbf{D}_{\mathrm{II}}$ и $\mathbf{D}_{\mathrm{I}} = \mathbf{C}_{\mathrm{II}}$

Важно отметить некоторые свойства дуальных цепей. Эквивалентные преобразования также должны быть дуальными. Например, сведение параллельно соединенных ветвей в одну в исходной схеме ($Y_1 + Y_2 = Y_э$) означает сведение последовательно соединенных дуальных ветвей в одну ($Z_1 + Z_2 = Z_э$) и наоборот. Преобразования $\Delta \leftrightarrows \curlywedge$ в схеме I означают обратные преобразования $\curlywedge \leftrightarrows \Delta$ в дуальной схеме II. Исключение контура (или узла) в схеме I при помощи разрыва связи (или замыкания накоротко ветви дерева) означает исключение узла (или, соответственно, контура) в дуальной схеме II при помощи замыкания накоротко ветви дерева (или разрыва связи). Если при этом обеспечивается численное (не по размерности) равенство Z и Y, e и $\Im$, то в дуальных схемах будет иметь место равенство, соответственно, токов (или напряжений) схемы I напряжениям (или токам) дуальной схемы II.

6.6. Частотные характеристики цепей, содержащих только реактивные элементы

Рассмотрим связь между током и ЭДС на входе пассивного двухполюсника, состоящего только из реактивных элементов. Полагая в выражении для $\dot{I}_1$, полученном по методу контурных токов (см. § 5.11), $\dot{I}_1 = \dot{I}_{вх}$ и $\dot{E}_{11} = \dot{E}_{вх}$, где $\dot{I}_{вх}$ и $\dot{E}_{вх}$ — соответственно, входной ток и входная ЭДС, имеем

$$\dot{I}_{вх} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}\dot{E}_{вх} = Y_{вх}\dot{E}_{вх},$$

т. е.

$$\frac{\Delta_{11}}{\Delta} = Y_{вх} \quad \text{и} \quad Z_{вх} = jx_{вх} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}}.$$

Здесь Δ — определитель n уравнений цепи, записанных по методу контурных токов, имеющий n строк и n столбцов; Δ_{11} — его алгебраическое дополнение,

имеющее $(n-1)$ строк и $(n-1)$ столбцов. В каждом элементе Δ и Δ_{11} содержатся величины вида

$$Z_{ii} = jx_{ii} = j\omega L_{ii} + \frac{1}{j\omega C_{ii}} = \frac{j}{\omega}\left(\omega^2 L_{ii} - \frac{1}{C_{ii}}\right)$$

и

$$Z_{kq} = jx_{kq} = \frac{j}{\omega}\left(\omega^2 L_{kq} - \frac{1}{C_{kq}}\right),$$

т. е. во всех них содержится множитель j/ω при вещественных величинах. Имея в виду это обстоятельство, можем записать

$$Z_{вх} = jx_{вх} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}} = \frac{(j/\omega)^n \Delta'}{(j/\omega)^{n-1}\Delta'_{11}} = \frac{j}{\omega}\frac{\Delta'}{\Delta'_{11}},$$

или

$$x_{вх} = \frac{1}{\omega}\frac{\Delta'}{\Delta'_{11}},$$

где Δ' и Δ'_{11} вещественны. Элементы, входящие в Δ' и Δ'_{11}, имеют вид

$$\omega^2 L_{ii} - \frac{1}{C_{ii}} \quad \text{и} \quad \omega^2 L_{kq} - \frac{1}{C_{kq}}.$$

Раскрывая Δ' и Δ'_{11} и группируя в них члены с одинаковой степенью ω, получим в числителе и знаменателе полиномы вида

$$x_{вх} = \frac{a_{2n}\omega^{2n} + a_{2n-2}\omega^{2n-2} + \ldots + a_0}{\omega(b_{2n-2}\omega^{2n-2} + b_{2n-4}\omega^{2n-4} + \ldots + b_0)}.$$

Если найти корни полинома числителя $\pm(\omega_1, \omega_3, \ldots, \omega_{2n-1})$ и корни полинома знаменателя $\pm(\omega_2, \omega_4, \ldots, \omega_{2n-2})$, приравнивая соответствующие полиномы к нулю, то можем записать также

$$x_{вх} = \frac{a_{2n}}{b_{2n-2}} \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2)\cdots(\omega^2 - \omega_{2n-1}^2)}{\omega(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2)\cdots(\omega^2 - \omega_{2n-2}^2)}.$$

В цепи, содержащей только реактивные элементы, угол сдвига между напряжением и током может принимать только значения $\varphi = \pm\pi/2$. При резонансе в таких цепях $\varphi = 0$, и поэтому скачкообразное изменение φ от $+\pi/2$ до $-\pi/2$ или от $-\pi/2$ до $+\pi/2$ может происходить только в моменты резонанса в цепи.

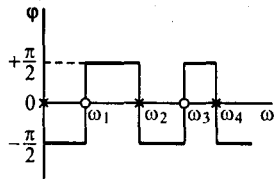


Рис. 6.13

Таким образом, зависимость $\varphi(\omega)$ должна иметь вид, показанный на рис. 6.13.

В точках резонанса $x_{вх} = 0$ или $x_{вх} = \infty$, т. е. для $x_{вх}$ имеем нуль или полюс, аналогично резонансу напряжений или резонансу токов в простейших цепях, рассмотренных в § 6.3, 6.5.

Как будет показано в дальнейшем, *для чисто реактивных цепей $x(\omega)$ всегда возрастает с ростом* ω, т. е.

$$\frac{dx_{вх}}{d\omega} > 0,$$

в справедливости чего для простейших цепей мы убедились ранее. В таком случае *полюсы и нули функции $x_{вх}$ могут только чередоваться.*

Действительно, величина $x_{вх}$, увеличиваясь от $-\infty$ (полюс функции), все время растет, проходит через нуль (нуль функции) и, возрастая все время дальше, достигнет значения $+\infty$ (полюс функции). При переходе частоты через полюс $x_{вх}$ меняет знак, и процесс повторяется.

Если корни числителя и знаменателя $\omega_1, \omega_2, \ldots$ расположить по мере возрастания их значений, то легко заметить, что вследствие чередования нулей и полюсов имеем

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \ldots < \omega_{2n-1}.$$

Из выражения для $x_{вх}$ видно, что полиномы числителя и знаменателя имеют члены, степень ω в которых уменьшается на две единицы и, кроме того, разница в максимальных степенях числителя и знаменателя не превышает единицы. Если все коэффициенты не равны нулю, то степень числителя на единицу выше степени знаменателя. Может оказаться, что $a_{2n} = 0$, но $b_{2n-2} \neq 0$; тогда степень числителя на единицу ниже степени знаменателя. То, что могут существовать только такие варианты, можно понять из следующих соображений. Когда частота ω стремится к бесконечности, сопротивление всех катушек также стремится к бесконечности, а сопротивления всех конденсаторов стремятся к нулю. В зависимости от структуры схемы результат будет тот или иной, а именно: если на пути от одного входного зажима к другому имеется хоть одна цепочка ветвей, состоящая только из конденсаторов, то $x_{вх} \to 0$ при $\omega \to \infty$ (рис. 6.14 и 6.15). Наличие катушек не играет при этом роли, так как их сопротивление стремится к бесконечности. Следовательно, $x_{вх}$ стремится к нулю пропорционально $1/\omega$, т. е. в пределе цепь будет вести себя как емкостное сопротивление. Если в цепи нет такой цепочки конденсаторов и по любому пути от одного зажима к другому встретится хотя бы одна катушка (рис. 6.16 и 6.17), то конденсаторы при $\omega \to \infty$ не играют

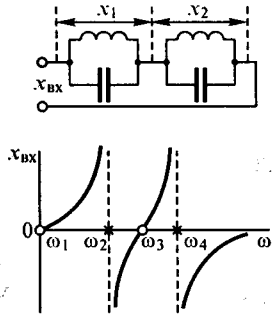


Рис. 6.14

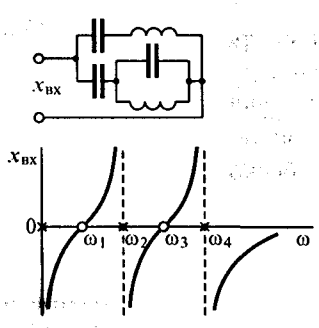


Рис. 6.15

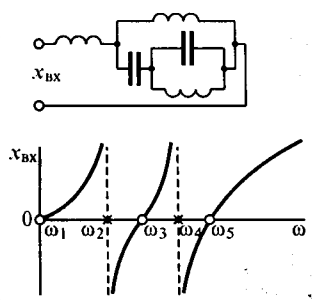


Рис. 6.16

никакой роли, так как сопротивление цепи будет полностью определяться сопротивлением катушки, стремящимся к бесконечности. Следовательно, при

этом $x_{вх}$ стремится к бесконечности пропорционально ω, т. е. в пределе цепь будет вести себя как индуктивное сопротивление. Так как в числителе и знаменателе при $\omega \to \infty$ остаются только члены с высшей степенью ω, то рассмотренные предельные случаи подтверждают сделанное выше заключение о том, что наибольшие степени числителя и знаменателя могут различаться в ту или иную сторону только на единицу.

Приведенные свойства входного реактивного сопротивления цепей, состоящих из чисто реактивных элементов, помогают правильно строить частотные характеристики таких цепей. Примеры частотных характеристик, где показаны все четыре возможных варианта расположения нулей и полюсов при $\omega = 0$ и $\omega = \infty$, приведены на рис. 6.14–6.17.

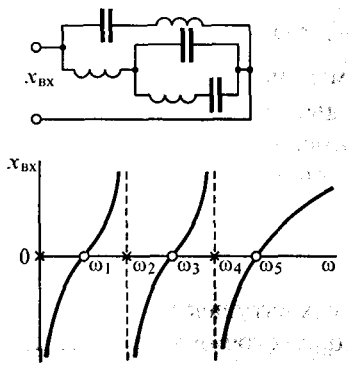


Рис. 6.17

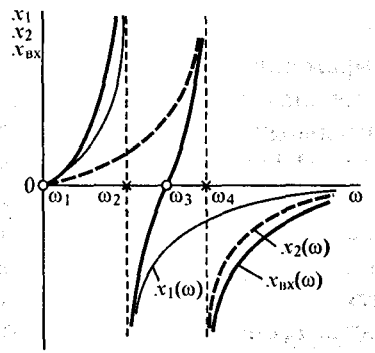


Рис. 6.18

Имея частотные характеристики $x(\omega)$ или $b(\omega)$ отдельных участков цепей, можно графически суммировать $x(\omega)$ ветвей и участков цепи, соединенных последовательно, и $b(\omega)$ ветвей и участков цепи, соединенных параллельно. Пример такого графического построения показан на рис. 6.18 для схемы, приведенной на рис. 6.14.

6.7. Частотные характеристики цепей в общем случае

Полученные в предыдущем параграфе частотные характеристики цепей L, C без потерь могут быть использованы для выяснения характера частотных характеристик реальных электрических цепей при наличии активных сопротивлений. Мы видели (см. § 6.5), что при резонансе токов в случае $g \neq 0$ реактивное сопротивление контура равно нулю, а не бесконечности, как при $g = 0$. Поэтому вид частотных характеристик вблизи резонансных частот, при которых наступает резонанс токов, будет существенно отличаться от вида этих характеристик для случая $g = 0$. Активное сопротивление всей цепи в общем случае оказывается функцией частоты. Все эти обстоятельства осложняют исследование частотных зависимостей. Характер зависимости z, r, x от ω при наличии конечного активного сопротивления при большой добротности элементов цепи показан на рис. 6.19. При этом можно под добротностью катушек при резонансной частоте ω_0 понимать отношение ее индуктивного сопротивления к ее активному сопротивлению, т. е. $Q_L = \omega_0 L / r_L$.

Соответственно, под добротностью конденсатора при частоте ω_0 можно понимать отношение его емкостного сопротивления к его активному сопротивлению, т. е. $Q_C = 1/(\omega_0 C r_C)$.

Общий метод определения резонансных частот остается и в этом случае тем же — необходимо написать выражение для комплексного сопротивления или комплексной проводимости цепи, выделить в них мнимую часть и приравнять к нулю коэффициент при j. Решая эти уравнения, определяем резонансные частоты цепи. Частотные характеристики $z(\omega)$, $\varphi(\omega)$, $r(\omega)$, $x(\omega)$, $g(\omega)$, $b(\omega)$, $y(\omega)$ для заданной цепи взаимосвязаны, и в некоторых случаях достаточно знать лишь одну из перечисленных характеристик, чтобы можно было определить остальные. Этот весьма важный вопрос будет рассмотрен в гл. 11.

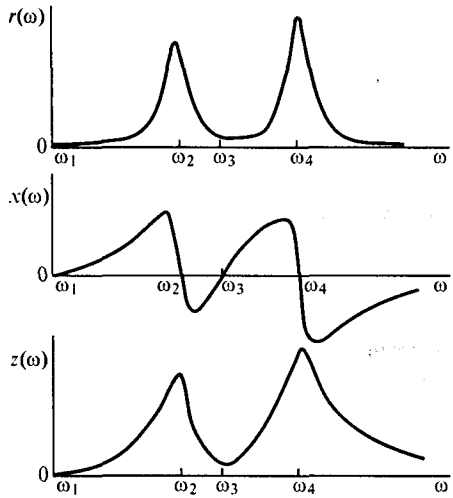


Рис. 6.19

В заключение рассмотрим резонансные явления в цепи, изображенной на рис. 6.20.

Комплексная проводимость этой цепи имеет выражение

$$Y = Y_1 + Y_2 = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{r_1 + j\omega L} + \frac{1}{r_2 - j1/(\omega C)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_1^2 + \omega^2 L^2} + \frac{r_2}{r_2^2 + 1/(\omega^2 C^2)} - j\left(\frac{\omega L}{r_1^2 + \omega^2 L^2} - \frac{1/(\omega C)}{r_2^2 + 1/(\omega^2 C^2)}\right) = g - jb.$$

Условием резонанса будет $b = 0$, откуда найдем

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\left(\frac{L}{C} - r_1^2\right)\Big/\left(\frac{L}{C} - r_2^2\right)}.$$

Представляет интерес частный случай, когда $r_1 = r_2 = r = \sqrt{L/C}$. Разделим числитель и знаменатель первого члена в выражении для b на $\omega^2 LC$. Заметив, что $r_1^2 = r_2^2 = L/C$, получим

$$\frac{\omega L}{r_1^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1/(\omega C)}{1/(\omega^2 C^2) + L/C} = \frac{1/(\omega C)}{1/(\omega^2 C^2) + r_2^2}.$$

При любом значении частоты ω реактивная проводимость равна нулю, т. е. резонанс в цепи имеет место при любой частоте. Нетрудно убедиться, что при этом сопротивление всей цепи остается при всех частотах неизменным и равным r.

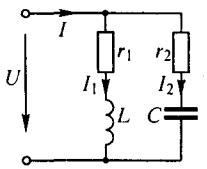


Рис. 6.20

При напряжении на зажимах цепи $u = U_m \sin \omega t$ ток i_1 в катушке равен $i_1 = I_{1m} \sin(\omega t - \varphi_1)$, а ток i_2 в конденсаторе и напряжение u_C на нем равны

$$i_2 = I_{2m}\sin(\omega t - \varphi_2) \quad \text{и} \quad u_C = U_{Cm}\sin(\omega t - \varphi_2 - \pi/2).$$

При $r_1 = r_2 = \sqrt{L/C}$ имеем $\operatorname{tg}\varphi_1 = \omega L/r_1 = \omega\sqrt{LC}$ и

$$\operatorname{tg}\left(\varphi_2 + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\varphi_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{r_2}{1/(\omega C)} = \omega\sqrt{LC}.$$

Следовательно, $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi/2$, и ток в катушке совпадает по фазе с напряжением на конденсаторе, т. е. энергия в катушке и энергия в конденсаторе одновременно достигают максимума и одновременно убывают до нуля. Таким образом, в рассматриваемой цепи при резонансе совсем не совершается обмена энергией между катушкой и конденсатором, а в течение части периода происходит поступление энергии из внешнего источника одновременно в электрическое поле конденсатора и в магнитное поле катушки, а также на выделение теплоты в элементах с сопротивлениями r_1 и r_2. В другую часть периода энергия, возвращаясь одновременно из конденсатора и из катушки, преобразуется в теплоту в элементах с сопротивлениями r_1 и r_2. В то же время энергия продолжает поступать из внешнего источника, причем она также поглощается в виде теплоты в элементах с сопротивлениями r_1 и r_2.

Из этого примера видно, что энергетические процессы при резонансе в сложных цепях протекают значительно сложнее, чем это было в простых цепях с последовательным или параллельным соединением участков, рассмотренных в § 6.2 и 6.4.

Весьма важным является случай, когда в цепи, изображенной на рис. 6.20, можно принять $r_2 = 0$. Это весьма часто встречается в колебательных контурах в радиотехнических устройствах, так как потерями в конденсаторе можно пренебречь по сравнению с активной мощностью в ветви с катушкой.

Из условия $b = 0$ для резонансной частоты получаем $\omega_0 = \sqrt{1/(LC) - r_1^2/L^2}$.

Сопротивление всей цепи при этой частоте оказывается равным

$$r = \frac{1}{g} = \frac{r_1^2 + \omega_0^2 L^2}{r_1} = \frac{L}{r_1 C} = \frac{\rho^2}{r_1} = \rho Q.$$

Последней формулой обычно пользуются для расчета сопротивления такого контура. При большой добротности Q эквивалентное сопротивление контура значительно превосходит его волновое сопротивление ρ.

Рассматриваемая цепь при $r_1 = r_2 = \sqrt{L/C}$ обладает замечательным свойством постоянства активной проводимости, и в ней отсутствует реактивная проводимость при всех частотах, в то время как каждая ветвь этой цепи имеет величины $g_1(\omega)$, $g_2(\omega)$ и $b_1(\omega)$ и $b_2(\omega)$, зависящие от частоты. При данных условиях эти ветви можно называть взаимно дополняющими друг друга цепями.

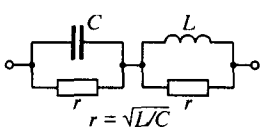


Рис. 6.21

Нетрудно заметить, что дополняющей цепью для цепи с параллельно соединенными участками r и C (рис. 6.21) будет включенная с ней последовательно цепь с параллельно соединенными участками r, L, если обеспечить условие $r_1 = r_2 = r = \sqrt{L/C}$. При этом суммарное сопротив-

ление цепи будет активным, неизменным и равным r на всех частотах. Действительно, свойства всей цепи, изображенной на рис. 6.21, должны быть аналогичными свойствам рассмотренной нами цепи, изображенной на рис. 6.20, так как эти цепи дуальны, что хорошо видно из рис. 6.22.

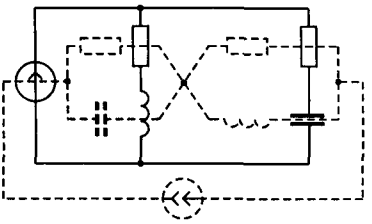


Рис. 6.22

Взаимно дополняющие цепи могут быть использованы для обеспечения неизменности выходного или входного сопротивлений. Для этой цели к заданной цепи необходимо присоединить дополняющую ее цепь.

6.8. Резонанс в индуктивно-связанных контурах

Определим резонансные частоты и частотные характеристики в цепи, изображенной на рис. 6.23. В радиотехнике и в технике связи часто используют явление резонанса в индуктивно-связанных колебательных контурах с большой добротностью. В связи с этим для упрощения расчета пренебрежем активным сопротивлением вторичного контура. Собственные частоты контуров, при которых в них наступает резонанс, в случае отсутствия взаимной индукции равны

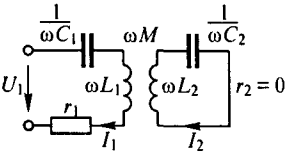


Рис. 6.23

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}.$$

Имеем уравнения рассматриваемой цепи:

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1\left[r_1 + j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)\right] + j\omega M\dot{I}_2;$$

$$-j\omega M\dot{I}_1 = j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)\dot{I}_2.$$

Выражая $\dot{I}_2$ из второго уравнения через $\dot{I}_1$ и подставляя в первое уравнение, получаем

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1\left[r_1 + j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} - \frac{\omega^2 M^2}{\omega L_2 - 1/(\omega C_2)}\right)\right] = \dot{I}_1[r_1 + jx_{1э}].$$

Условием резонанса напряжений будет равенство нулю эквивалентного реактивного сопротивления, т. е. $x_{1э} = 0$, откуда

$$\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right) = \omega^2 M^2.$$

Разделив на $(\omega L_1 \omega L_2)$ обе части этого выражения, получим

$$(1 - \omega_1^2/\omega^2)(1 - \omega_2^2/\omega^2) = k^2,$$

где $k^2 = M^2/(L_1 L_2)$ есть квадрат коэффициента связи, причем $k^2 < 1$.

Решая это уравнение относительно ω, найдем частоты ω_0' и ω_0'', отвечающие резонансу напряжений, из выражения

$$\omega_{рез} = \sqrt{\frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2) \mp \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4(1-k^2)\omega_1^2\omega_2^2}}{2(1-k^2)}},$$

где $\omega_{рез}$ равна либо ω_0', либо ω_0''.

Если оба контура предварительно были настроены на одну частоту $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$, то частоты ω_0' и ω_0'' находятся из выражения $\omega_{рез} = \omega_0\sqrt{(1 \mp k)(1-k^2)}$, т. е. они оказываются равными

$$\omega_0' = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}; \quad \omega_0'' = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}},$$

причем $\omega_0' < \omega_0 < \omega_0''$.

При частотах ω_0' и ω_0'' сопротивление цепи оказывается минимальным и равным r_1, а ток I_1 достигает максимальных значении: $I_1 = U_1/r_1$.

При $\omega = \omega_0$ имеем $x_{1э} = \infty$ и ток $I_1 = 0$. Это можно пояснить следующим образом: при частоте ω_0 имеет место резонанс во вторичном контуре $x_2 = \omega L_2 - 1/(\omega C_2) = 0$, и при условии $r_2 = 0$ получается $z_2 = 0$. Как видно из уравнения для второго контура, при конечном значении тока $\dot{I}_2$ ЭДС взаимной индукции $-j\omega M\dot{I}_1$ должна быть равна нулю, т. е. $I_1 = 0$. Ток $\dot{I}_2$ устанавливается таким, чтобы ЭДС взаимной индукции $-j\omega M\dot{I}_2$ со стороны второго контура уравновесила приложенное к первому контуру напряжение, что видно из первого уравнения при $I_1 = 0$. Этот случай по своему характеру аналогичен резонансу токов в контуре без потерь.

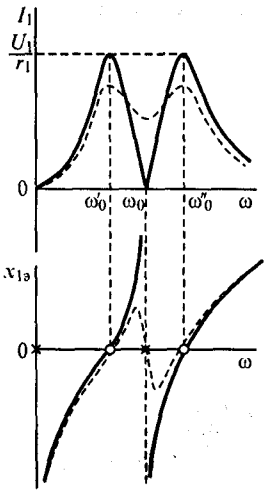


Рис. 6.24

На рис. 6.24 представлена частотная характеристика $I_1(\omega)$ при $U_1 = \text{const}$, а также частотная характеристика $x_{1э}(\omega)$. Полюсами функции $x_{1э}(\omega)$ являются частоты $\omega = 0$, $\omega = \omega_0$ и $\omega = \infty$. Ее нулями являются частоты $\omega = \omega_0'$ и $\omega = \omega_0''$. В соответствии со сказанным в предыдущем параграфе во всем диапазоне частот соблюдается условие $dx_{1э}/d\omega > 0$ и полюсы и нули чередуются. Штриховыми линиями показаны частотные характеристики при $r_2 \neq 0$.

Таким образом, резонансная кривая $I_1 = F_1(\omega)$ цепи, состоящей из двух связанных контуров с малым затуханием, имеет два максимума и один минимум.

6.9. Практическое значение явления резонанса в электрических цепях

Явление резонанса в электрических цепях весьма широко используется в современной электротехнике, и особенно в технике высокой частоты.

Генераторы высокой частоты, применяемые в радиотехнике, содержат в себе в качестве основного элемента колебательный контур, колебания тока и напря-

жения в котором происходят с резонансной частотой или с частотой, весьма близкой к резонансной. Антенны передающих и приемных радиостанций вместе с включенными в их цепь катушками или конденсаторами также представляют собой колебательные контуры, настраиваемые в резонанс с частотой колебаний тока в ламповом генераторе передающей станции и с частотой колебаний напряженностей поля в электромагнитной волне приемной станции. Радиоприемники содержат в себе настраиваемые в резонанс колебательные контуры. Настройка в резонанс на частоту одной из передающих радиостанций колебательных контуров в радиоприемнике, в том числе и контура антенны, обеспечивает возможность выделить в приемнике эту передающую радиостанцию из числа многих работающих одновременно.

Применение этой же идеи в проволочной междугородной телефонной связи позволяет осуществить так называемую многократную телефонию, т. е. передать по одной паре проводов одновременно несколько разговоров. При этом на конечных пунктах те или иные колебания выделяются с помощью резонансных устройств и подаются к соответствующим приемникам.

В таких случаях эти устройства несколько усложняются по сравнению с рассмотренными ранее простейшими цепями, так как здесь ставится более сложная задача — выделить целую полосу частот, отвечающих диапазону частот звуковых колебаний. Обычно каждому телефонному разговору, так же как каждой передающей станции при радиопередаче, отвечает определенная высокая частота, называемая несущей частотой. На колебания тока с этой частотой накладываются колебания со звуковой частотой. Этот процесс, называемый модуляцией колебаний, будет в дальнейшем рассмотрен подробно. Сейчас существенно отметить, что около каждой несущей частоты образуется полоса частот, отвечающая диапазону частот звуковых колебаний, и оконечные устройства в телефонной передаче должны выделять определенную полосу частот, прилегающую к той или иной несущей частоте. Такие устройства называют электрическими фильтрами. В дальнейшем ознакомимся с принципом их устройства и работы.

В радиоприемных устройствах точно так же существенно обеспечить пропускание и усиление в одинаковой мере всей полосы частот, соответствующей диапазону звуковых частот, чтобы не было искажения передачи. С этой целью может быть использована система из двух связанных контуров, имеющая резонансную кривую, показанную на рис. 6.24. Подбирая надлежащим образом коэффициент связи и затухание контура, можно получить кривую с малым изменением тока — в пределах изменения частоты от ω_0' до ω_0'' и с крутыми спадами за пределами этого диапазона частоты.

Явление резонанса используется в радиотехнике для измерения частоты колебаний или отвечающей ей длины электромагнитной волны с помощью измерительных приборов, называемых волномерами. Волномер содержит колебательный контур с градуированными индуктивной катушкой и конденсатором и прибором, указывающим ток в контуре. Колебательный контур волномера связывается индуктивно с контуром устройства, в котором необходимо измерить частоту тока. При плавном изменении емкости волномера добиваются максимума тока в контуре волномера и по значению индуктивности и емкости контура волномера судят о частоте.

Явление резонанса широко используется и в других электроизмерительных устройствах, а также в устройствах электроавтоматики.

Компенсация отстающей реактивной составляющей тока в мощных приемных устройствах электроэнергетических систем с помощью подключаемых параллельно этим устройствам конденсаторов или перевозбужденных синхронных двигателей, по сути дела, также представляет собой мероприятие, при котором достигается резонанс. Но в этом случае явление резкого уменьшения общего тока по сравнению с токами в отдельных ветвях, характерное для резонанса в контурах с малыми потерями энергии, не имеет места, так как эквивалентная активная проводимость таких устройств велика по сравнению с их эквивалентной индуктивной проводимостью.

Все перечисленные примеры относятся к случаям, когда явление резонанса в электрической цепи используется для практических целей. Однако в тех случаях, когда явление резонанса в электрической цепи возникает, не будучи специально предусмотренным, оно может привести к нежелательным последствиям. Особенно опасен в этом отношении резонанс при последовательном соединении индуктивных и емкостных элементов цепи при малом активном сопротивлении ее, так как при этом на индуктивных и емкостных элементах могут появиться весьма высокие напряжения. Подобные явления могут, например, возникнуть при подключении к зажимам генератора или трансформатора длинной линии передачи или кабеля, не замкнутых на другом их конце на приемник энергии. Генератор и трансформатор обладают индуктивностью, а линия и кабель обладают емкостью и индуктивностью. При отсутствии активной нагрузки на конце линии затухание такой цепи невелико, и легко могут появиться перенапряжения, если частота близка к резонансной. Следует отметить, что резонанс в подобных цепях может возникнуть и не для основной гармоники, а для высших гармонических, если они содержатся в кривой ЭДС генератора или в кривой приложенного к зажимам цепи напряжения.

Глава седьмая

Расчет трехфазных цепей

7.1. Многофазные цепи и системы и их классификация

Многофазной системой электрических цепей называют совокупность электрических цепей, в которых действуют синусоидальные ЭДС одной и той же частоты, сдвинутые друг относительно друга по фазе и создаваемые общим источником электрической энергии. Отдельные электрические цепи, входящие в состав многофазной электрической цепи, называются фазами. Число фаз многофазной системы цепей будем обозначать через m.

Обычно электрические цепи, образующие многофазную систему цепей, тем или иным способом электрически соединяют друг с другом. При этом многофазную систему электрических цепей будем кратко называть многофазной цепью. В частности, при $m = 3$ имеем трехфазную цепь.

Совокупность ЭДС, действующих в фазах многофазной цепи, а также совокупность токов и напряжений в многофазной цепи называют многофазной системой, соответственно, ЭДС, токов и напряжений.

Трехфазные генераторы выполняют так, как это изложено в § 4.1. На рис. 4.2 и 4.3 в пазах статора показаны сечения проводов, принадлежащих обмотке одной фазы. Обмотки двух других фаз располагают в свободных пазах так, что оси всех трех обмоток в двухполюсной машине составляют друг с другом угол $2\pi/3$, а при числе пар полюсов, равном p, — угол $2\pi/(3p)$.

Рассмотрим основные признаки классификации многофазных систем ЭДС, напряжений и токов.

Различают системы симметричные и несимметричные.

Симметричной называют многофазную систему ЭДС, в которой ЭДС в отдельных фазах равны по амплитуде и отстают по фазе друг относительно друга на углы, равные $q \cdot 2\pi/m$, где q — любое целое число.

Для трехфазной цепи ($m = 3$) при $q = 1$ получаем систему трех равных по амплитуде ЭДС, сдвинутых друг относительно друга на угол $2\pi/3$ (рис. 7.1, *а*):

$$e_1 = E_m \sin(\omega t + \psi); \quad e_2 = E_m \sin(\omega t + \psi - 2\pi/3);$$

$$e_3 = E_m \sin(\omega t + \psi - 4\pi/3).$$

Соответственно, для действующих ЭДС в комплексной форме можем написать

$$\dot{E}_1 = E_1 e^{j\psi}; \quad \dot{E}_2 = \dot{E}_1 e^{-j\frac{2\pi}{3}}; \quad \dot{E}_3 = \dot{E}_1 e^{-j\frac{4\pi}{3}}.$$

Обозначим $e^{j\frac{2\pi}{3}} = a$. Имеем

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad a^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$a^3 = e^{j2\pi} = 1; \quad a^4 = a \quad \text{и} \quad 1 + a + a^2 = 0.$$

Соответственно, симметричную трехфазную систему ЭДС можно записать в виде

$$\dot{E}_1;\quad \dot{E}_2 = a^2\dot{E}_1;\quad \dot{E}_3 = a\dot{E}_1,$$

так как

$$e^{-j\frac{2\pi}{3}} = e^{j\frac{4\pi}{3}} = a^2 \quad \text{и} \quad e^{-j\frac{4\pi}{3}} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = a.$$

Как видно из рис. 7.1, *а*, ЭДС в фазах проходят через максимум в порядке номеров фаз (1, 2, 3, 1, 2, 3, ...). Такую систему называют симметричной системой прямой последовательности.

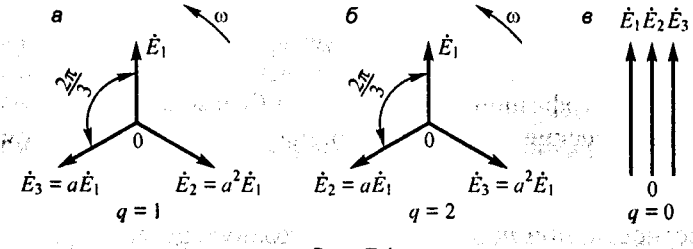


Рис. 7.1

Приняв $q = 2$, получим симметричную систему обратной последовательности (рис. 7.1, *б*), в которой ЭДС проходят через максимум в обратном порядке номеров фаз (1, 3, 2, 1, 3, 2, ...). Ее можно написать в виде

$$\dot{E}_1;\quad \dot{E}_2 = a\dot{E}_1;\quad \dot{E}_3 = a^2\dot{E}_1.$$

Приняв $q = 0$, получим симметричную систему нулевой последовательности (рис. 7.1, *в*), в которой все три ЭДС проходят через максимум одновременно. Ее можно записать в виде

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_2 = \dot{E}_3.$$

Отметим важное положение, что для симметричной системы с прямой или обратной последовательностью сумма ЭДС во всех фазах равна нулю: $\sum_{k=1}^{m}\dot{E}_k = 0$.

Все сказанное выше относится в равной степени к симметричным системам напряжений или токов.

Несимметричными системами называют многофазные системы, не удовлетворяющие указанным условиям симметрии.

Нередко фазы обозначают буквами *A*, *B*, *C* или *a*, *b*, *c*. В таком случае при прямом следовании ЭДС в фазах проходят через максимум в порядке букв алфавита (*A*, *B*, *C*, *A*, *B*, *C*, ...).

Другим важным признаком классификации является зависимость или независимость мгновенной мощности многофазной системы от времени. Уравновешенными называют многофазные системы, мгновенная мощность которых не зависит от времени, и неуравновешенными — системы, мгновенная мощность которых является функцией времени.

Уравновешенность является весьма важным качеством многофазной системы. Так, например, момент на валу многофазного генератора при этом остается постоянным, а не пульсирует с частотой 2ω, как это имело бы место в однофазном генераторе, мгновенная мощность которого, как мы видели в § 4.7, изменя-

ется с частотой 2ω. Покажем, что многофазная система при симметрии ЭДС и при равномерной нагрузке фаз, т. е. при симметрии также и токов, является уравновешенной, если число фаз m больше двух ($m > 2$). Для мгновенной мощности в k-фазе имеем выражение

$$p_k = e_k i_k = \sqrt{2}E\sin\left[\omega t - (k-1)\frac{2\pi}{m}\right]\sqrt{2}\,I\sin\left[\omega t - (k-1)\frac{2\pi}{m} - \varphi\right] =$$

$$= EI\cos\varphi - EI\cos\left[2\omega t - 2(k-1)\frac{2\pi}{m} - \varphi\right].$$

Сумма мгновенных мощностей во всех фазах равна $p = \sum_{k=1}^{m} p_k$. Сумма вторых членов в выражении для p_k равна нулю при $m > 2$, так как, изображая слагаемые этой суммы векторами, получим симметричную звезду. Таким образом, при $m > 2$ мгновенная мощность всей многофазной системы оказывается равной

$$p = \sum_{k=1}^{m} EI\cos\varphi = mEI\cos\varphi = P = \text{const},$$

т. е. не зависит от времени, и, следовательно, система уравновешена. Заметим, что при несимметрии ЭДС можно так подобрать неравномерную нагрузку фаз, что система также будет уравновешенной. Но при этом может оказаться, что в отдельных фазах получим отрицательные активные сопротивления приемника, т. е. в этих фазах приемника необходимо включить источники энергии. Отметим, что нашедшая на практике применение двухфазная несимметричная система ЭДС со сдвигом фаз $\pi/2$, как нетрудно показать, уравновешена при равномерной нагрузке фаз.

Перейдем теперь к вопросу о соединении многофазных цепей. Основными видами соединения являются *соединение многоугольником и соединение звездой.* Рассмотрим эти виды соединения для наиболее важного случая — для трехфазной системы.

На рис. 7.2 показан способ связывания фаз трехфазного генератора и приемника *звездой.* При этом начала обмоток фаз генератора объединяются в нейтральную точку 0 генератора. Провод, соединяющий нейтральные точки 0 генератора и 0′ приемника, называют нейтральным проводом, а провода, идущие от концов фаз генератора к приемнику, — линейными проводами. Иногда соединение в виде звезды для трехфазной системы называют Y-соединением.

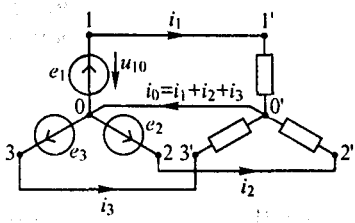


Рис. 7.2

Ток в нейтральном проводе при симметрии токов в фазах равен нулю, и этот провод в таком случае можно было бы удалить. Поэтому при симметрии токов достаточно трех линейных проводов. В этом заключается достоинство соединения звездой, так как при отсутствии соединения между собой фаз потребовалось бы для каждой фазы иметь пару проводов — всего шесть. При несимметрии токов в фазах по нейтральному проводу протекает ток i_0, амплитуда которого

обычно меньше амплитуды токов в линейных проводах. Поэтому сечение нейтрального провода, учитывая возможную несимметрию токов, достаточно взять несколько меньшим сечения линейных проводов.

На рис. 7.3 показано соединение фаз генератора и приемника *треугольником*. При этом в генераторе конец обмотки каждой фазы соединяется с началом обмотки следующей фазы. Иногда соединение треугольником называют Δ-соединением. Так как при симметрии ЭДС сумма фазных ЭДС равна нулю, то при таком соединении при отсутствии токов i_1, i_2, i_3, уходящих в приемник, токи в обмотках генератора равны нулю. Такой метод соединения дает также экономию в проводах, поскольку используются только три провода. Заметим, что способы соединения генератора и приемника независимы друг от друга, если нет нейтрального провода.

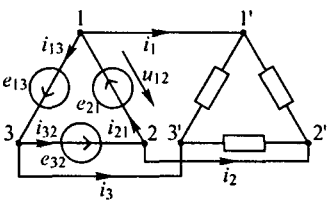


Рис. 7.3

Напряжения на зажимах отдельных фаз генератора или приемника называют фазными напряжениями, напряжения между линейными проводами — линейными напряжениями. Токи в фазах генератора или приемника называют фазными токами, токи в линейных проводах — линейными токами.

Будем приписывать фазным величинам индекс «ф», а линейным — индекс «л».

Рекомендуется выбирать положительные направления ЭДС, напряжений и токов так, чтобы соблюдалась определенная симметрия. Этому удовлетворяет, например, выбор положительных направлений токов и напряжений, указанных на рис. 7.2 и 7.3. В таком случае, как видно из рис. 7.2, при соединении звездой линейные токи равны соответствующим фазным токам, а линейные напряжения равны разностям соответствующих фазных напряжений:

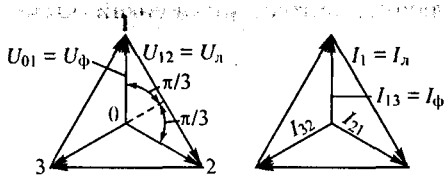


Рис. 7.4

$$u_{12} = u_{10} + u_{02} = u_{02} - u_{01};\quad u_{23} = u_{03} - u_{02};\quad u_{31} = u_{01} - u_{03}.$$

При соединении треугольником (рис. 7.3), наоборот, линейные напряжения равны соответствующим фазным напряжениям, а линейные токи равны разностям соответствующих фазных токов:

$$i_1 = i_{21} - i_{13};\quad i_2 = i_{32} - i_{21};\quad i_3 = i_{13} - i_{32}.$$

При синусоидальных токах и напряжениях для комплексных линейных напряжений при соединении звездой получим

$$\dot{U}_{12} = \dot{U}_{02} - \dot{U}_{01};\quad \dot{U}_{23} = \dot{U}_{03} - \dot{U}_{02};\quad \dot{U}_{31} = \dot{U}_{01} - \dot{U}_{03}$$

и для комплексных линейных токов при соединении треугольником

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{21} - \dot{I}_{13};\quad \dot{I}_2 = \dot{I}_{32} - \dot{I}_{21};\quad \dot{I}_3 = \dot{I}_{13} - \dot{I}_{32}.$$

В частном случае, когда системы напряжений и токов симметричны (рис. 7.4), имеем:

при соединении звездой

$$I_л = I_ф;\quad U_л = \sqrt{3}U_ф;$$

при соединении треугольником

$$U_л = U_ф; \quad I_л = \sqrt{3} I_ф.$$

Пользуясь полученными соотношениями, находим выражение для мощности трехфазной системы при симметрии и системы токов, и системы напряжений, справедливое как для соединения звездой, так и для соединения треугольником:

$$P = 3U_ф I_ф \cos\varphi = \sqrt{3} U_л I_л \cos\varphi.$$

Аналогично, для реактивной мощности получим

$$Q = 3U_ф I_ф \sin\varphi = \sqrt{3} U_л I_л \sin\varphi.$$

7.2. Расчет трехфазной цепи в общем случае несимметрии ЭДС и несимметрии цепи

Расчет трехфазной цепи может быть произведен любым изложенным в гл. 5 методом, так как трехфазная цепь представляет собой частный случай сложной цепи, в которой действует несколько источников ЭДС, поскольку каждый трехфазный генератор можно рассматривать как три источника фазных ЭДС.

Рассмотрим в виде примера расчет цепи, изображенной на рис. 7.5, причем для общности предположим, что как цепь, так и система ЭДС несимметричны. Так как цепь имеет только два узла, то естественно воспользоваться методом узловых напряжений. Узловое напряжение между узлами 0 и 0′ будет определяться из формулы

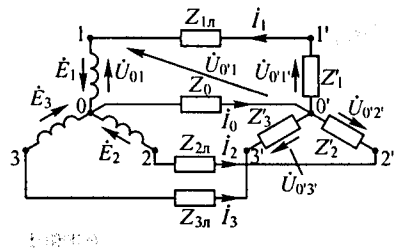


Рис. 7.5

$$\dot{U}_{00'}(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_0) = \dot{\mathfrak{I}}_1 + \dot{\mathfrak{I}}_2 + \dot{\mathfrak{I}}_3,$$

где

$$Y_1 = \frac{1}{Z_{1л} + Z'_1}; \quad Y_2 = \frac{1}{Z_{2л} + Z'_2}; \quad Y_3 = \frac{1}{Z_{3л} + Z'_3}; \quad Y_0 = \frac{1}{Z_0}$$

являются проводимостями ветвей, а

$$\dot{\mathfrak{I}}_1 = \dot{E}_1 Y_1; \quad \dot{\mathfrak{I}}_2 = \dot{E}_2 Y_2; \quad \dot{\mathfrak{I}}_3 = \dot{E}_3 Y_3.$$

Получаем

$$\dot{U}_{00'} = \frac{\dot{E}_1 Y_1 + \dot{E}_2 Y_2 + \dot{E}_3 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_0}.$$

При этом расчете предполагалось, что сопротивления фазных обмоток генератора равны нулю. Если этого условия нет, то эти сопротивления должны быть учтены в величинах $Z_{1л}$, $Z_{2л}$, $Z_{3л}$.

При отсутствии сопротивлений обмоток ЭДС генератора равны фазным напряжениям на его зажимах, т. е.

$$\dot{E}_1 = \dot{U}_{01}; \quad \dot{E}_2 = \dot{U}_{02}; \quad \dot{E}_3 = \dot{U}_{03},$$

и полученную формулу можно записать в виде

$$\dot{U}_{00'} = \frac{\dot{U}_{01}Y_1 + \dot{U}_{02}Y_2 + \dot{U}_{03}Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_0}.$$

Теперь легко находятся токи во всех проводах:

$$\dot{I}_0 = \dot{U}_{00'}Y_0; \quad \dot{I}_1 = (\dot{U}_{01} - \dot{U}_{00'})Y_1; \quad \dot{I}_2 = (\dot{U}_{02} - \dot{U}_{00'})Y_2; \quad \dot{I}_3 = (\dot{U}_{03} - \dot{U}_{00'})Y_3.$$

При отсутствии нейтрального провода следует принять $Y_0 = 0$ и воспользоваться той же формулой для напряжения $\dot{U}_{00'}$.

Если заданными являются линейные напряжения на зажимах генератора и отсутствует нейтральный провод, то можно воспользоваться найденной формулой, поступив следующим образом. Поскольку положение точки 0 генератора может быть произвольным, то совместим ее с точкой *1* (рис. 7.5). При этом $\dot{U}_{01} = \dot{U}_{11} = 0$, а $\dot{U}_{02} = \dot{U}_{12}$ и, соответственно, $\dot{U}_{03} = \dot{U}_{13} = -\dot{U}_{31}$ представляют собой два заданных линейных напряжения. Третье линейное напряжение определяется через них, так как $\dot{U}_{12} + \dot{U}_{23} + \dot{U}_{31} = 0$. Подставляя указанные величины в формулу для $\dot{U}_{00'} = \dot{U}_{10'}$, получаем

$$\dot{U}_{10'} = \frac{\dot{U}_{12}Y_2 - \dot{U}_{31}Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}.$$

Отсюда находится ток $\dot{I}_1 = \dot{U}_{10'}Y_1$. Аналогично получаются остальные токи, если последовательно совмещать точку 0 с точками *2* и *3* и находить напряжения $\dot{U}_{20'}$ и $\dot{U}_{30'}$.

Если приемник соединен треугольником (рис. 7.6), то, преобразуя его в эквивалентное соединение звездой, приводим задачу к предыдущей при отсутствии нейтрального провода. Определив рассмотренным методом токи в линейных проводах, нетрудно найти фазные напряжения приемника в эквивалентной звезде и получить линейные напряжения на приемнике $\dot{U}_{1'2'}, \dot{U}_{2'3'}, \dot{U}_{3'1'}$ как разность фазных, например $\dot{U}_{1'2'} = \dot{U}_{0'2'} - \dot{U}_{0'1'}$.

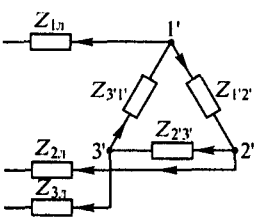


Рис. 7.6

При изображении напряжений в рассматриваемой цепи с помощью векторов целесообразно пользоваться так называемой топографической диаграммой. Особенностью этой диаграммы является то, что каждой точке электрической цепи соответствует определенная точка на плоскости диаграммы. Расположение этих точек на диаграмме должно быть таким, чтобы напряжение между двумя любыми точками электрической цепи изображалось вектором, соединяющим соответствующие точки.

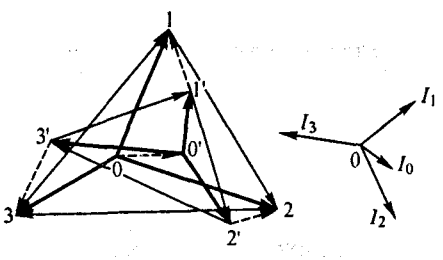


Рис. 7.7

На рис. 7.7 изображена топографическая диаграмма напряжений для цепи, приведенной на рис. 7.5. Жирными линиями показаны векторы фазных напряжений генератора и приемника. Тонкими линиями изображены векторы линейных напряжений генератора и приемника, образующие треугольники этих напряжений, и штриховыми линиями показаны векторы падений напряжений в линейных проводах и в нейтральном проводе. Рядом с топографи-

ческой диаграммой показаны векторы тока, ориентированные соответственно направлению векторов напряжения на топографической диаграмме. При построении предполагалось, что как сопротивления проводов, так и сопротивления фаз приемника носят индуктивный характер. Топографическая диаграмма дает наглядное представление о значении и фазе напряжения между любыми двумя точками цепи.

Если между проводами или между фазами приемника имеется взаимная индукция, она может быть учтена с помощью метода, изложенного в § 5.18. Учет наличия взаимной индукции между проводами необходим в длинных линиях передачи или при очень больших токах даже в коротких проводах, подводящих ток к мощным приемникам, например к трехфазным электрическим печам. При несимметричном расположении проводов взаимная индуктивность между ними различна для разных пар проводов, что приводит к своеобразному явлению переноса мощности из одной фазы в другую. Учет наличия взаимной индукции между проводами трехфазной линии и рассмотрение связанных с ней явлений будут даны в последней части курса при изложении метода расчета параметров трехфазной линии. Явление взаимной индукции между фазами трехфазной цепи должно быть учтено также при наличии в цепи трехфазных электрических машин или трехфазных трансформаторов, в которых взаимная индукция между фазными обмотками осуществляется через общую магнитную цепь. У электрических машин явление осложняется еще и тем, что в машине имеется вращающаяся часть — ротор. Все эти вопросы будут рассмотрены в конце настоящей главы при изложении так называемого метода симметричных составляющих трехфазной системы.

7.3. Получение вращающегося магнитного поля

Большим достоинством многофазных, в частности трехфазных, систем является легкость получения вращающегося магнитного поля. Это дает возможность создания большого класса трехфазных электрических машин переменного тока — генераторов и двигателей. На рис. 7.8 схематически изображены статор и ротор трехфазной машины с одной парой полюсов на фазу. В пазах статора условно в виде одного витка в каждом пазу показаны обмотки первой, второй и третьей фаз. Место, занимаемое обмоткой первой фазы, отмечено римскими цифрами I и I′ около фигурных скобок. Положительное направление тока i_1 в этой обмотке указано крестиками и точками. В таком случае положительное направление магнитной оси этой обмотки оказывается идущим по вертикали вверх, что отмечено стрелкой с цифрой *1*. Расположение обмоток второй и третьей фаз видно из рисунка. Магнитные оси обмоток смещены друг относительно друга на пространственный угол $2\pi/3$. На рисунке показана картина магнитного поля, созданного током i_1 первой обмотки. Магнитные линии замыкаются по пути, проходящему в теле ротора, в воздушном зазоре между ротором и статором и в статоре. Магнитное сопротивление определяется

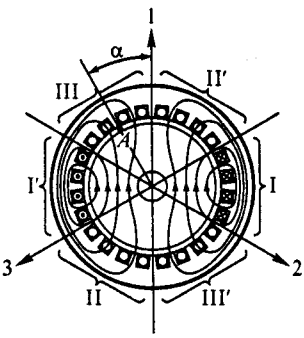


Рис. 7.8

в основном воздушным зазором, так как путь потока в статоре и роторе расположен в ферромагнитном материале. В таком случае распределение магнитной индукции в воздушном зазоре вдоль окружности статора имеет вид, показанный на рис. 7.9.

На рис. 7.9 окружность вдоль воздушного зазора распрямлена. Положение точки A в зазоре, в которой ищем индукцию, определим углом α, отсчитываемым против часовой стрелки от магнитной оси первой обмотки. Распределение индукции носит ступенчатый характер вследствие наличия зубцов. Индукция остается практически постоянной вдоль всего полюса данной обмотки, поскольку для всех трубок магнитной индукции равного сечения в воздушном зазоре будут одно и то же магнитное сопротивление и одна и та же МДС. Индукция спадает вдоль каждого паза, поскольку здесь убывает МДС.

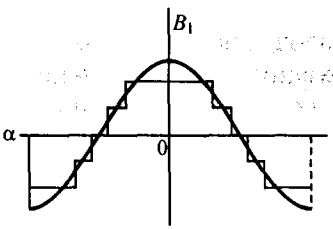


Рис. 7.9

Так как индукция в воздушном зазоре $B(\alpha)$ является периодической функцией угла α, то ее можно разложить в ряд Фурье и выделить первую пространственную гармонику, которая также изображена на рис. 7.9. В дальнейшем будем интересоваться только этой первой гармоникой индукции. Пусть ток в первой обмотке меняется во времени по закону $i_1 = I_m \cos \omega t$. Поскольку мы пренебрегли магнитными сопротивлениями ферромагнитных частей машины, то магнитное сопротивление не зависит от тока, и поэтому магнитная индукция будет изменяться пропорционально току. На основании всего сказанного можем для магнитной индукции в зазоре в точке A в момент времени t написать выражение

$$B_1 = B_m \cos \omega t \cos \alpha.$$

Пусть токи в обмотках образуют симметричную систему прямого следования, т. е. $i_2 = I_m \cos(\omega t - 2\pi/3)$ и $i_3 = I_m \cos(\omega t - 4\pi/3)$. Так как обмотки смещены в пространстве друг относительно друга на угол $2\pi/3$, то та же точка A смещена по отношению к оси второй обмотки на угол $\alpha + 2\pi/3$ и по отношению к оси третьей обмотки — на угол $\alpha + 4\pi/3$. Поэтому составляющие индукции в той же точке A и в тот же момент времени t, созданные токами i_2 и i_3 в других обмотках, будут

$$B_2 = B_m \cos(\omega t - 2\pi/3)\cos(\alpha + 2\pi/3);$$
$$B_3 = B_m \cos(\omega t - 4\pi/3)\cos(\alpha + 4\pi/3).$$

Вследствие уже принятого допущения о независимости магнитного сопротивления от намагничивающего тока можем воспользоваться принципом наложения и считать, что результирующая индукция в точке A в момент t есть сумма индукций, созданных токами в отдельных обмотках, т. е.

$$B = B_1 + B_2 + B_3.$$

Преобразуя произведение косинусов в полусуммы косинусов разности аргументов и косинусов суммы аргументов, получаем

$$B = \frac{B_m}{2}\left[3\cos(\omega t+\alpha)+\cos(\omega t-\alpha)+\cos\left(\omega t-\alpha-\frac{4\pi}{3}\right)+\cos\left(\omega t-\alpha-\frac{8\pi}{3}\right)\right]=$$

$$=\frac{3}{2}B_m\cos(\omega t+\alpha).$$

Пусть точка A перемещается в отрицательную сторону отсчета углов с угловой скоростью ω, т. е. $\alpha = -\omega t + \alpha_0$. В этой перемещающейся точке имеем

$$B=\frac{3}{2}B_m\cos(\omega t+\alpha)=\frac{3}{2}B_m\cos\alpha_0=\text{const}.$$

Так как в каждой неподвижной точке индукция меняется во времени, то полученный результат означает, что найденное значение индукции перемещается вместе с точкой A вдоль окружности зазора. Таким образом, результирующее магнитное поле вращается с постоянной угловой скоростью ω по часовой стрелке, причем вдоль окружности статора индукция распределена по косинусоидальному закону с амплитудой $\frac{3}{2}B_m$. Такое поле называют *круговым вращающимся полем*. Для изменения направления вращения поля необходимо изменить порядок следования фаз токов в обмотках статора.

В пазы ротора обычно укладывают обмотку, в которой вращающееся магнитное поле статора индуцирует токи, и взаимодействие токов ротора и статора создает вращающий момент.

Заметим, что магнитное поле, созданное током только в одной первой обмотке, называемое *пульсирующим*, можно условно рассматривать как два вращающихся в противоположные стороны с угловой скоростью ω, так как

$$B_1 = B_m\cos\omega t\cos\alpha=\frac{B_m}{2}\cos(\omega t+\alpha)+\frac{B_m}{2}\cos(\omega t-\alpha).$$

7.4. Разложение несимметричных трехфазных систем на симметричные составляющие

Любую несимметричную трехфазную систему ЭДС, напряжений или токов можно представить в виде суммы в общем случае трех симметричных трехфазных систем: нулевой, прямой и обратной последовательности, которые называют *симметричными составляющими* данной *несимметричной трехфазной системы*.

Рассмотрим, например, несимметричную трехфазную систему ЭДС $\dot{E}_A$, $\dot{E}_B$ и $\dot{E}_C$ (рис. 7.10). Фазы будем обозначать буквами A, B и C, так как цифровые индексы 0, 1 и 2 теперь будут заняты для обозначения симметричных составляющих. Представим ЭДС $\dot{E}_A$, $\dot{E}_B$ и $\dot{E}_C$ в каждой фазе в виде суммы трех слагаемых и подчиним эти слагаемые условиям, чтобы первые из них образовывали в трех фазах симметричную систему нулевой последовательности ($\dot{E}_0$, $\dot{E}_0$, $\dot{E}_0$), вторые — симметричную систему прямой последовательности ($\dot{E}_1$, $a^2\dot{E}_1$, $a\dot{E}_1$) и третьи — симметричную систему обратной последовательности ($\dot{E}_2$, $a\dot{E}_2$, $a^2\dot{E}_2$).

Получаем

$$\left.\begin{aligned}\dot{E}_A &= \dot{E}_0 + \dot{E}_1 + \dot{E}_2;\\ \dot{E}_B &= \dot{E}_0 + a^2\dot{E}_1 + a\dot{E}_2;\\ \dot{E}_C &= \dot{E}_0 + a\dot{E}_1 + a^2\dot{E}_2.\end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

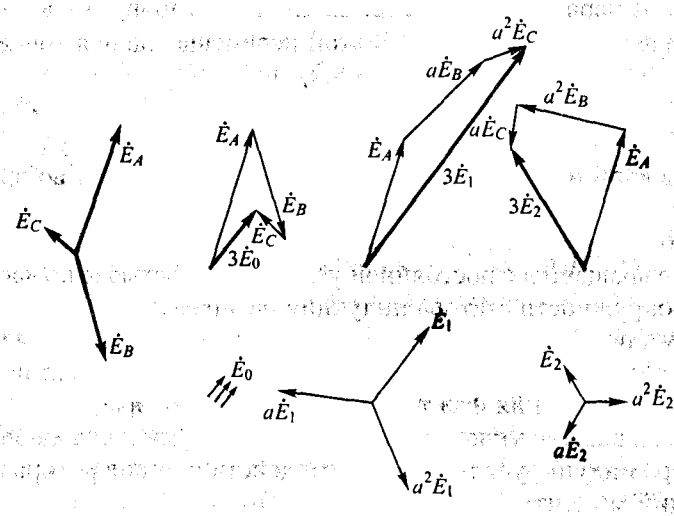


Рис. 7.10

Через a обозначим, как и в § 7.1, комплексный множитель $a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$, умножение на который комплексного числа соответствует увеличению аргумента этого комплексного числа на величину $2\pi/3$, т. е. увеличению начальной фазы соответствующей синусоидальной величины на угол $2\pi/3$.

Термин «симметричные составляющие» относят не только к симметричным системам $\dot{E}_0$, $\dot{E}_0$, $\dot{E}_0$, $\dot{E}_1$, $a^2\dot{E}_1$, $a\dot{E}_1$ и $\dot{E}_2$, $a\dot{E}_2$, $a^2\dot{E}_2$, но и к основным комплексным величинам $\dot{E}_0$, $\dot{E}_1$ и $\dot{E}_2$ этих систем, на которые раскладывается ЭДС $\dot{E}_A$ в фазе A.

Из уравнений (*) легко выразить симметричные составляющие $\dot{E}_0$, $\dot{E}_1$ и $\dot{E}_2$ через заданные комплексные ЭДС $\dot{E}_A$, $\dot{E}_B$ и $\dot{E}_C$ несимметричной системы, если учесть, что $1 + a + a^2 = 0$, $a^3 = 1$ и $a^4 = a$.

Для получения $\dot{E}_0$ следует сложить равенства (*) и разделить полученную сумму на три.

Для получения $\dot{E}_1$ следует, оставив первое равенство (*) без изменения, умножить второе равенство на a и третье на a^2, затем сложить три полученных равенства и разделить сумму на три.

Для получения $\dot{E}_2$ следует, оставив первое равенство (*) без изменения, умножить второе равенство на a^2 и третье на a, затем сложить три полученных равенства и разделить сумму на три.

Поступая таким образом, находим

$$\left.\begin{aligned}\dot{E}_0 &= \frac{1}{3}(\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C);\\ \dot{E}_1 &= \frac{1}{3}(\dot{E}_A + a\dot{E}_B + a^2\dot{E}_C);\\ \dot{E}_2 &= \frac{1}{3}(\dot{E}_A + a^2\dot{E}_B + a\dot{E}_C).\end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Формулы (**) служат для нахождения симметричных составляющих $\dot{E}_0$, $\dot{E}_1$ и $\dot{E}_2$ по известным ЭДС $\dot{E}_A$, $\dot{E}_B$ и $\dot{E}_C$ несимметричной системы. Формулы же (*) позволяют найти несимметричную систему ЭДС $\dot{E}_A$, $\dot{E}_B$ и $\dot{E}_C$, если известны ее симметричные составляющие $\dot{E}_0$, $\dot{E}_1$ и $\dot{E}_2$.

На рис. 7.10 показан метод графического построения векторов $\dot{E}_0$, $\dot{E}_1$ и $\dot{E}_2$ симметричных составляющих по заданным векторам $\dot{E}_A$, $\dot{E}_B$ и $\dot{E}_C$ несимметричной системы. Для построения использованы формулы (**).

Аналогичные рассуждения можно привести и по отношению к несимметричным системам напряжений и токов.

Из первого равенства (**) и построения на рис. 7.10 видно, что нулевая составляющая отсутствует, если сумма рассматриваемых синусоидальных величин всех трех фаз равна нулю. Поэтому система линейных напряжений не содержит нулевой составляющей. Также не содержит нулевой составляющей система линейных токов при отсутствии нейтрального провода. При наличии нейтрального провода по нему протекает только утроенная нулевая составляющая несимметричной системы линейных токов.

7.5. О применении метода симметричных составляющих к расчету трехфазных цепей

Для расчета несимметричных режимов в линейных трехфазных цепях может быть использован метод симметричных составляющих, так как он сводит сложную задачу при наличии несимметрии ЭДС, токов и напряжений к нескольким более простым задачам расчета той же цепи при симметричных режимах. Особенно ценным этот метод становится, когда сопротивления цепи зависят от характера несимметрии токов, т. е. сопротивление цепи имеет разные значения для различных симметричных составляющих.

Наиболее важным случаем, когда это имеет место, является трехфазная электрическая цепь, содержащая вращающиеся электрические машины — генераторы или двигатели. Обозначим через Z_0, Z_1 и Z_2 комплексные эквивалентные сопротивления некоторого элемента цепи для нулевой, прямой и обратной составляющих.

Во вращающихся трехфазных машинах магнитное поле, создаваемое системой токов прямой последовательности, вращается в одном направлении с ротором, а поле, вызываемое системой токов обратной последовательности, вращается в противоположном направлении. Это приводит к тому, что для машины $Z_1 \neq Z_2$, так как реакция ротора на цепь статора оказывается для прямой и обратной последовательности различной. Токи нулевой последовательности не создают вращающегося поля, и пути потоков, вызванных этими токами, существенно отличаются от путей потоков, вызванных токами прямой и обратной последо-

вательности. Потоки, созданные токами нулевой последовательности, одновременно во всех трех фазах направлены к ротору или от него и вынуждены замыкаться от ротора к статору по воздуху в торцевых частях машины. Поэтому сопротивление нулевой последовательности Z_0 машины существенно отличается от сопротивлений Z_1 и Z_2. Таким образом, для симметрично (в конструктивном отношении) устроенной машины имеем

$$Z_1 \neq Z_2 \neq Z_0.$$

Если пренебречь нелинейностью цепи, возникающей вследствие насыщения машины, то, пользуясь принципом наложения, расчет цепи можно вести методом симметричных составляющих. Расчет сопротивлений Z_1, Z_2 и Z_0 по конструктивным параметрам машины не представляет особого труда, так как эти сопротивления определяются для симметричных режимов; в частности, величины Z_1 и Z_2 рассчитываются при круговом вращающемся магнитном поле. Расчет же сопротивлений фаз при действительных несимметричных токах в обмотках оказывается сложным, так как вращающееся поле при этом не является круговым и, кроме того, сами эти сопротивления сложным образом зависят от характера несимметрии токов.

Наиболее резкая несимметрия токов в цепях с вращающимися машинами наблюдается при коротких замыканиях в цепи. Поэтому метод симметричных составляющих получил наиболее широкое распространение при расчете токов короткого замыкания в электрических системах. Отметим важное обстоятельство, что если электрическая цепь симметрична, т. е. отдельно для каждой симметричной составляющей сопротивления всех фаз одинаковы, то токи нулевой последовательности определяются только ЭДС нулевой последовательности, токи прямой последовательности — только ЭДС прямой последовательности и токи обратной последовательности — только ЭДС обратной последовательности. Таким образом, в симметричных цепях расчет для каждой последовательности можем вести независимо.

Рассмотрим простой случай, когда симметричный генератор с обмотками, соединенными в звезду, имеет нейтральную точку, соединенную с землей через сопротивление Z_{00}, причем в последнее включается и сопротивление протекания тока в земле. Система фазных ЭДС генератора вследствие симметрии его устройства содержит только одну симметричную составляющую прямой последовательности, т. е. $\dot{E}_0 = 0$, $\dot{E}_1 = \dot{E}$ и $\dot{E}_2 = 0$. Цепь, включая обмотки генератора, до места короткого замыкания симметрична и имеет эквивалентные сопротивления Z_0, Z_1 и Z_2 для составляющих нулевой, прямой и обратной последовательностей, причем, как было сказано, $Z_0 \neq Z_1 \neq Z_2$. У места короткого замыкания (рис. 7.11) система фазных напряжений ($\dot{U}_A, \dot{U}_B$ и $\dot{U}_C$) относительно земли, а также и система токов ($\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$ и $\dot{I}_C$) при коротком замыкании несимметричны. Разложив их на симметричные составляющие $\dot{U}_0, \dot{U}_1, \dot{U}_2$ и $\dot{I}_0, \dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$, можем написать

$$0 = \dot{I}_0 Z_0 + \dot{U}_0; \quad \dot{E}_1 = \dot{I}_1 Z_1 + \dot{U}_1; \quad 0 = \dot{I}_2 Z_2 + \dot{U}_2. \qquad (*)$$

Эти уравнения и служат для расчета токов короткого замыкания при любом характере несимметричного короткого замыкания — одной фазы на землю, между двумя фазами или двух фаз на землю.

Составляя эти уравнения, пользуемся отмеченным выше свойством независимости симметричных составляющих в симметричной трехфазной цепи. До места короткого замыкания, как было оговорено, цепь вполне симметрична. Короткое замыкание на землю только одной или только двух фаз нарушает симметрию цепи. Однако в уравнения явно введены, помимо ЭДС генератора, также напряжения $\dot{U}_0, \dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$, или, что то же, однозначно через них определяемые напряжения $\dot{U}_A, \dot{U}_B$ и $\dot{U}_C$. Мы получили бы тот же самый режим, если бы предположили, что у места короткого замыкания провода присоединены к зажимам еще одного соединенного в звезду генератора с заземленной нейтралью, имеющего во всех фазах равное нулю сопротивление и ЭДС $\dot{E}_A = -\dot{U}_A$, $\dot{E}_B = -\dot{U}_B$ и $\dot{E}_C = -\dot{U}_C$, т. е. ЭДС, обеспечивающие систему напряжений $\dot{U}_A, \dot{U}_B$ и $\dot{U}_C$. При таком рассмотрении вся цепь получается симметричной. Однако в трех уравнениях содержатся шесть неизвестных $\dot{I}_0$, $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, $\dot{U}_0$, $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$, или, что то же, однозначно через них определяемых шесть неизвестных $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$, $\dot{I}_C$, $\dot{U}_A$, $\dot{U}_B$ и $\dot{U}_C$. Таким образом, вообще говоря, этих уравнений недостаточно. Если же при заданных $\dot{E}, Z_0, Z_1, Z_2$ по условиям задачи из шести величин $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C, \dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ известны три величины или три независимых уравнения, связывающих их, то можно вычислить все величины, характеризующие данный режим работы генератора и приемника.

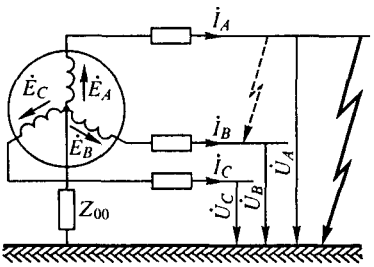


Рис. 7.11

Рассмотрим случай однофазного замыкания фазы A на землю (зигзагообразная стрелка на рис. 7.11).

Пренебрегая токами нормальной нагрузки по сравнению с токами короткого замыкания, имеем

$$\dot{U}_A = 0; \quad \dot{I}_B = 0; \quad \dot{I}_C = 0,$$

и так как $\dot{U}_A = \dot{U}_0 + \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 0$, то, суммируя уравнения (*), получим

$$\dot{E} = \dot{I}_0 Z_0 + \dot{I}_1 Z_1 + \dot{I}_2 Z_2,$$

откуда, приняв во внимание, что при $\dot{I}_B = \dot{I}_C = 0$ симметричные составляющие системы токов будут $\dot{I}_0 = \dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \frac{1}{3}\dot{I}_A$, найдем

$$\dot{E} = \frac{1}{3}\dot{I}_A(Z_0 + Z_1 + Z_2) \quad \text{и} \quad \dot{I}_A = \frac{3\dot{E}}{Z_0 + Z_1 + Z_2}.$$

Для симметричных составляющих системы напряжений в месте короткого замыкания из уравнений находим

$$\dot{U}_0 = -\frac{\dot{I}_A Z_0}{3} = -\frac{\dot{E} Z_0}{Z_0 + Z_1 + Z_2}; \quad \dot{U}_1 = \dot{E} - \frac{\dot{I}_A Z_1}{3} = \frac{\dot{E}(Z_0 + Z_2)}{Z_0 + Z_1 + Z_2};$$

$$\dot{U}_2 = -\frac{\dot{I}_A Z_2}{3} = -\frac{\dot{E} Z_2}{Z_0 + Z_1 + Z_2},$$

после чего легко определяются $\dot{U}_B$ и $\dot{U}_C$.

На первый взгляд кажется, что эта задача решается гораздо проще прямым применением закона Ома к контуру, по которому проходит ток $\dot{I}_A$. Этот контур образован участком между землей и нейтралью генератора, фазой A генератора, проводом в этой фазе до места короткого замыкания и землей. Если бы сопротивление фазы генератора и провода было одинаковым для всех трех составляющих трехфазной системы и равным Z, то ток $\dot{I}_A$ вычислялся бы элементарно:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}}{Z_{00} + Z}.$$

Это соотношение вытекает при таком условии и из полученного выше выражения. Действительно, при этом было бы

$$Z_0 = 3Z_{00} + Z; \quad Z_1 = Z; \quad Z_2 = Z.$$

Первое из этих трех равенств следует из того, что через участок Z_{00} проходят все три тока нулевой последовательности, протекающие по всем трем фазам. Следовательно, этот участок можно заменить тремя ветвями, соединенными параллельно и имеющими каждая сопротивление $3Z_{00}$, но по каждой из которых протекает только ток $\dot{I}_0$. Подставив эти выражения для Z_0, Z_1 и Z_2 в выражение для $\dot{I}_A$, находим

$$\dot{I}_A = \frac{3\dot{E}}{Z_0 + Z_1 + Z_2} = \frac{3\dot{E}}{3Z_{00} + Z + Z + Z} = \frac{\dot{E}}{Z_{00} + Z},$$

т. е. то же выражение, что и непосредственно из закона Ома. Однако это получается только в предположении, что сопротивления фаз генератора одинаковы для составляющих любой последовательности. В действительности наличие вращающегося ротора и взаимной индукции между фазами приводит к тому, что сопротивления генератора для систем прямой, обратной и нулевой последовательности различны. Если они известны, то формула

$$\dot{I}_A = \frac{3\dot{E}}{Z_0 + Z_1 + Z_2}$$

дает возможность произвести расчет тока $\dot{I}_A$ и всех остальных величин. Формула же $\dot{I}_A = \frac{\dot{E}}{Z_{00} + Z}$ не дает такой возможности, так как в ней неопределенным является сопротивление Z, на величину которого влияет вращающийся ротор.

Таким образом, уже на этом простом примере видим достоинство метода симметричных составляющих для расчета трехфазных цепей, содержащих вращающиеся машины.

Глава восьмая

Расчет электрических цепей при несинусоидальных периодических ЭДС, напряжениях и токах

8.1. Метод расчета мгновенных установившихся напряжений и токов в линейных электрических цепях при действии периодических несинусоидальных ЭДС

В предыдущих главах рассматривались синусоидальные ЭДС, напряжения и токи. Однако в действительности во многих случаях при установившемся процессе кривые периодических ЭДС, токов и напряжений в той или иной мере отличаются от синусоиды. Периодические ЭДС, напряжения и токи можно представить в виде рядов Фурье, которые в общем случае содержат постоянную составляющую, основную, или первую, гармонику, имеющую период, равный периоду самой функции, и высшие гармоники, частота которых в целое число раз больше частоты первой гармоники. Например, для периодической ЭДС можем написать

$$e(t) = E_0 + E_{1m}\sin(\omega t + \psi_1) + E_{2m}\sin(2\omega t + \psi_2) + \\ + E_{3m}\sin(3\omega t + \psi_3) + \ldots + E_{km}\sin(k\omega t + \psi_k) + \ldots$$

Здесь E_0 — постоянная составляющая ЭДС; $E_{1m}\sin(\omega t + \psi_1)$ — основная, или первая, гармоника; $E_{km}\sin(k\omega t + \psi_k)$ — высшая гармоника порядка k (k-я гармоника); E_{km} — амплитуда и ψ_k — начальная фаза k-й гармоники.

Заметим, что разложение в ряд Фурье возможно для функций, удовлетворяющих условиям Дирихле, т. е. имеющих за полный период конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов. Этим условиям всегда удовлетворяют ЭДС, напряжения и токи в реальных физических цепях.

В общем случае ряд Фурье содержит бесконечное число членов, но, как правило, обычно можно ограничиться некоторым конечным числом членов ряда.

Для вычисления коэффициентов ряда Фурье целесообразно его члены представить через синусы и косинусы без начальных фаз. Имеем

$$E_{km}\sin(k\omega t + \psi_k) = E_{km}\cos\psi_k \sin k\omega t + E_{km}\sin\psi_k \cos k\omega t = B_k \sin k\omega t + C_k \cos k\omega t.$$

Таким образом,

$$e(t) = E_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos k\omega t.$$

Постоянная составляющая E_0 и коэффициенты B_k и C_k, как известно из курса математики, определяются с помощью формул

$$E_0 = \frac{1}{T}\int_0^T e(t)dt; \quad B_k = \frac{2}{T}\int_0^T e(t)\sin k\omega t dt; \quad C_k = \frac{2}{T}\int_0^T e(t)\cos k\omega t dt.$$

Имея B_k и C_k, нетрудно вычислить амплитуду и начальную фазу k-й гармоники:

$$E_{km} = \sqrt{B_k^2 + C_k^2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\psi_k = C_k / B_k.$$

Аналогично можно разложить в ряд Фурье несинусоидальные токи и напряжения.

Приведенные формулы для постоянной составляющей и коэффициентов B_k и C_k позволяют найти эти величины, когда функция задана аналитически. Нередко мы располагаем кривыми ЭДС, тока или напряжения, заданными в виде графиков. В этом случае постоянную составляющую можно определить как среднюю за период ординату кривой, а для вычисления коэффициентов B_k и C_k существует ряд приближенных методов. Например, можно воспользоваться приближенными формулами

$$B_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin k\omega t dt \approx \frac{2}{p}\sum_{n=1}^{p} f\left(n\frac{\omega T}{p}\right)\sin\left(kn\frac{\omega T}{p}\right);$$

$$C_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega t dt \approx \frac{2}{p}\sum_{n=1}^{p} f\left(n\frac{\omega T}{p}\right)\cos\left(kn\frac{\omega T}{p}\right).$$

Для вычисления делим период T на p равных интервалов и в p точках деления определяем ординаты $f\left(n\frac{\omega T}{p}\right)$ заданной графически кривой, полагая $n = 1, 2, 3, \ldots, p$.

В связи с ростом быстродействия вычислительной техники и разработкой специализированных процессоров для реализации разложения кривых в ряд Фурье появилась возможность быстрого преобразования.

Причиной появления высших гармоник в кривых тока в линейных цепях является наличие высших гармоник в кривых ЭДС и напряжений устройств, питающих эти цепи. Характерным примером может служить питание цепи от выпрямителя, в напряжении на выходе которого наряду с постоянной составляющей содержится переменная периодическая составляющая. Но и обычные генераторы переменного тока хотя и конструируются так, чтобы ЭДС в их обмотках были как можно более близкими к синусоидальным, все же вследствие некоторых конструктивных особенностей, например наличия зубцов, имеют ЭДС, содержащие в некоторой мере высшие гармоники.

Высшие гармоники в кривых тока могут возникать также вследствие того, что параметры самой цепи изменяются в течение периода. Если это изменение параметров происходит по заданной периодической функции времени и не зависит от тока, то цепь остается линейной. Если же изменение параметров возникает вследствие их зависимости от тока, то цепь является нелинейной. Этот последний случай будет рассмотрен в части 3, посвященной нелинейным цепям.

Для линейных цепей применим принцип наложения. Основываясь на нем, можно предложить следующий метод расчета мгновенных токов в этих цепях при действии в них периодических несинусоидальных ЭДС или напряжений.

Раскладываем заданные периодические несинусоидальные ЭДС или напряжения в ряд Фурье:

$$e = e_0 + e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + e_k + \ldots;$$
$$u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k + \ldots$$

Находим как функции времени мгновенные токи i_0, i_1, i_2, i_3, ..., i_k, ..., возникающие в некоторой ветви цепи под действием в отдельности каждой составляющей ЭДС e_0, e_1, e_2, e_3, ..., e_k, ..., или напряжения u_0, u_1, u_2, u_3, ..., u_k, ...

Суммируя найденные таким путем мгновенные токи, получаем искомый ток в рассматриваемой ветви цепи:

$$i = i_0 + i_1 + i_2 + i_3 + \ldots + i_k + \ldots$$

Так как каждая составляющая является либо постоянной величиной, либо синусоидальной функцией времени, то для расчета каждой из них в отдельности могут быть применены все методы, изложенные в предыдущих главах. Весьма целесообразно для расчета каждой синусоидальной составляющей в отдельности воспользоваться комплексным методом. Однако суммировать полученные комплексные токи для отдельных гармоник нельзя, так как они имеют разные частоты. Суммировать можно лишь мгновенные значения, выраженные как функции времени.

Пользуясь этим методом, определим ток i в простейшей неразветвленной цепи с постоянными параметрами r, L, C при установившемся режиме в случае, когда напряжение u на зажимах цепи является периодической несинусоидальной функцией времени. Представим напряжение u в виде ряда

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k + \ldots,$$

где u_0 — постоянная составляющая, а $u_k = U_{km} \sin(k\omega t + \psi_{uk})$ — k-я гармоника напряжения.

Постоянная составляющая тока в этой цепи равна нулю, т. е. $i_0 = 0$, так как конденсатор постоянный ток не проводит. Мгновенное значение k-й гармоники тока

$$i_k = I_{km} \sin(k\omega t + \psi_{uk} - \varphi_k),$$

причем для рассматриваемой цепи

$$I_{km} = \frac{U_{km}}{\sqrt{r^2 + \left(k\omega L - \dfrac{1}{k\omega C}\right)^2}} \quad \text{и} \quad \varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{k\omega L - \dfrac{1}{k\omega C}}{r}.$$

Искомый ток определяется суммой:

$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \ldots + i_k + \ldots$$

Следует обратить внимание на то, что реактивное сопротивление $x_k = k\omega L - 1/(k\omega C)$, а следовательно, и полное сопротивление $z_k = \sqrt{r^2 + x_k^2}$, и угол сдвига $\varphi_k = \operatorname{arctg}(x_k/r)$ зависят от порядка гармоники. Поэтому форма кривой тока i не будет подобна форме кривой приложенного напряжения u.

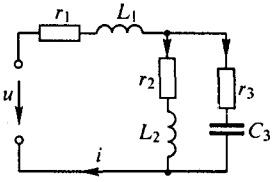


Рис. 8.1

В качестве примера разветвленной цепи рассмотрим цепь, изображенную на рис. 8.1. Определим ток i на входе цепи.

Постоянная составляющая тока определяется в этом случае из соотношения

$$i_0 = \frac{u_0}{r_1 + r_2},$$

где u_0 — постоянная составляющая приложенного напряжения u.

Для вычисления гармонических составляющих тока воспользуемся комплексным методом. С этой целью представим в комплексной форме k-ю гармонику $u_k = U_{km} \sin(k\omega t + \psi_{uk})$ приложенного к зажимам цепи напряжения u. Имеем комплексную амплитуду k-й гармоники в виде

$$\dot{U}_{km} = U_{km} e^{j\psi_{uk}}.$$

Найдем комплексное сопротивление всей цепи для k-й гармоники. Условимся первым индексом у сопротивления обозначать порядок гармоники, а вторым индексом, после запятой, — номер ветви, для которой записывается то или иное сопротивление. Для рассматриваемой цепи сопротивление Z_k всей цепи равно

$$Z_k = Z_{k,1} + \frac{Z_{k,2} Z_{k,3}}{Z_{k,2} + Z_{k,3}},$$

где в соответствии со схемой на рис. 8.1

$$Z_{k,1} = r_1 + jk\omega L_1; \quad Z_{k,2} = r_2 + jk\omega L_2; \quad Z_{k,3} = r_3 - j\frac{1}{k\omega C_3}.$$

Комплексная амплитуда k-й гармоники искомого тока вычисляется в виде

$$\dot{I}_{km} = \frac{\dot{U}_{km}}{Z_k} = \frac{U_{km} e^{j\psi_{uk}}}{z_k e^{j\varphi_k}} = \frac{U_{km}}{z_k} e^{j(\psi_{uk} - \varphi_k)} = I_{km} e^{j\psi_{ik}}.$$

Теперь не представляет труда написать выражение для мгновенного значения k-гармоники тока: $i_k = I_{km} \sin(k\omega t + \psi_{ik})$.

Придавая индексу k все значения, соответствующие основной ($k = 1$) и высшим ($k = 2, 3, \ldots$) гармоникам, имеющимся в кривой напряжения, получим все соответствующие им гармонические составляющие тока. Весь искомый ток найдется в виде суммы:

$$i = i_0 + i_1 + i_2 + i_3 + \ldots + i_k + \ldots$$

8.2. Зависимость формы кривой тока от характера цепи при несинусоидальном напряжении

Сопротивление электрической цепи, содержащей индуктивные катушки и конденсаторы, зависит от частоты, и, следовательно, оно оказывается различным для разных гармоник. Поэтому если к зажимам такой цепи приложено периодическое несинусоидальное напряжение, то кривая тока в цепи отличается по форме от кривой напряжения.

Кривая тока i подобна кривой напряжения u только в случае, если цепь обладает одним активным сопротивлением r, одинаковым для всех частот. В таком случае для всех гармоник $I_{km} = U_{km}/r$ и, следовательно, $I_{km}/I_{1m} = U_{km}/U_{1m}$, т. е. кривые тока и напряжения подобны друг другу.

Соблюдение такого условия необходимо в цепях вольтметров, в параллельных цепях ваттметров и особенно в цепях вибраторов осциллографов, предназначенных для записи кривых напряжения. В точности достичь этого условия невозможно, так как принципиально всякая цепь обладает индуктивностью и емкостью. Однако, применяя специальные способы намотки добавочных сопротивлений, в таких цепях удается существенно снизить их индуктивность и емкость и приблизиться к требуемым условиям. Кроме того, если сечение проволоки намотки мало, то можно при не очень высоких частотах пренебречь явлением поверхностного эффекта и считать, что активное сопротивление одинаково для всех гармоник не слишком высокого порядка.

Рассмотрим отдельно катушку с индуктивностью L и $r = 0$. Ее сопротивление при частоте $k\omega$ k-й гармоники равно $z_k = k\omega L$, т. е. растет с возрастанием порядка гармоники. Соответственно,

$$I_{km} = \frac{U_{km}}{k\omega L} \quad \text{и} \quad \frac{I_{km}}{I_{1m}} = \frac{1}{k}\frac{U_{km}}{U_{1m}}.$$

Таким образом, амплитуды высших гармоник, выраженные в долях первой гармоники, в кривой тока меньше, чем в кривой напряжения. Говорят, что катушка сглаживает кривую тока. Этим пользуются, например, для сглаживания кривой тока после выпрямителей, включая в цепь между выпрямителем и приемником индуктивную катушку. Напряжение на выходе выпрямителя обычно содержит, кроме постоянной составляющей, еще ряд гармонических составляющих. Катушка не оказывает сопротивления постоянной составляющей тока, но ее сопротивление высшим гармоникам тока тем больше, чем выше порядок гармоники.

Рассмотрим теперь конденсатор без потерь. Его сопротивление $z_k = 1/(k\omega C)$ убывает с ростом порядка гармоники. Имеем

$$I_{km} = k\omega C U_{km} \quad \text{и} \quad \frac{I_{km}}{I_{1m}} = k\frac{U_{km}}{U_{1m}},$$

т. е. в конденсаторе содержание гармоник, выраженных в долях первой гармоники, в кривой тока больше, чем в кривой напряжения. Говорят, что конденсатор искажает кривую тока по сравнению с кривой напряжения.

Для сложной цепи, содержащей участки с активным сопротивлением, катушки и конденсаторы, на форму кривой тока будет влиять конфигурация цепи.

Если, например, в цепи для гармоники порядка $k = q$ имеет место резонанс напряжений, то сопротивление цепи для этой гармоники минимально, и, соответственно, эта гармоника в кривой тока будет выделяться. Простейшей такой цепью является цепь из последовательно включенных катушки L и конденсатора C. Этим можно воспользоваться, чтобы обеспечить преимущественное прохождение гармоники порядка q от источника несинусоидального напряжения u к приемнику, включив на пути между ними последовательно соединенные

катушку и конденсатор (рис. 8.2) и подобрав L и C так, чтобы соблюдалось условие $q\omega L = 1/(q\omega C)$.

Если ветвь из последовательно соединенных катушки L и конденсатора C, настроенную в резонанс при частоте $q\omega$, включить параллельно приемнику, причем до этой ветви еще включить индуктивную катушку L_0 (рис. 8.3), то гармоника тока порядка q не пройдет в приемник, так как для этой частоты приемник будет зашунтирован ветвью L, C, имеющей при резонансе весьма малое активное сопротивление. Гармоника порядка q, содержащаяся в напряжении u, вся будет приложена к зажимам катушки L_0. Остальные гармоники тока, встречая значительное сопротивление ветви L, C, проходят в приемник. Если напряжение u содержит постоянную составляющую, то вызываемая ею постоянная составляющая тока пройдет целиком в приемник, так как сопротивление ветви L, C для нее бесконечно, а индуктивное сопротивление катушки L_0 равно нулю. Такой метод широко используется на выпрямительных подстанциях, питающих контактную сеть электрических железных дорог. Напряжение после выпрямителя содержит, кроме постоянной составляющей, также ряд гармоник. После выпрямителя и катушки L_0 включают ветви L, C по схеме, изображенной на рис. 8.4, настраивая эти ветви в резонанс на частоты гармоник, которые хотят не допустить в контактную сеть.

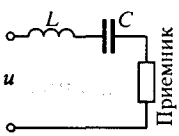


Рис. 8.2

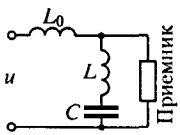


Рис. 8.3

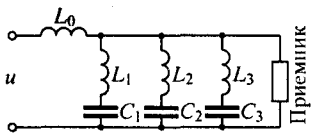


Рис. 8.4

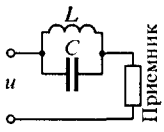


Рис. 8.5

Если в цепи для гармоники порядка q имеет место резонанс токов, то сопротивление цепи для этой гармоники максимально и, соответственно, эта гармоника в кривой тока будет ослаблена. Простейшей такой цепью является цепь из параллельно соединенных катушки L и конденсатора C. Этим можно воспользоваться, чтобы затруднить прохождение гармоники порядка q от источника несинусоидального напряжения u к приемнику, включив на пути между ними контур из параллельно соединенных катушки и конденсатора (рис. 8.5) и подобрав L и C так, чтобы соблюдалось условие $q\omega C = 1/(q\omega L)$.

Электрические цепи, предназначенные для преимущественного пропуска или задержания токов определенных частот, носят название *электрических фильтров*. Здесь были приведены примеры простейших фильтров, пропускающих или задерживающих токи определенных дискретных частот. В дальнейшем рассмотрим фильтры, пропускающие или задерживающие токи в определенном диапазоне частот.

8.3. Действующие периодические несинусоидальные токи, напряжения и ЭДС

Действующий периодический ток мы определили в § 4.2 в общем виде как его среднее квадратическое значение за период:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}.$$

Раскладывая $i(t)$ в ряд Фурье, имеем

$$I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T (i_0 + i_1 + i_2 + \ldots + i_k + \ldots)^2 dt = \sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{T}\int_0^T i_k^2 dt + \sum_{\substack{q=0\\s=0}}^{\substack{s=\infty\\q=\infty}}\frac{1}{T}\int_0^T i_q i_s dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{T}\int_0^T i_k^2 dt = \sum_{k=0}^{k=\infty} I_k^2 = I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \ldots + I_k^2 + \ldots,$$

так как при $q \neq s$

$$\int_0^T i_q i_s dt = \int_0^T I_{qm} I_{sm} \sin(q\omega t + \psi_q)\sin(s\omega t + \psi_s) dt =$$

$$= \frac{1}{2} I_{qm} I_{sm}\left\{\int_0^T \cos[(q-s)\omega t + \psi_q - \psi_s]\, dt - \int_0^T \cos[(q+s)\omega t + \psi_q + \psi_s]\, dt\right\} = 0.$$

Действительно, здесь при $q \neq s$ получаем интегралы от синусоидальных функций за целое число $(q - s)$ и $(q + s)$ периодов. Такие интегралы равны нулю.

Итак, имеем

$$I = \sqrt{\sum_{k=0}^{k=\infty} I_k^2} = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \ldots + I_k^2 + \ldots},$$

т. е. *действующий периодический несинусоидальный ток равен корню квадратному из суммы квадратов постоянной составляющей и действующих значений всех гармоник.*

Аналогично находим выражения для периодических несинусоидальных напряжений и ЭДС:

$$U = \sqrt{\sum_{k=0}^{k=\infty} U_k^2} \quad \text{и} \quad E = \sqrt{\sum_{k=0}^{k=\infty} E_k^2}.$$

8.4. Активная мощность при периодических несинусоидальных токах и напряжениях

Сохраняя общее определение для активной мощности как ее среднее значение за период (см. § 4.6), имеем

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T ui\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T (u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_k + \ldots)(i_0 + i_1 + i_2 + \ldots + i_k + \ldots) dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{T}\int_0^T u_k i_k dt + \sum_{\substack{q=0\\s=0}}^{\substack{s=\infty\\q=\infty}}\frac{1}{T}\int_0^T u_q i_s dt = \sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{T}\int_0^T u_k i_k dt = \sum_{k=0}^{k=\infty} P_k,$$

так как по тем же соображениям, что и в предыдущем параграфе,

$$\int_0^T u_q i_s dt = 0 \text{ при } q \neq s.$$

Таким образом,

$$P = \sum_{k=0}^{k=\infty} P_k = P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_k + \ldots =$$

$$= U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_2 I_2 \cos\varphi_2 + \ldots + U_k I_k \cos\varphi_k + \ldots,$$

т. е. *активная мощность при периодических несинусоидальных токах и напряжениях равна сумме активных мощностей постоянной и всех гармонических составляющих тока и напряжения.*

Во избежание недоразумений следует подчеркнуть, что принцип наложения для квадратичных величин несправедлив, и для мгновенных токов, напряжений и мощности имеем $i^2 \neq \sum i_k^2$, $u^2 \neq \sum u_k^2$ и $p = ui \neq \sum p_k$, так как мгновенные значения произведений $i_q i_s$, $u_q u_s$ и $u_q i_s$ при $q \neq s$ не равны нулю. Однако интегралы от этих произведений за целый период T обращаются в нуль, что является свойством ортогональности функций, входящих сомножителями в эти произведения.

При периодических несинусоидальных токах и напряжениях, как и при синусоидальных, вводят понятие о коэффициенте мощности, обозначая его при этом через λ и определяя из соотношения

$$P = UI\lambda,$$

т. е.

$$\lambda = \frac{P}{UI} = \frac{\sum_{k=0}^{k=\infty} P_k}{\sqrt{\sum_{k=0}^{k=\infty} U_k^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{k=\infty} I_k^2}}.$$

Величина λ равна единице только в том случае, если цепь обладает одним активным сопротивлением, не зависящим от частоты и от тока. Во всех остальных случаях $\lambda < 1$.

В частном случае, когда напряжение и ток изменяются по синусоидальному закону, т. е. когда отсутствуют постоянные составляющие и высшие гармоники, коэффициент мощности, как было получено в § 4.6, равен косинусу разности фаз φ синусоидальных напряжения и тока ($\lambda = \cos\varphi$).

Можно показать, что появление высших гармоник в кривых напряжения и тока приводит к снижению коэффициента мощности по сравнению со случаем, когда ток и напряжение при тех же действующих значениях синусоидальны. Следовательно, уже хотя бы в этом отношении появление высших гармоник нежелательно. Поэтому стремятся конструировать генераторы переменного тока так, чтобы кривая ЭДС в них была по возможности близка к синусоиде. Наличие высших гармоник может быть причиной и ряда других нежелательных явлений. Оно приводит к возможности резонанса для одной из высших гармоник

и, соответственно, к появлению перенапряжений на отдельных участках цепи, к нежелательному влиянию гармоник звуковой частоты на радио- и телефонную связь, к возникновению в трехфазных двигателях магнитных полей, вращающихся против направления вращения ротора (например, при $k = 5, 11, \ldots$) и, следовательно, вызывающих торможение ротора и добавочные потери в двигателях.

Однако отсюда не следует, что во всех без исключения устройствах всегда необходимо стремиться к получению синусоидальных токов и напряжений. Это, безусловно, относится к мощным электроэнергетическим устройствам. Однако в маломощных устройствах автоматического управления и регулирования, а также в ряде специальных радиотехнических, электроизмерительных и различных электронных устройств оказывается необходимым как раз получить формы кривых напряжения и тока, отличающиеся от синусоидальных, т. е. содержащие высшие гармоники. Некоторые из таких устройств будут рассмотрены в главах о нелинейных электрических цепях.

8.5. Особенности поведения высших гармоник в трехфазных цепях

Предположим, что фазные ЭДС симметрично устроенного трехфазного генератора содержат высшие гармоники. Кривые ЭДС во всех фазах по форме одинаковы и сдвинуты в каждой последующей фазе относительно предыдущей на угол $2\pi/3$, где 2π — период всей кривой ЭДС, равный периоду первой гармоники. Так как период k-й гармоники в k раз меньше периода первой гармоники, то угол сдвига k-й гармоники в последующей фазе по отношению к предыдущей фазе равен $k2\pi/3$. Таким образом, все гармоники, порядок которых кратен числу фаз, т. е. кратен трем ($k = 3, 6, 9, 12, 15, \ldots$), сдвинуты друг относительно друга на угол, равный 2π, умноженный на целое число, т. е. эти гармоники находятся в фазе друг с другом и образуют симметричные системы нулевой последовательности.

Гармоники, для которых $k - 1$ делится на три ($k = 4, 7, 10, 13, \ldots$), образуют, как нетрудно убедиться, симметричные системы прямой последовательности.

Гармоники, для которых $k + 1$ делится на три ($k = 2, 5, 8, 11, \ldots$), образуют симметричные системы обратной последовательности.

Из этих свойств вытекает ряд особенностей поведения высших гармоник в трехфазных цепях.

Предположим, что обмотки генератора соединены треугольником. Сумма первых гармоник фазных ЭДС в контуре треугольника равна нулю. Это имеет место также для всех высших гармоник, порядок которых не кратен трем. Гармоники же, порядок которых кратен трем, совпадают по фазе во всех фазных обмотках, и их сумма не равна нулю. Эта суммарная ЭДС вызывает в контуре треугольника ток даже при отсутствии нагрузки генератора. Падения напряжения в обмотках вследствие протекания этого тока компенсируют вызывающие ток ЭДС. Поэтому напряжения на зажимах обмотки не содержат гармоник, порядок которых кратен трем.

То же самое имеет место при соединении обмоток трансформатора треугольником, если фазные ЭДС в обмотках трансформатора симметричны. Обычно,

используя это свойство, стремятся соединить либо обмотку генератора, либо одну из обмоток трансформатора в треугольник с целью погасить гармоники, имеющие порядок, кратный трем, внутри этой обмотки и не дать им выхода в остальную цепь. В ЭДС симметрично устроенного генератора отсутствуют четные гармоники, так как кривые, симметричные относительно оси абсцисс, не содержат четных гармоник, что будет показано в следующем параграфе. Поэтому при соединении треугольником на выходных зажимах, кроме первых, могут быть высшие гармоники порядков $k = 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, \ldots$

Если обмотки генератора или трансформатора соединены звездой, то при симметрии фазных ЭДС в линейных напряжениях также отсутствуют гармоники, порядок которых кратен трем, хотя в фазных напряжениях эти гармоники содержатся. Это является следствием того, что линейные напряжения равны разностям фазных напряжений. Поэтому отношение действующих линейного и фазного напряжений в этом случае меньше $\sqrt{3}$. Покажем это. Обозначим через U_1, U_2, U_3, ... действующие значения гармоник фазного напряжения. Имея в виду, что линейные напряжения для гармоник, порядок которых не кратен трем, в $\sqrt{3}$ больше фазных, получаем

$$\frac{U_л}{U_ф} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{U_1^2 + 0 + U_5^2 + U_7^2 + 0 + U_{11}^2 \ldots}}{\sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + U_7^2 + U_9^2 + U_{11}^2 \ldots}} < \sqrt{3}.$$

При отсутствии нейтрального провода в линейных токах и токах приемника нет гармоник с порядком, кратным трем, так как этих гармоник нет в линейных напряжениях. Соответственно, нет этих гармоник и в фазных напряжениях приемника, даже если он соединен звездой. В последнем случае между нейтральными точками генератора и приемника появляется напряжение тройной частоты, которое может достигать опасных для жизни значений. При наличии нейтрального провода по нему и, соответственно, по линейным проводам замкнутся токи тройной частоты.

Все эти нежелательные явления исчезают, если гармоники с порядком, кратным трем, погашены в одной из обмоток генератора или трансформатора, соединенных треугольником. Иногда в трансформаторе для этой цели создают не имеющую выводов специальную обмотку, соединенную в треугольник.

При рассмотрении вопроса о получении вращающегося поля в трехфазном двигателе мы ограничились учетом первых гармоник токов в обмотках. Гармоники, для которых число $(k - 1)$ делится на три, имеют ту же последовательность, что и первая гармоника. Они создают поле, вращающееся в том же направлении, что и поле основной волны, но с большей скоростью. Гармоники, для которых число $(k + 1)$ делится на три, создают поля, вращающиеся в обратном направлении.

8.6. О составе высших гармоник при наличии симметрии форм кривых тока или напряжения

При наличии того или иного вида симметрии в кривых тока или напряжения некоторые коэффициенты в разложении в ряд Фурье обращаются в нуль.

Важным случаем является симметрия кривых относительно оси абсцисс (рис. 8.6), при которой выполняется условие

$$f(t) = -f(t + T/2),$$

т. е. отрицательная полуволна является зеркальным изображением сдвинутой на половину периода положительной полуволны.

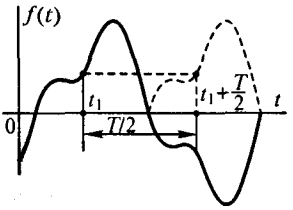


Рис. 8.6

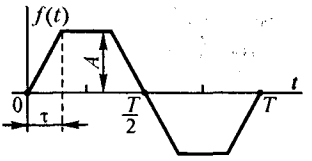


Рис. 8.7

Если кривая симметрична относительно оси абсцисс, ряд Фурье не содержит постоянной составляющей и четных гармоник, так как для них не удовлетворяется приведенное ранее условие симметрии. Действительно, сдвигу функции, а следовательно, и первой гармоники на $T/2$ соответствует сдвиг четных гармоник на целое число полных периодов, и значения этих гармоник не меняют своего знака. Таким образом, любая симметричная относительно оси абсцисс кривая содержит только нечетные гармоники.

Это положение имеет исключительно большое значение. Основываясь на нем, можно утверждать, что при симметричном устройстве вращающихся генераторов ЭДС в их обмотках не содержат четных гармоник, а также если условия прохождения тока по цепи одинаковы в обоих направлениях, то при симметричной ЭДС и ток не будет содержать четных гармоник. В линейных электрических цепях с постоянными параметрами условия прохождения тока в обоих направлениях всегда одинаковы. Эти условия могут быть неодинаковы в цепях с изменяющимися параметрами, например в нелинейных цепях с выпрямителями. В последнем случае появляются постоянная составляющая и четные гармоники в кривой тока.

Примером симметричной относительно оси абсцисс кривой является кривая трапецеидальной формы, приведенная на рис. 8.7. Разложение ее в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{2A}{\pi^2}\frac{T}{\tau}\left(\sin\omega\tau\sin\omega t + \frac{1}{3^2}\sin 3\omega\tau\sin 3\omega t + \frac{1}{5^2}\sin 5\omega\tau\sin 5\omega t + \ldots\right),$$

что легко получается, если воспользоваться приведенными ранее формулами для B_k и C_k. При $\tau = T/4$ получаем равнобедренный треугольник, и разложение принимает вид

$$f(t) = \frac{8A}{\pi^2}\left(\sin\omega t - \frac{1}{3^2}\sin 3\omega t + \frac{1}{5^2}\sin 5\omega t - \ldots\right).$$

При $\tau = 0$ получаем прямоугольную кривую, для которой

$$f(t) = \frac{4A}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \ldots\right).$$

Из этих разложений видно, что в них отсутствуют постоянные составляющие и четные гармоники.

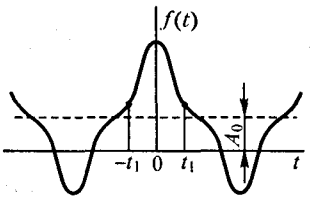


Рис. 8.8

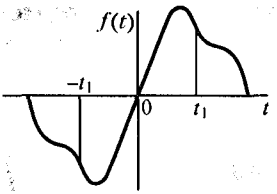


Рис. 8.9

Может быть симметрия кривых другого характера. На рис. 8.8 изображена кривая, симметричная относительно оси ординат. Изображаемая ею функция удовлетворяет условию $f(t) = f(-t)$. Нетрудно убедиться, что при этом

$$B_1 = B_2 = B_3 = \ldots = B_k = \ldots = 0$$

и разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = A_0 + C_1\cos\omega t + C_2\cos 2\omega t + C_3\cos 3\omega t + \ldots + C_k\cos k\omega t + \ldots$$

Если кривая симметрична относительно начала координат (рис. 8.9), то $f(t) = -f(-t)$. В этом случае

$$A_0 = C_1 = C_2 = C_3 = \ldots = C_k = \ldots = 0$$

и ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = B_1\sin\omega t + B_2\sin 2\omega t + B_3\sin 3\omega t + \ldots + B_k\sin k\omega t + \ldots$$

Подчеркнем, что условие симметрии относительно оси абсцисс не зависит от выбора начала отсчета времени, т. е. является свойством самих кривых, тогда как рассмотренные остальные виды симметрии связаны с выбором начала отсчета времени.

8.7. Представление ряда Фурье в комплексной форме

В ряде случаев целесообразно представить ряд Фурье в комплексной форме. Это особенно полезно будет при рассмотрении в гл. 11 частотного метода анализа процессов в электрических цепях. Ранее ряд Фурье был представлен в виде

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty}(B_k\sin k\omega t + C_k\cos k\omega t).$$

В выражениях для A_0, B_k и C_k нам будет удобнее взять пределы интегрирования не от 0 до T, а от $-T/2$ до $+T/2$. Будем иметь

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)dt; \quad B_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\sin k\omega t\,dt; \quad C_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\cos k\omega t\,dt,$$

причем $\omega = 2\pi/T$ — угловая частота первой гармоники.

Пользуясь выражениями

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}j(-e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) \quad \text{и} \quad \cos\alpha = \frac{1}{2}(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}),$$

можем написать

$$B_k \sin k\omega t + C_k \cos k\omega t = \frac{1}{2}\left[(C_k - jB_k)e^{jk\omega t} + (C_k + jB_k)e^{-jk\omega t}\right].$$

Из формул для B_k и C_k имеем

$$C_k - jB_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)e^{-jk\omega t}dt; \quad C_k + jB_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)e^{jk\omega t}dt.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}(B_k \sin k\omega t + C_k \cos k\omega t) = \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{T}e^{jk\omega t}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)e^{-jk\omega t}dt + \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{T}e^{-jk\omega t}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)e^{jk\omega t}dt =$$

$$= \sum_{q=1}^{q=\infty}\frac{1}{T}e^{jq\omega t}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)e^{-jq\omega t}dt + \sum_{q=-\infty}^{q=-1}\frac{1}{T}e^{jq\omega t}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)e^{-jq\omega t}dt.$$

Здесь произведена замена в первой сумме k на q, а во второй сумме k на $(-q)$ с целью получения одинаковых выражений под знаками обеих сумм. Естественно, чтобы вторая сумма при этом не изменилась, суммирование в ней необходимо произвести по значениям q от $-\infty$ до -1, что соответствует суммированию по значениям k от $+1$ до $+\infty$.

Учитывая, что

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)dt = \left[\frac{1}{T}e^{jq\omega t}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)e^{-jq\omega t}dt\right]_{q=0},$$

можем представить $f(t)$ в виде

где

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{T}\sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} e^{jq\omega t}F(jq\omega), \\ F(jq\omega) &= \int_{-T/2}^{+T/2} f(t)e^{-jq\omega t}dt. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Полученное выражение для $f(t)$ представляет собой ряд Фурье в комплексной форме. В этом выражении каждой k-й гармонике отвечает сумма двух сопряженных членов (при $q = +k$ и при $q = -k$), равная удвоенной вещественной части каждого из этих членов:

$$\frac{1}{T}e^{jk\omega t}F(jk\omega) + \frac{1}{T}e^{-jk\omega t}F(-jk\omega) = \mathrm{Re}\left[\frac{2}{T}F(jk\omega)e^{jk\omega t}\right].$$

Обозначив $F(jk\omega) = F(k\omega)e^{j\alpha_k}$, имеем

$$\mathrm{Re}\left[\frac{2}{T}F(jk\omega)e^{jk\omega t}\right] = \frac{2}{T}F(k\omega)\cos(k\omega t + \alpha_k) = \frac{2}{T}F(k\omega)\sin(k\omega t + \psi_k),$$

где $\psi_k = \pi/2 + \alpha_k$.

Таким образом, величина

$$\frac{2}{T}F(k\omega)e^{j\psi_k} = j\frac{2}{T}F(k\omega)e^{j\alpha_k} = j\frac{2}{T}F(jk\omega)$$

представляет собой комплексную амплитуду k-й гармоники

$$\dot{A}_k = A_k e^{j\psi_k},$$

где

$$A_k = \frac{2}{T}F(k\omega).$$

Совокупность комплексных амплитуд всех гармоник данной функции может рассматриваться как дискретный спектр этой функции. Его можно представить на графике в виде спектра значений амплитуд и спектра значений фаз. По оси абсцисс откладываем частоту, которая имеет дискретные значения, равные частотам гармоник. Для каждой частоты гармоник откладываем от оси абсцисс параллельно оси ординат отрезки, длины которых равны амплитудам A_k или начальным фазам ψ_k гармоник. При этом $A_k > 0$, а ψ_k может быть как положительным, так и отрицательным. Такие характеристики носят название дискретных спектров или дискретных частотных характеристик — соответственно, амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик.

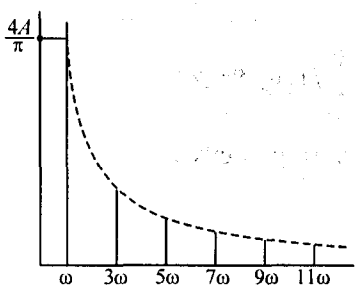


Рис. 8.10

На рис. 8.10 изображена дискретная амплитудно-частотная характеристика для функции времени, показанной на рис. 8.7, при $\tau = 0$.

8.8. Биения колебаний

На практике используются несинусоидальные токи и напряжения, которые не могут быть представлены в виде ряда Фурье, содержащего составляющие с частотами, кратными основной частоте, и вместе с тем обладают в известном отношении периодичностью своих изменений. Сюда относятся несинусоидальные токи и напряжения, изображаемые *кривыми с периодической огибающей*. К ним принадлежат так называемые биения колебаний и модуляция колебаний.

Рассмотрим случай биения колебаний. Пусть в некоторой цепи налагаются два синусоидальных тока: $i_1 = I_m \sin \omega_1 t$ и $i_2 = I_m \sin \omega_2 t$, имеющие одинаковые амплитуды, но разные частоты, причем частоты ω_1 и ω_2 близки друг к другу, так что разность их значительно меньше каждой из них:

$$|\omega_1 - \omega_2| < \omega_1 \quad \text{и} \quad |\omega_1 - \omega_2| < \omega_2.$$

Результирующий действительный ток в цепи при этом равен

$$i = i_1 + i_2 = I_m(\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t) = 2I_m \cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t.$$

Так как $\left|\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right| < \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, то кривую тока i можно рассматривать как синусоиду с угловой частотой $\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)$, амплитуда которой изменяется сравнительно медленно по закону $2I_m \left|\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t\right|$.

Так как амплитуда есть величина существенно положительная, а величина $\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t$ меняет знак в моменты перехода ее через нуль, то это равносильно скачкообразному изменению в эти моменты времени фазы синусоидальных колебаний с частотой $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ на угол π.

На рис. 8.11 изображены биения колебаний для случая $\frac{\omega_1 + \omega_2}{|\omega_1 - \omega_2|} = 26/3$, т. е. для случая $\omega_1/\omega_2 = 29/23$.

Частотой биений $f_б$ принято называть частоту, определяемую числом максимумов огибающей кривой в единицу времени. Соответственно, величину $T_б = 1/f_б$ (рис. 8.11) называют периодом биений. Таким образом, период биений равен половине периода функции $\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$.

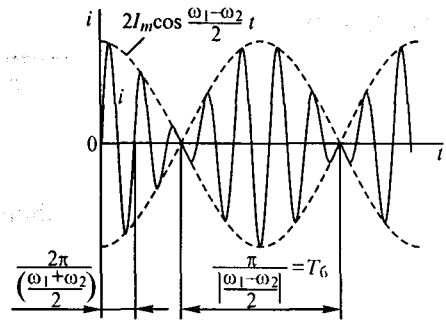


Рис. 8.11

Легко усмотреть из рисунка, что характер результирующей кривой не повторяется в двух соседних периодах биений. В рассмотренном примере характер результирующей кривой будет повторяться только через три периода функции $\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$, т. е. через $6T_б$, так как в этом интервале времени укладывается целое число периодов функции $\sin\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$, и число скачкообразных изменений ее фазы на угол π является четным числом 6.

Таким образом, период результирующей кривой больше периода биений. Если отношение ω_1/ω_2 является иррациональным числом, то период результирующей кривой обращается в бесконечность и, следовательно, эта кривая не является периодической. Тем не менее, понятие о периоде биений $T_б$ сохраняет определенный смысл.

Явление биений колебаний с успехом используется для установления отклонения частоты ω_1 колебаний в одной системе от частоты ω_2 колебаний в другой системе. Измеряя частоту биений, получаем возможность наблюдать весьма малые отклонения $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ по сравнению с самими величинами ω_1 и ω_2.

Так как результирующая кривая $i = f(t)$ в общем случае не является периодической, то для вычисления действующего тока $i = f(t)$, строго говоря, мы не можем пользоваться методами, установленными в § 8.3.

Однако если условиться под действующим значением I понимать среднее квадратическое значение тока $i = f(t)$ за достаточно большой промежуток времени $\tau >> T_б$, то с большой точностью можно вычислить значение I как корень квадратный из суммы квадратов действующих значений составляющих, имеющих частоты ω_1 и ω_2. Так, в рассмотренном примере при одинаковых амплитудах I_m этих составляющих имеем

$$I = \sqrt{\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} i^2(t)dt} \approx \sqrt{\left(\frac{I_m}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{I_m}{\sqrt{2}}\right)^2} = I_m = \frac{2I_m}{2},$$

т. е. в этом случае значение действующего тока, которое покажет обычный прибор переменного тока, равно половине максимума огибающей кривой.

8.9. Модулированные колебания

Другим видом несинусоидальных токов, изображаемых кривой с периодической огибающей, являются модулированные токи. В случае так называемой амплитудной модуляции они описываются уравнением

$$i = I_m \sin\omega t = I_0(1 + m\sin\Omega t)\sin\omega t,$$

причем Ω — частота модуляции — много меньше частоты ω, называемой несущей частотой. Коэффициент m, лежащий в пределах $0 < m < 1$, называют коэффициентом модуляции. Таким образом, модулированный ток можно рассматривать как ток частоты ω, амплитуда которого изменяется периодически с частотой Ω (рис. 8.12).

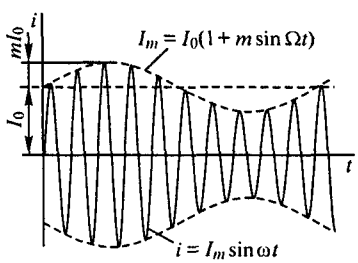


Рис. 8.12

Модуляция применяется в проводной и радиосвязи. В передающем устройстве на колебания с основной несущей частотой ω воздействуют со звуковой частотой Ω, создавая таким образом модулированные колебания. Модуляция осуществляется обычно с помощью нелинейных элементов электрической цепи, например путем подачи колебаний несущей и звуковой частот на сетку электронной лампы и подбора условий работы лампы на нелинейном участке ее характеристики.

Переписав выражение для модулированного тока в форме

$$i = I_0 \sin\omega t + \frac{1}{2}mI_0\cos(\omega - \Omega)t - \frac{1}{2}mI_0\cos(\omega + \Omega)t,$$

видим, что его можно рассматривать как сумму трех синусоидальных токов. Первый из них имеет несущую частоту ω, а два других изменяются с частотами $\omega - \Omega$ и $\omega + \Omega$, которые называют боковыми частотами. Так как $\Omega \ll \omega$, то боковые частоты близки к несущей. Передача сигнала по проводам или по радио производится на несущей и боковых частотах. В приемном устройстве вновь выделяются колебания со звуковой частотой с помощью процесса детектирования.

О действующем модулированном токе можно привести те же соображения, что и в случае биений. Пользуясь последним выражением для модулированного тока и выбирая $\tau >> 2\pi/\Omega$, получаем

$$I = \sqrt{\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} i^2 dt} \approx \sqrt{\left(\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{m}{2}\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{m}{2}\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2+m^2}{2}}.$$

При $m = 0$, т. е. при отсутствии модуляции, $I = I_0/\sqrt{2}$, так как при этом ток i изменяется по синусоидальному закону. При $m = 1$, т. е. при стопроцентной модуляции, $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}\sqrt{1{,}5}$.

Помимо рассмотренной выше амплитудной модуляции, осуществляют также частотную и фазовую модуляции, воздействуя от модулирующего устройства или на частоту ω, или на начальную фазу ψ тока i. Частотная модуляция при радиопередаче имеет большое достоинство в том, что при ней легче избавляться от мешающих влияний, вызывающих шумы в приемнике.

Алфавитный указатель

А

активное напряжение, 197
активный ток, 197
амплитуда напряжения, тока, ЭДС, 177
анализ электрических цепей, 174

Б

баланс мощностей, 280
биения колебаний, 348

В

векторная диаграмма, 183
векторы вращающиеся, 182
ветвь электрической цепи, 152
  y-ветвь, 258
  z-ветвь, 258
  обобщенная, 159
взаимная индуктивность, 60, 145
вихревые токи, 201
включение
  встречное, 271
  согласное, 271
вращающееся магнитное поле, 327
  круговое, 329
  пульсирующее, 329
высшие гармоники, 335
  в трехфазных цепях, 343

Г

граф
  направленный, 153
  связный, 153
  схемы
    дерево двойное, 286
  электрической схемы, 153

Д

двухполюсник
  активный, 152
  пассивный, 153
действующее значение
  синусоидальные напряжения, токи, ЭДС, 181
  несинусоидальные напряжения, токи, ЭДС, 340
  периодические напряжения, токи, ЭДС, 180
дерево графа, 154
диаграмма топографическая, 326
диэлектрическая
  восприимчивость, 30
  проницаемость
    абсолютная, 34
    относительная, 34
добротность контура, 303

З

закон
  Джоуля–Ленца, 45
  Кирхгофа
    второй, 158
    второй в комплексной форме, 229
    первый, 157
    первый в комплекной форме, 229
  Кулона, 27
  Ома, 45
    в комплексной форме, 229
    в матричной форме, 243
  полного тока, 73

закон (*продолжение*)
электромагнитной индукции
в формулировке Максвелла, 56
в формулировке Фарадея, 58
заряд
электрический, 18
связанный, 32
элементарный, 19
затухание контура, 303

И

индуктивность
собственная, 60
эквивалентная, 271
источник
идеальный, 147
тока, 146
зависимый, 148
ЭДС, 146
зависимый, 148
энергии, 51, 130

К

колебания энергии, 192
комплексная
амплитуда, 225
мощность, 230
проводимость, 229
сопротивление, 228
комплексные напряжение, ток, ЭДС, 227
комплексный метод, 224
контур электрической цепи, 152
коэффициент
амплитуды, 182
модуляции, 350
мощности, 190
при периодических несинусоидальных напряжениях и токах, 342
связи, 278
формы, 182

Л

линии
магнитной индукции, 53
напряженности магнитного поля, 71
напряженности электрического поля, 23
равного потенциала, 48
тока, 37
линия электрического смещения, 35

М

магнитная индукция, 23
магнитная постоянная, 66
магнитный момент элементарного тока, 71
магнитный пояс, 67
магнитодвижущая сила, 73
Максвелла
постулат, 35
матрица
единичная, 169
контуров, 164
сечений, 166
соединений, 156
обратная, 171
сопротивлений, 234
столбцовая, 161
транспонированная, 157
мгновенные напряжение, ток, ЭДС, 177
метод
контурных токов, 242
симметричных составляющих, 329
топологический
расчета цепей, 283
узловых напряжений, 249
эквивалентного генератора, 267
многофазная система, 321
несимметричная, 322
неуравновешенная, 322
симметричная, 321

многофазная система (*продолжение*)
симметричная нулевой последовательности, 322
симметричная обратной последовательности, 322
симметричная прямой последовательности, 322
уравновешенная, 322
модуляция колебаний, 348
амплитудная, 350
фазовая, 351
частотная, 351
мощность
активная, 189
при несинусоидальных напряжениях и токах, 341
мгновенная, 189, 192
полная, 190
реактивная, 190
трехфазной системы, 325

Н

намагниченность вещества, 70, 72
напряжение
линейное, 324
фазное, 324
электрическое, 44
напряженность
магнитное поле, 70
электрическое поле, 22
нейтральная точка, 323
нейтральный провод, 323

О

объемная плотность энергии
магнитное поле, 82
электрическое поле, 77
основная (первая) гармоника ряда Фурье, 335

П

падение напряжения, 45
параметры эквивалентные, 195
периодические напряжения, токи, ЭДС, 180, 335
плотность тока, 36
поверхностный эффект, 201
поверхность равного потенциала, 47
поле
магнитное, 21, 23
электрическое, 21 - 22
вихревое, 64
потенциальное, 47, 64
стационарное, 47
стороннее, 49
электромагнитное, 19
электростатическое, 45
полный ток, 35, 73
полоса пропускания, 306
поляризованность вещества, 30
постоянная составляющая ряда Фурье, 335
потенциал
электрический, 45, 47
потери на вихревые токи, 201
поток
вектора напряженности электрического поля, 28
взаимной индукции, 60
магнитный, 52
самоиндукции, 60
потокосцепление, 59
преобразование источников, 240
преобразование соединения треугольником в эквивалентное соединение звездой, 238
принцип
взаимности, 265
наложения, 263
непрерывности магнитного потока, 54
непрерывности электрического тока, 42
электромагнитной инерции, 61

проводимость
активная, 189
взаимная, 255
волновая, 308
входная, 255
емкостная, 189
индуктивная, 189
общая, 251
полная, 189
реактивная, 189
собственная, 251
электрическая
удельная, 37
пустота, 19

Р

разность потенциалов
электрических, 46, 64
расстройка контура, 307
реактивное напряжение, 197
реактивный ток, 197
резонанс, 302
в индуктивно-связанных
контурах, 317
напряжений, 303
при параллельном соединении
участков *g*, *L*, *C*, 307
при последовательном
соединении, 302
токов, 308

С

связи графа, 154
силы
в электрическом поле, 85
в электромагнитном поле, 87
симметричные составляющие
трехфазной системы, 329
синтез электрических цепей, 174
соединение
параллельное, 152, 231
последовательное, 152, 231
(связывание) звездой, 323
соединение (*продолжение*)
(связывание)
многоугольником, 323
(связывание) треугольником, 324
смешанное, 152
сопротивление
активное, 185
активное эквивалентное, 196
взаимное, 249
вносимое
активное, 277
реактивное, 277
входное, 249
емкостное, 185
индуктивное, 185
контурное, 243
общее, 246, 249
полное, 185
полное эвивалентное, 196
реактивное, 185
реактивное эквивалентное, 196
собственное, 246, 249
электрическое
удельное, 37
спектр дискретный, 348
среднее значение синусоидальных
напряжений, токов, ЭДС, 181
схема
замещения электрической
цепи, 150
электрическая
цепи, 149

Т

теорема
Гаусса, 26
Ланжевена, 280
Нортона, 268
Тевенена, 267
ток
линейный, 324
переноса, 38
проводимости, 36

ток (*продолжение*)
фазный, 324
электрический, 36
поляризации, 39
электрического смещения, 39
трансформатор
идеальный, 279
линейный, 275
совершенный, 278
треугольник
напряжений, 197
проводимостей, 197
сопротивлений, 197
токов, 197
трубка
магнитной индукции, 52
напряженности электрического поля, 23
тока, 37
электрического смещения, 35

У

угол сдвига фаз напряжения, тока, ЭДС, 178
узел электрической цепи, 152
усилитель
операционный, 149
устанавившиеся величины, 177
установившиеся величины, 184, 187

Ф

фаза напряжения, тока, ЭДС, 177
начальная, 177

Х

характеристика
амплитудно-частотная, 348
внешняя, 147
вольт-амперная, 138
фазо-частотная, 348

Ц

цепи
сложные, 233
цепь
активная, 131
линейная, 139
магнитная, 130
нелинейная, 139
пассивная, 131
с распределенными параметрами, 134
с сосредоточенными параметрами, 137
электрическая, 130

Ч

частота
модуляции, 350
напряжения, тока, ЭДС, 177
несущая, 350
резонансная, 303
угловая, 177
частотные характеристики, 302
цепей в общем случае, 314
цепей из реактивных элементов, 311
цепи с параллельным соединением участков g, L, C, 309
цепи с последовательным соединением участков *r*, *L*, *C*, 304

Э

электрическая
емкость, 48
постоянная, 27
электрические фильтры, 340
электрический диполь, 29
электрический момент диполя, 29
электрическое смещение, 33
электродвижущая сила, 49
взаимной индукции, 60
самоиндукции, 60
энергия
магнитного поля, 81
системы контуров с токами, 81
электрического поля, 77

Учебное издание

Демирчян Камо Серопович
Нейман Леонид Робертович
Коровкин Николай Владимирович
Чечурин Владимир Леонидович

Теоретические основы электротехники
Том 1

4-е издание

Главный редактор	*Е. Строганова*
Заведующий редакцией	*И. Корнеев*
Руководитель проекта	*К. Быстров*
Художник	*Н. Биржаков*
Корректоры	*Н. Рощина, И. Смирнова*
Верстка	*П. Быстров*

Лицензия ИД № 05784 от 07.09.01.

Подписано в печать 27.11.03. Формат 70×100/16. Усл. п. л. 37,41.
Доп. тираж 4000 экз. Заказ № 1184.
ООО «Питер Принт». 196105, Санкт-Петербург, ул. Благодатная, д. 67в.
Налоговая льгота – общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 – литература учебная.
Отпечатано с фотоформ в ФГУП «Печатный двор» им. А. М. Горького
Министерства РФ по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.
197110, Санкт-Петербург, Чкаловский пр., 15.

Вопросы, упражнения, задачи к главам 1 и 2

1.1. Связь заряда частиц и тел с их электрическим полем. Теорема Гаусса

ВОПРОСЫ

1. (О) Можно ли утверждать, что два одноименно заряженные и расположенные в пустоте тела отталкиваются? Необходимо ли для такого утверждения условие, чтобы тела были точечными?

2. Под действием силы со стороны электрического поля заряженная частица движется вдоль линии напряженности. Какой вид имеет линия напряженности?

3. В какой из точек (*A* или *B*) напряженность *E* электрического поля больше (рис. В1.1)?

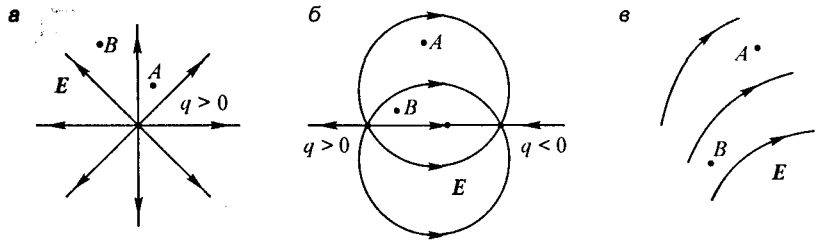


Рис. В1.1

4. (О) Обращается ли в нуль напряженность электрического поля в точках *A*, *B*, *C* при указанной на рис. В1.2 линейной плотности τ_1 зарядов жилы *1* и τ_2 оболочки *2* кабеля?

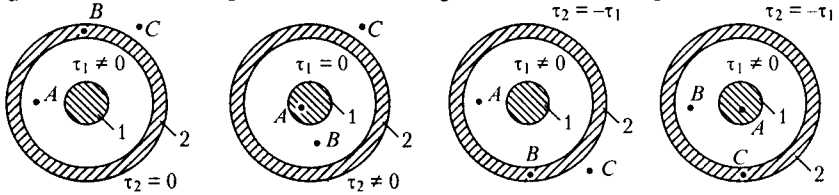


Рис. В1.2

5. Можно ли рассчитать напряженность электрического поля с помощью теоремы Гаусса, если заряженные тела расположены не в пустоте, а в: *а*) однородном диэлектрике; *б*) кусочно-однородном диэлектрике?

6. Поток вектора напряженности электрического поля сквозь любую из замкнутых поверхностей в выбранной области равен нулю. Может ли в этой области существовать электрическое поле? Могут ли в ней находиться электрические заряды?

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Движущаяся со скоростью $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ заряженная частица испытывает со стороны магнитного поля силу $\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{i} + n\boldsymbol{j} + p\boldsymbol{k}$. Рассчитайте составляющие вектора магнитной индукции при: *а*) $\boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{f} = 1\boldsymbol{i}$; *б*) $\boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 1\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{f} = 2{,}5\boldsymbol{i}$; *в*) $\boldsymbol{v} = 1{,}5\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 0{,}5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{f} = -4{,}5\boldsymbol{i} - 2{,}25\boldsymbol{j} - 4{,}5\boldsymbol{k}$. Заряд частицы q.

2. Весьма длинные параллельные тонкие заряженные провода расположены в воздухе. Определите направление и величину вектора напряженности электрического поля в указанных на рис. В1.3 точках *A*, *B*, *C* при заданных положениях проводов и линейной плотности их зарядов.

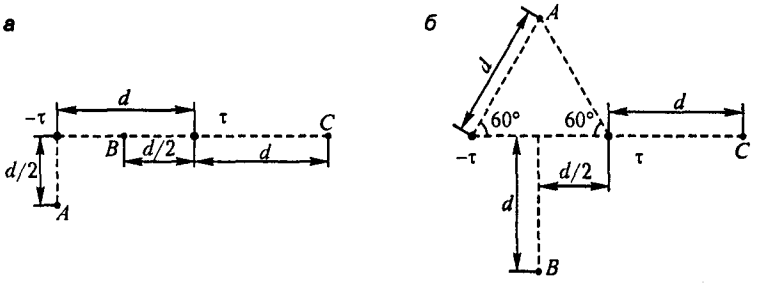


Рис. В1.3

3. (Р) Постройте кривую изменения напряженности электрического поля вдоль прямой *ab*, соединяющей сечения двух очень длинных параллельных проводов *1* и *2* (рис. В1.4). Линейные плотности зарядов $\tau_1 > 0$, $\tau_2 = -\tau_1$.

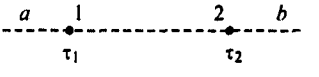


Рис. В1.4

4. (Р) Каким должен быть закон изменения в пространстве объемной плотности $\rho(r)$ электрического заряда, при котором поток вектора напряженности $\boldsymbol{E}$ электрического поля сквозь сферическую поверхность r = const: *а*) не зависит от r; *б*) стремится к нулю с ростом r; *в*) пропорционален заданной функции $f(r)$ (ε = const всюду)?

5. Найдите поток вектора напряженности электрического поля сквозь указанные на рис. В1.5 поверхности. Для вариантов *а*—*г* $\varepsilon = \varepsilon_0$ всюду.

6. (Р) Объясните, почему изображенные на рис. В1.6 линии не могут быть линиями напряженности электрического поля, если свободные заряды в части пространства, где изображены линии, отсутствуют.

7. Используя свойство симметрии поля, изобразите семейство линий напряженности электрического поля заряда, распределенного равномерно: *а*) на бесконечно протяженной плоскости; *б*) на поверхности бесконечно длинного проводящего цилиндра радиусом R; *в*) в объеме бесконечно длинного цилиндра радиусом R; *г*) на поверхности проводящего шара; *д*) в объеме сферы; *е*) на поверхности тонкого проводящего диска радиусом R; *ж*) вдоль тонкого кругового проводящего витка радиусом R; *з*) в объеме бесконечно протяженной пластины толщиной h.

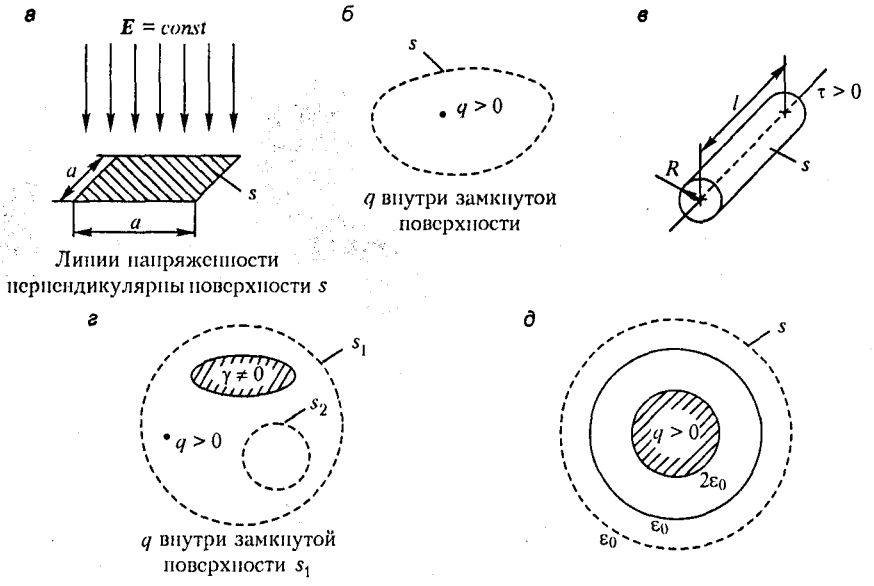


Рис. В1.5

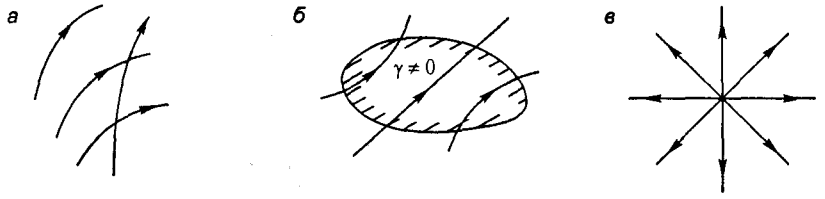


Рис. В1.6

ЗАДАЧИ

1. (Р) Две равномерно заряженные безграничные пластины с поверхностной плотностью заряда $+\sigma$ и $-\sigma$ расположены параллельно друг другу на расстоянии d. Рассчитайте напряженность электрического поля в области между пластинами и вне их. Постройте кривую изменения напряженности поля вдоль прямой, нормальной к пластинам.

2. Линейная плотность электрического заряда очень длинного прямого тонкого провода равна τ. Найдите напряженность электрического поля в точках вне провода.

3. Определите напряженность электрического поля в точках между обкладками: *а*) плоского конденсатора. Расстояние между обкладками d, поверхностные плотности их зарядов $+\sigma$ и $-\sigma$; *б*) цилиндрического конденсатора. Радиусы обкладок R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$), линейные плотности зарядов обкладок $+\tau$ и $-\tau$; *в*) сферического конденсатора. Радиусы обкладок R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$), их заряды $+q$ и $-q$. Диэлектрическую проницаемость вещества, помещенного между обкладками, примите

равной $2\varepsilon_0$. Расстояние между обкладками значительно меньше их линейных размеров.

4. Расположенный в пустоте весьма длинный прямолинейный заряженный провод радиусом сечения $R_0 = 1$ см с линейной плотностью заряда $\tau = 2 \cdot 10^{-7}$ Кл/м охвачен соосной с ним проводящей незаряженной трубой с толщиной стенки $d = 0{,}5$ см и внутренним радиусом $R = 3$ см. Рассчитайте и постройте зависимость напряженности электрического поля от расстояния r от оси провода. Укажите, в каких областях электрическое поле изменится, а в каких останется неизменным, если трубе сообщить заряд, линейная плотность которого $\tau = -2 \cdot 10^{-7}$ Кл/м.

5. (Р) Электрическое поле в воздухе создается зарядом весьма длинного прямолинейного провода радиусом R с линейной плотностью τ. Найдите радиус цилиндрической области, в которой воздух ионизирован, если напряженность электрического поля, при которой происходит ионизация воздуха, равна $E = 23{,}3$ кВ/см. Численный расчет выполните при $R = 1{,}2$ см, $\tau = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл/м.

6. (Р) Круговой проводящий виток радиусом R равномерно заряжен с линейной плотностью заряда τ. Отсчитывая координату z вдоль оси от плоскости витка, найдите ее значение, при котором осевая составляющая напряженности поля будет наибольшей. Расчет выполните при $R = 0{,}2$ м, $\tau = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл/м, $\varepsilon = \varepsilon_0$.

7. (Р) В шаре из диэлектрика, заряженном с объемной плотностью заряда ρ, имеется сферическая незаряженная полость (вкрапление). Покажите, что электрическое поле внутри полости однородное. Найдите напряженность этого поля. Диэлектрическая проницаемость во всех точках пространства ε. Расстояние между центрами шара и вкрапления равно d.

8. (Р) Покажите, что в объеме, общем для двух разноименно заряженных шаров радиусами R с объемной плотностью ρ и $-\rho$, электрическое поле однородное (рис. В1.7). При $d \to 0$, $\rho \to \infty$ и условии $\rho d = \text{const}$ шары совмещаются, причем внутри них $\rho = 0$. Каково при этом распределение плотности получаемого на поверхности заряда, при котором поле внутри шаров однородное? Найдите соотношение между напряженностью поля и наибольшей плотностью электрического заряда на поверхности.

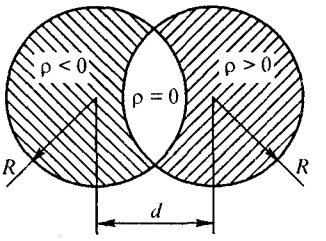


Рис. В1.7

1.2. Электрическое смещение. Постулат Максвелла

ВОПРОСЫ

1. (О) Проводящее заряженное тело с зарядом $+q$ расположено в области, где диэлектрические проницаемости сред $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 < \varepsilon_3$ (рис. В1.8). Какие знаки имеют связанные заряды на поверхностях s_1, s_2, s_3? Изменятся ли связанные заряды, если заряд тела равен $-q$?

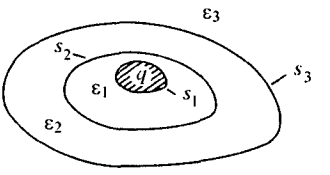


Рис. В1.8

2. Для увеличения емкости конденсатора пространство между его обкладками ($\varepsilon = \varepsilon_0$) заполняют веществом с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 5\varepsilon_0$. Изменится ли напряженность электрического поля между обкладками, если их заряд сохраняется тем же?

3. (О) Линии напряженности однородного электрического поля направлены нормально к поверхности раздела двух сред, диэлектрические проницаемости которых различны ($\varepsilon_1 > \varepsilon_2$). Линии векторов $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$ проведены так, что они образуют трубки с одинаковыми значениями потока $\Delta\Psi_D$ и потока $\Delta\Psi_E$. В какой из сред плотность линий напряженности поля больше и почему?

4. (О) Электрический заряд расположен в полости незаряженного проводящего тела (рис. В1.9). Чему равен поток вектора электрического смещения сквозь замкнутую поверхность, охватывающую: *а*) заряд и проводящее тело (s_1); *б*) заряд и частично проводящую среду (s_2); *в*) только заряд (s_3)? Объясните следующее противоречие. В случае *б*), когда поверхность охватывает заряд, проходя полностью в проводящей среде, в соответствии с постулатом Максвелла $\oint_s \boldsymbol{D}d\boldsymbol{s} = q$. Однако в проводнике $\boldsymbol{D} = 0$ и, следовательно, $\oint_s \boldsymbol{D}d\boldsymbol{s} = 0$.

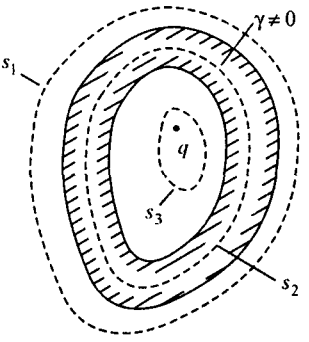


Рис. В1.9

5. (О) Всегда ли на границе двух диэлектриков, находящихся в электрическом поле, появляется связанный электрический заряд?

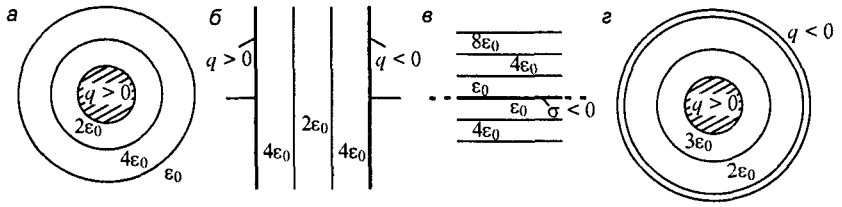
6. (О) Укажите направление вектора напряженности электрического поля на поверхности заряженного проводника. При каком направлении главных осей анизотропии окружающего проводник диэлектрика вектор электрического смещения на его поверхности имеет то же направление, что и вектор напряженности электрического поля?

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

1. (Р) Оси прямоугольной системы координат совпадают с главными осями анизотропии кристаллического тела. Запишите составляющие тензора диэлектрической проницаемости. Изменятся ли составляющие тензора при: *а*) параллельном переносе осей координат; *б*) повороте осей координат на некоторый угол.

2. (Р) В какой из областей, изображенных на рис. В1.10, плотность линий напряженности электрического поля больше, если они проведены так, что разбивают все пространство на трубки равного потока $\Delta\Psi_E$? Постройте кривые изменения величин D, E, P вдоль координаты изменения диэлектрической проницаемости.

3. Поверхности слоев плоского трехслойного конденсатора являются плоскими и параллельными его обкладкам. Постройте кривые изменения величин D, E, P между обкладками вдоль нормальной к ним линии. Диэлектрические проницаемости ε_r слоев указаны в таблице на следующей странице.



Сфера | Плоский конденсатор | Плоскость | Цилиндрический конденсатор

Рис. В1.10

Номер слоя	Варианты					
	1	2	**3**	4	5	6
1	1	2	1	1	2	5
2	1	2	2	2	5	2
3	2	1	1	5	1	1

4. (Р) При неплотном прилегании слоя диэлектрика к поверхности внутренней обкладки однослойного цилиндрического конденсатора между ними образовался равномерный воздушный промежуток. Допуская, что заряды обкладок при этом не изменились, найдите, во сколько раз возрастет из-за этого напряженность электрического поля на поверхности внутренней обкладки; ее радиус R, диэлектрическая проницаемость вещества слоя ε_r.

5. Погода вначале была сухая, потом пошел дождь, на проводах воздушной линии передачи появился слой воды, после чего похолодало и на них образовалась наледь. В какую погоду напряженность электрического поля на поверхности проводов наибольшая? Во сколько раз изменяется напряженность поля на поверхности проводов при изменении погоды при условии, что заряды проводов неизменны?

Примечание. Относительная диэлектрическая проницаемость воды $\varepsilon_r = 88$, льда $\varepsilon_r = 3{,}1$.

6. (Р) Линии вектора поляризованности нормальны к поверхности раздела двух сред с различными диэлектрическими проницаемостями. Получите выражение, связывающее вектор поляризованности $\boldsymbol{P}$ с поверхностной плотностью связанного электрического заряда.

1.3. Виды электрического тока и принцип непрерывности электрического тока

ВОПРОСЫ

1. (О) К какому виду электрического тока следует отнести явление: *а*) движения заряженных частиц в неидеальном диэлектрике под действием не изменяющегося во времени электрического поля; *б*) движения электронов в пространстве между электродами электронной лампы; *в*) движения электронов в изолирован-

ном проводящем теле под действием электрического поля; *г*) движения заряженных частиц в идеальном диэлектрике под действием изменяющегося во времени электрического поля?

2. (О) Незаряженное проводящее тело перемещается в неоднородном электрическом поле. Протекает ли ток в объеме тела, а также в окружающем его пространстве?

3. (О) В пространство между обкладками заряженного плоского воздушного конденсатора вносят, не касаясь их, незаряженное тело. Пройдет ли при этом ток в теле?

4. (О) В присоединенном к источнику постоянного напряжения конденсаторе одна из обкладок совершает механические колебания, периодически приближаясь и удаляясь от другой. Протекает ли при этом ток в конденсаторе?

5. Заряженное проводящее тело перемещается в пустоте. Возникает ли при этом ток смещения? Ток переноса? Ток проводимости?

6. Линии тока проведены так, что они разделяют пространство на трубки, сквозь сечение которых течет одинаковый ток. Можно ли по виду линий судить о том, в каких точках плотность тока больше, а в каких меньше?

7. (О) Электрический заряд перемещается вблизи проводящего незаряженного тела. Возникает ли ток проводимости в этом теле? Изобразите одну из замкнутых линий электрического тока.

УПРАЖНЕНИЯ

1. (О) Укажите направление вектора плотности тока смещения в точке, расположенной на некотором расстоянии от тела, положительный заряд которого возрастает.

2. В точке между обкладками конденсатора направление вектора смещения известно. Укажите направление вектора плотности тока в этой точке при зарядке и разрядке конденсатора.

3. (Р) Точечный заряд q движется равномерно в однородной среде по окружности радиусом R с угловой скоростью ω. Запишите выражение плотности тока смещения в центре окружности.

4. (Р) Закон изменения электрического смещения $D(t)$ в точке указан на графиках рис. В1.11. Рассчитайте зависимости $J_{см}(t)$ и изобразите их на графиках.

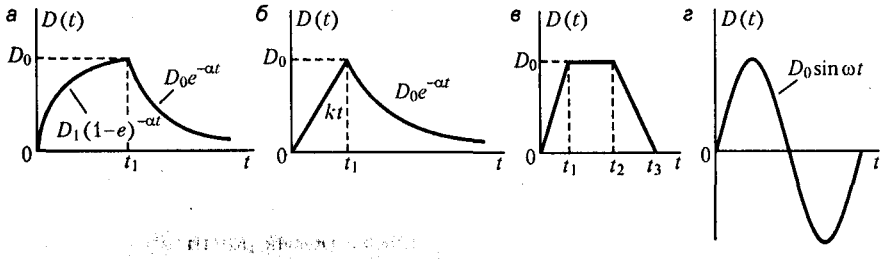


Рис. В1.11

5. (Р) Вектор плотности тока электрического смещения $\boldsymbol{J}_{см} = \boldsymbol{i} J_{см.t}$ изменяется по указанному на рис. В1.12 закону. Изобразите зависимости $D(t)$.

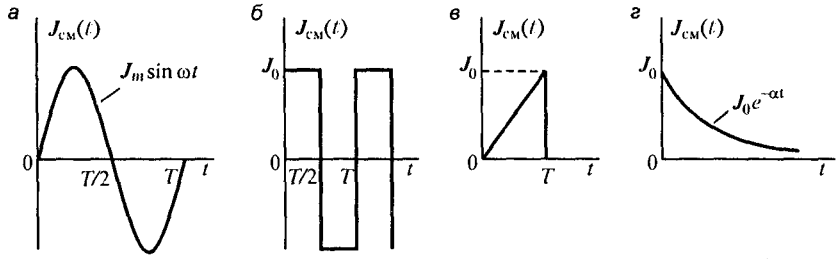


Рис. В1.12

ЗАДАЧИ

1. (Р) Изоляция цилиндрического коаксиального кабеля имеет удельную электрическую проводимость $\gamma = 10^{-7}$ См/м. Радиус жилы кабеля $R_1 = 4$ мм, внутренний радиус оболочки $R_2 = 8$ мм. Рассчитайте проводимость изоляции и ток проводимости между жилой и оболочкой, плотность тока проводимости на поверхностях жилы и оболочки, мощность потерь в изоляции кабеля длиной 100 м при напряжении между жилой и оболочкой $u(t) = 220\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (В). Рассчитайте также ток смещения и плотность тока смещения на поверхностях жилы и оболочки. Относительная диэлектрическая проницаемость изоляции $\varepsilon_r = 5$.

2. (Р) Сферический заземлитель, представляющий собой проводящую сферу радиусом $R = 0{,}5$ м, погружен в землю на глубину $h \gg R$. Принимая удельную электрическую проводимость почвы $\gamma = 10^{-2}$ См/м, ее относительную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_r = 2$, рассчитайте плотность токов проводимости и смещения, а также мощность потерь при вводимом в заземлитель токе $i = 100\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (А).

Примечание. Учитывая соотношение $h >> R$, окружающую заземлитель почву примите безграничной.

3. (Р) Относительная диэлектрическая проницаемость среды между обкладками конденсатора и ее удельная электрическая проводимость равны, соответственно, $\varepsilon_r = 8$ и $\gamma = 10^{-6}$ См/м. При какой частоте изменения приложенного к конденсатору напряжения амплитуды токов проводимости и смещения равны?

4. (Р) Между обкладками плоского конденсатора параллельно им вставлена тонкая проводящая пластина, удельная электрическая проводимость которой $\gamma = 3{,}5 \cdot 10^7$ См/м. Ток конденсатора $i = 10^{-3} \sin 10^5 t$ (А), площадь каждой из обкладок $S = 10$ см^2 равна площади пластины. Рассчитайте плотность тока проводимости в пластине и напряженность электрического поля в ней. Правомерно ли при заданных значениях допустить, что напряженность электрического поля в пластине значительно меньше напряженности поля в диэлектрике, и определить плотность поверхностного электрического заряда пластины как $\sigma = D = \varepsilon E$? Диэлектрическая проницаемость вещества между обкладками $80\varepsilon_0$. Краевым эффектом можно пренебречь.

1.4. Электрическое напряжение и потенциал

ВОПРОСЫ

1. (О) При перемещении заряженного тела вдоль некоторого пути работа не совершается. Каково направление вектора $\boldsymbol{E}$ по отношению к траектории перемещения в точках пути?

2. Силы поля совершают работу по перемещению тела с зарядом $q < 0$. В каком направлении перемещается тело, если электрическое поле однородное и направление вектора $\boldsymbol{E}$ задано?

3. Под действием силы поля тело с зарядом $q > 0$ переместилось из точки A в точку B. Каков знак напряжения u_{AB}?

4. По проводу (рис. В1.13) течет постоянный ток i. Одинаковое ли значение принимает интеграл $\int_A^B \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l}$, вычисляемый вдоль путей *1* и *2*, если путь *1* проходит полностью вне провода, а путь *2* — своей частью, указанной пунктирной линией, — в проводе?

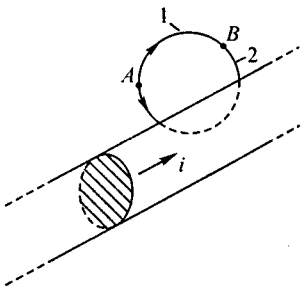


Рис. В1.13

5. Напряжение между любыми точками в некоторой области равно нулю. Означает ли это, что в ней электрическое поле отсутствует?

6. (О) Напряжение между любыми точками на данной поверхности равно нулю. Означает ли это отсутствие электрического поля на поверхности?

7. (О) Имеются ли ограничения, налагаемые на выбор точки, в которой потенциал электрического поля можно принять равным нулю?

8. Можно ли, изобразив линии напряженности электрического поля, определить направление, в котором потенциал: *а*) возрастает с наибольшей скоростью; *б*) не изменяется; *в*) уменьшается с наибольшей скоростью?

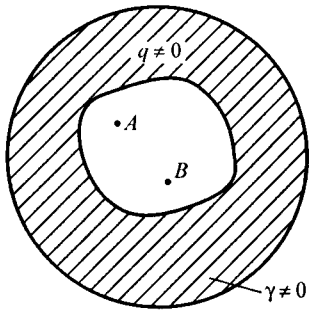


Рис. В1.14

9. Изменится ли напряженность электрического поля, если изменить потенциал во всех точках существования поля: *а*) на одно и то же число; *б*) в k раз?

10. Существует ли электрическое поле в полости (рис. В1.14) заряженного проводящего тела? Чему равна разность потенциалов между точками A, B?

11. (О) Имеет ли смысл понятие емкости: *а*) бесконечно длинного прямого провода; *б*) точечного тела; *в*) тела из вещества с диэлектрической проницаемостью ε; *г*) проводящего тела с полостью, заполненной диэлектриком; *д*) проводящего листа конечных размеров?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Постройте кривую изменения потенциала между обкладками конденсатора для условий упражнения 3 § 1.2.

2. (Р) Вдоль прямой $0x$, соединяющей пластины плоского многослойного конденсатора, потенциал изменяется по одному из указанных на рис. В1.15 законов. Сколько слоев диэлектрика имеет конденсатор? Каким образом можно определить соотношение между диэлектрическими проницаемостями слоев из графика? Постройте кривые изменения напряженности поля между обкладками.

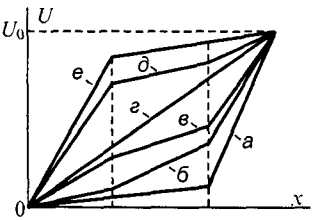


Рис. В1.15

3. Напряженность электрического поля между обкладками плоского многослойного конденсатора изменяется по указанному на рис. В1.16 закону. Определите число слоев диэлектрика в каждом из примеров и соотношение между диэлектрическими проницаемостями вещества слоев. Изобразите кривые изменения потенциала между обкладками.

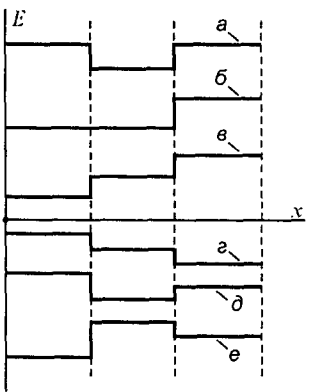


Рис. В1.16

4. Найдите разность потенциалов между указанными на рис. В1.17 точками A, B. Решите задачу для случаев, когда поле создано *а*) точечными телами, *б*) линейными весьма длинными прямыми проводами, плотность зарядов которых указана в скобках. Диэлектрическая проницаемость среды равна ε_0.

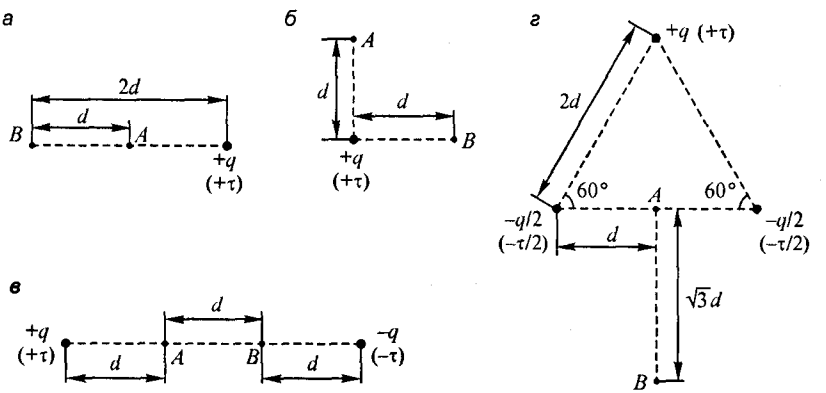


Рис. В1.17

5. Найдите разность потенциалов между точками A, B (рис. В1.18). Расчет выполните для случаев, когда поле создано: *а*) проводящим шаром радиусом R; *б*) шаром радиусом R с объемной плотностью заряда ρ; *в*) весьма длинным проводящим цилиндром радиусом R; *г*) весьма длинным цилиндром радиусом R с объемной плотностью заряда ρ. Диэлектрическая проницаемость среды равна ε_0. Примите $r_A = 0{,}6R$ (вариант *б*), $r_A = 0{,}8R$, $r_B = 0{,}6R$ (вариант *в*).

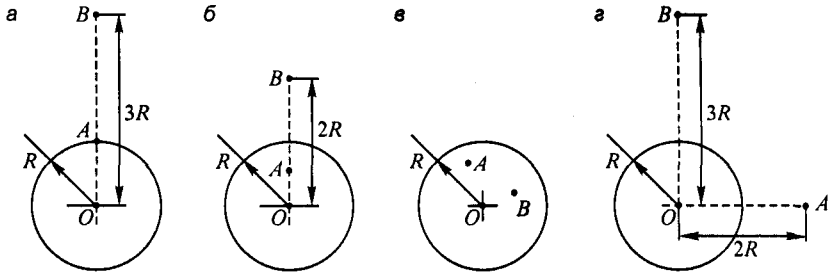


Рис. В1.18

ЗАДАЧИ

1. (Р) Получите выражение для определения потенциала поля двух разноименных точечных зарядов $+q$ и $-q$, расстояние между которыми d. Упростите его для случая, когда потенциал следует искать в точках, расстояние r до которых значительно превышает d.

2. (Р) Используя полученное ранее выражение (см. задачу 1, §1.1) для напряженности поля, создаваемого двумя бесконечно протяженными заряженными плоскостями, выведите выражение для потенциала поля. Расстояние между плоскостями d, поверхностная плотность их зарядов $+\sigma$ и $-\sigma$. Изобразите кривую изменения потенциала вне и между плоскостями вдоль прямой, нормальной плоскостям.

3. (Р) Рассчитайте емкость на единицу длины двухпроводной воздушной линии, предполагая, что радиус R проводов значительно меньше расстояния D между их осями, и допуская равномерным распределение зарядов проводов по окружностям их сечений. Примите $R = 1$ см, $D = 20$ см.

4. (Р) Напряжение между обкладками цилиндрического коаксиального конденсатора $U = 60$ кВ. Радиус внешней обкладки $R_e = 10$ см. Рассчитайте минимально допустимый радиус R_i внутренней обкладки, при котором напряженность электрического поля не превысит напряженности пробоя воздуха $E_{\text{пр}} = 30$ кВ/см.

5. Рассчитайте емкость на единицу длины коаксиального кабеля, имеющего два слоя изоляции. Поверхность раздела слоев изоляции цилиндрическая, коаксиальная с поверхностью жилы и оболочки кабеля. Радиус жилы $R_0 = 1$ см, поверхности раздела — $R_1 = 3$ см, оболочки — $R_2 = 4$ см. Диэлектрическая проницаемость вещества слоев $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = 5\varepsilon_0$.

6. (Р) При сборке плоского конденсатора между обкладкой и диэлектриком ($\varepsilon_r = 4$) образовался равномерный воздушный зазор. Расстояние между обкладками $d = 0{,}5$ см, между обкладкой и диэлектриком $d_0 = 0{,}01$ см. Рассчитайте, насколько изменилось его пробивное напряжение, если напряженность поля пробоя воздуха равна 30 кВ/см, а диэлектрика — 200 кВ/см.

7. Выведите формулу емкости плоского конденсатора с многослойным диэлектриком. Рассчитайте емкость трехслойного конденсатора при толщинах слоев $d_1 = 2$ мм, $d_2 = 3$ мм, $d_3 = 2$ мм, их диэлектрической проницаемости $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = 4\varepsilon_0$, $\varepsilon_3 = 3\varepsilon_0$, площади обкладок $S = 100$ см^2.

8. (Р) Радиусы обкладок n-слойного цилиндрического конденсатора R_i и R_e, внешние радиусы слоев диэлектрика R_1, R_2, ..., $R_n = R_e$. Получите соотношения, связывающие величины ε_1, ε_2, ..., ε_n и R_1, R_2, ..., R_{n-1}, при выполнении которых наибольшие напряженности поля во всех слоях равны.

1.5. Магнитная индукция. Принцип непрерывности магнитного потока

ВОПРОСЫ

1. На рис. В1.19 изображено семейство линий магнитной индукции. В какой из точек (*1*, *2*, *3*, *4*) магнитная индукция имеет наибольшее (наименьшее) значение? Укажите номера точек в порядке возрастания в них магнитной индукции.

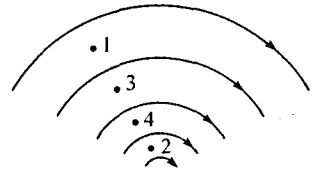


Рис. В1.19

2. (О) Можно ли утверждать, что модуль вектора $|\boldsymbol{B}|$ магнитной индукции в любой точке линии магнитной индукции имеет одно и то же значение?

3. Как должен быть направлен вектор магнитной индукции однородного магнитного поля в точках поверхности, чтобы магнитный поток сквозь нее был наибольшим?

4. Виток из гибкой нити лежит в плоскости, нормальной к линиям магнитной индукции. Сцепленный с ним поток равен Φ_0. Как следует изменить форму витка, чтобы он, оставаясь в той же плоскости, охватил: *а*) наибольший поток; *б*) наименьший поток?

5. (О) В магнитном поле контура с током выбрана безграничная плоская поверхность, сквозь которую рассчитан магнитный поток. Чему равно его значение?

6. Поверхность опирается на контур с током. Зависит ли значение магнитного потока сквозь эту поверхность от формы поверхности?

7. (О) Постоянный магнит представляет собой стержень круглого сечения длиной l. Можно ли определить магнитный поток, проходящий внутри магнита через его сечение, измеряя магнитный поток в окружающем пространстве?

8. Изменится ли значение магнитного потока $\Phi = \int_s \boldsymbol{B}d\boldsymbol{s}$, если во всех точках поверхности s принятое направление нормали $\boldsymbol{n}$ изменить на противоположное?

9. В части пространства магнитный поток сквозь любую выбранную в ней замкнутую поверхность равен нулю. Означает ли это, что магнитная индукция во всех точках равна нулю?

10. (О) Соленоид помещен в неоднородное магнитное поле. Чему равен магнитный поток Φ сквозь боковую поверхность соленоида, если опытным путем было найдено, что в одну из его торцевых поверхностей входит магнитный поток Φ_1, а из второй торцевой поверхности выходит магнитный поток Φ_2?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Одна из линий магнитной индукции — прямая. При движении вдоль нее магнитная индукция вначале возрастает, а затем уменьшается. Проведите соседние линии магнитной индукции.

2. (Р) Электрический ток течет по плоскому круговому тонкому витку. Найдите соотношение между магнитным потоком сквозь часть плоскости, ограниченную витком, и сквозь оставшуюся часть плоскости.

3. (Р) Магнитное поле создано токами $+i$, $-i$ двух бесконечно длинных параллельных проводов, пересекающих нормальную к их осям плоскость в точках A и B. Найдите соотношение между магнитными потоками сквозь поверхности, следами которых являются отрезок AB и луч BC. При этом луч BC уходит в бесконечность, являясь продолжением отрезка AB.

4. Найдите магнитный поток, сцепленный с контуром (рис. В1.20), помещенным в однородное магнитное поле с индукцией B, нормальной к круговым участкам контуров радиусом R.

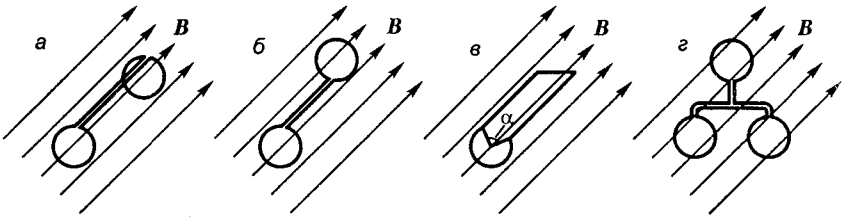


Рис. В1.20

5. (Р) В однородном магнитном поле с индукцией $\boldsymbol{B} = 0{,}2\boldsymbol{i} + 0{,}5\boldsymbol{j} + 1\boldsymbol{k}$ Тл выделена плоская поверхность площадью $S = 1$ м^2, направление нормали в каждой точке которой есть $\boldsymbol{n} = 1\boldsymbol{i} + 1\boldsymbol{j} + 1\boldsymbol{k}$. Рассчитайте магнитный поток сквозь поверхность.

1.6. Закон электромагнитной индукции

ВОПРОСЫ

1. В магнитном поле движется тело из диэлектрика. Поляризуется ли оно?

2. (О) Проводящее тело движется с постоянной скоростью в однородном магнитном поле в направлении, нормальном к линиям магнитной индукции. Индуцируется ли в нем ЭДС? Течет ли в нем ток проводимости?

3. (О) Проводящее тело движется в магнитном поле. При выполнении каких условий в теле будет протекать электрический ток?

4. (О) Изменится ли амплитуда синусоидального магнитного потока, сцепленного с находящимся во внешнем магнитном поле короткозамкнутым витком, проводимость вещества которого γ, если его заменить витком той же формы, но имеющим проводимость $\gamma_1 > \gamma$?

5. (О) Укажите направление ЭДС, индуцируемой во вращающемся с постоянной скоростью проводящем диске, ось вращения которого параллельна линиям магнитной индукции. Протекает ли в диске ток?

6. Проводящий цилиндр конечной длины вращается с постоянной скоростью в однородном магнитном поле, вектор магнитной индукции $\boldsymbol{B}$ которого перпендикулярен оси вращения цилиндра. Укажите направления индуцируемых в цилиндре ЭДС.

7. (О) Внешний магнитный поток, сцепленный с замкнутым проводящим витком, изменяется по закону $\Phi_в(t)$. При каком допущении ток в витке можно рассчитать по формуле $i(t) = -\frac{1}{r}\frac{d\Phi_в}{dt}$, где r — сопротивление провода витка?

8. (О) Справедливо ли утверждение, что индуцируемая ЭДС всегда стремится создать такой ток, магнитное поле которого направлено в сторону, противоположную направлению магнитного потока, вызвавшего ЭДС?

9. Плоский проводящий виток расположен в однородном магнитном поле, нормальном плоскости витка. Индуцируется ли в витке ЭДС, если он: *а*) перемещается в своей плоскости, не изменяя формы; *б*) меняет свою форму от круглой до предельно вытянутой; *в*) перемещается в пространстве в произвольном направлении, не изменяя своей формы; *г*) вращается вокруг своей оси?

10. Постоянный магнит движется с постоянной скоростью вдоль оси витка, вначале приближаясь к нему, а после пересечения его плоскости — удаляясь от него. Меняет ли знак индуцируемая в витке ЭДС? Изобразите кривую изменения индуцируемой в витке ЭДС.

11. (О) Проводящий виток перемещается в однородном магнитном поле в плоскости, нормальной линиям магнитной индукции, так что сцепленный с ним поток не изменяется. В соответствии с формулировкой закона электромагнитной индукции Максвелла ЭДС в витке равна нулю, тогда как в проводе витка в связи с пересечением им силовых линий, согласно формулировке Фарадея, ЭДС не равна нулю. Имеется ли противоречие в этом рассуждении?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Постройте кривую изменения ЭДС, индуцируемой в контуре, если сцепленный с ним магнитный поток изменяется во времени по указанному на рис. В1.21 закону.

2. Постройте кривую изменения магнитного потока, охватываемого контуром, если индуцированная этим потоком ЭДС изменяется по указанному на рис. В1.22 закону.

3. (Р) Проводящая пластина, высота которой значительно больше ее толщины h, а длина значительно больше высоты, движется в среде с диэлектрической проницаемостью ε_0 со скоростью v (рис. В1.23) в магнитном поле, линии индукции которого перпендикулярны вектору $\boldsymbol{v}$. Найдите плотность электрических зарядов, возникающих на противоположных сторонах *1*, *2* пластины.

4. (Р) Найдите ЭДС, индуцируемую между точками вращающегося со скоростью $\omega(t)$ проводящего диска радиусом R, ось вращения z которого параллельна линии магнитной индукции B однородного магнитного поля.

Примечание. Такое устройство является моделью униполярного генератора.

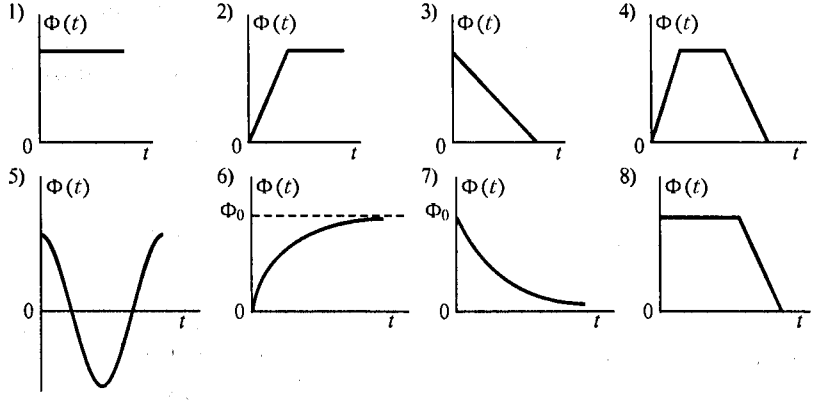


Рис. В1.21

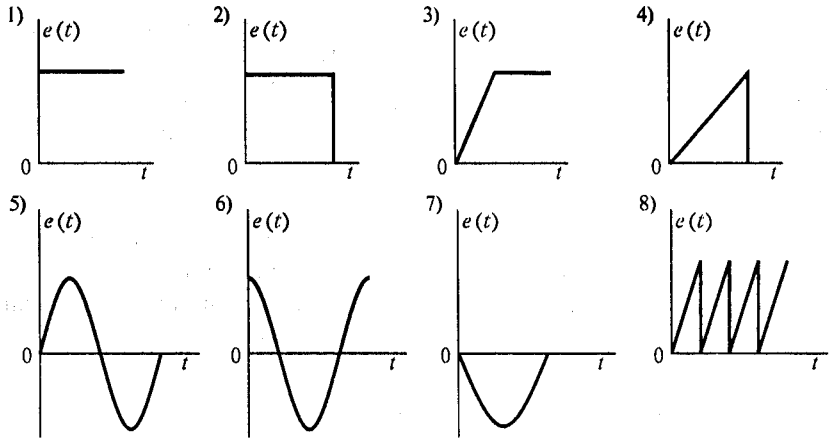


Рис. В1.22

5. (Р) Рассчитайте мощность в нагрузке униполярного генератора, к диску которого через прижимные щетки, расположенные при $R_1 = 0{,}6$ м и $R_2 = 0{,}1$ м, подключен резистор $R = 10$ Ом. Скорость вращения диска $n = 120$ об/мин, магнитная индукция, направленная вдоль оси вращения, $B = 0{,}5$ Тл, электрическое сопротивление проводящего диска между щетками $R_0 = 1$ Ом.

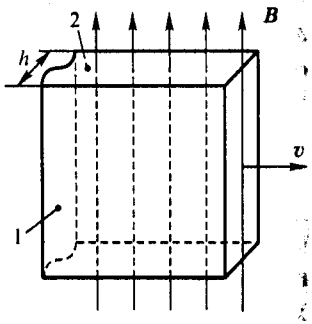


Рис. В1.23

ЗАДАЧИ

1. (Р) Два весьма длинных провода круглого сечения с токами $i_1 = I_m \sin \omega t$ и $i_2 = -I_m \sin \omega t$ образуют двухпроводную линию. Как следует расположить в пространстве и к каким точкам подсоединить контур, состоящий из двух проводов и вольтметра, для измерения падения напряжения на длине l линии?

2. В коаксиальном кабеле внутренняя жила является цилиндром круглого сечения, а внешняя трубчатая оболочка с обратным током — трубой со стенкой некоторой толщины. Изобразите на рисунке измерительный контур для измерения падения напряжения на длине l кабеля. Как следует расположить измерительный контур при измерении падения напряжения на длине l трубы?

3. (Р) В воздушном зазоре между ротором и гладким (беззубцовым) статором электрической машины нормальная к поверхности статора составляющая магнитной индукции изменяется по его окружности по закону $B = B_m \sin \varphi$, где φ — угловая координата точки поверхности статора. Этот закон обеспечивается соответствующим распределением тока ротора. При вращении ротора с угловой скоростью ω магнитное поле вращается вместе с ним. Радиус окружности статора R.

А. Рассчитайте ЭДС, индуцируемую: *а*) в прямом проводе длиной l, лежащем на поверхности статора; *б*) в контуре, образованном при последовательном соединении двух прямых проводов длиной l каждый, лежащих на поверхности статора на расстоянии αR друг от друга, отсчитываемом по поверхности. ЭДС найдите, основываясь на двух формулировках закона электромагнитной индукции — Максвелла и Фарадея.

Б. При каком значении α ЭДС в контуре имеет: *а*) наибольшую; *б*) наименьшую амплитуду?

В. Изменится ли ЭДС в проводе и в контуре, если их поместить не на поверхности, а в пазах статора, выполненного из ферромагнитного вещества?

1.7. Индуктивность и взаимная индуктивность

ВОПРОСЫ

1. Может ли индуктивность быть отрицательной?

2. (О) Равна ли индуктивность двух последовательно соединенных катушек сумме их индуктивностей?

3. (О) Зависит ли индуктивность расположенной в пустоте катушки от протекающего по ней тока?

4. (О) Как изменится (увеличится или уменьшится) индуктивность катушки, охватывающей ферромагнитный сердечник, при изменении его состояния от ненасыщенного (при малых токах катушки) до насыщенного (при больших токах катушки)?

5. (О) Катушка образована проводом, намотанным по винтовой линии на цилиндрическую поверхность. Изменится ли индуктивность катушки при уменьшении шага намотки (шага спирали) и сохранении длины провода?

6. Провод, образующий катушку с несколькими витками, растягивается и переходит в прямолинейный. Увеличилась или уменьшилась при этом индуктивность?

7. (О) Изменится ли индуктивность катушки, если в нее вставить сердечник из проводящего немагнитного вещества? Одинаков ли ответ при: *а*) постоянном; *б*) переменном токе катушки?

8. Зависит ли индуктивность проводящего витка, и если зависит, то как: *а*) от радиуса провода витка; *б*) радиуса витка; *в*) характера распределения электрического тока по сечению провода?

9. (О) Каков характер зависимости индуктивности весьма длинного соленоида от его радиуса?

10. При каком расположении двух плоских контуров их взаимная индуктивность примет наибольшее значение?

11. (О) Индуктивности двух одинаковых контуров равны. Каково наибольшее значение их взаимной индуктивности?

12. Потоки самоиндукции двух контуров равны потоку взаимной индукции. Чему равна взаимная индуктивность?

13. Катушка намотана на медный каркас. Одинаковое ли значение имеет индуктивность катушки при протекании по ней: *а*) постоянного; *б*) переменного тока?

14. Три катушки индуктивно связаны друг с другом. Изменится ли взаимная индуктивность M_{12}, если третью катушку удалить на весьма большое расстояние от двух других?

15. Под действием электромагнитной силы ферромагнитный сердечник втягивается в соленоид. Как при этом изменяется индуктивность соленоида?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Расположите плоскую рамку, находящуюся в магнитном поле тока, протекающего по весьма длинному прямому проводу, так, чтобы взаимная индуктивность между проводом и рамкой оказалась равной нулю.

2. (Р) Для измерения индуктивности катушки в лабораторных условиях определяют амплитуды приложенного к ней напряжения U_m и тока I_m. Ток изменяется по закону $i = I_m \sin \omega t$. На основе соотношения $u = L\, di/dt$ находят индуктивность $L = U_m/\omega I_m$. Поскольку провод катушки обладает сопротивлением r, то погрешность определения индуктивности оказывается зависящей от r. Определите соотношение между величинами ω, L и r, при котором погрешность определения индуктивности не превысит допустимую $\chi_{доп}$.

3. Расположите два плоских контура так, чтобы их взаимная индуктивность была равной нулю.

4. Расположите три плоских контура так, чтобы взаимная индуктивность любых двух контуров была равной нулю.

5. В одном из двух индуктивно связанных контуров ЭДС взаимной индукции изменяется в соответствии с указанными на рис. В1.22 кривыми. Изобразите кривые изменения тока другого контура.

6. (Р) Покажите, что понятие индуктивности на единицу длины весьма длинного бесконечно тонкого ($R = 0$) прямого провода не имеет смысла.

7. Рассчитайте взаимную индуктивность весьма длинного тонкого прямого провода и плоской рамки, которая расположена в одной плоскости с проводом (рис. В1.24).

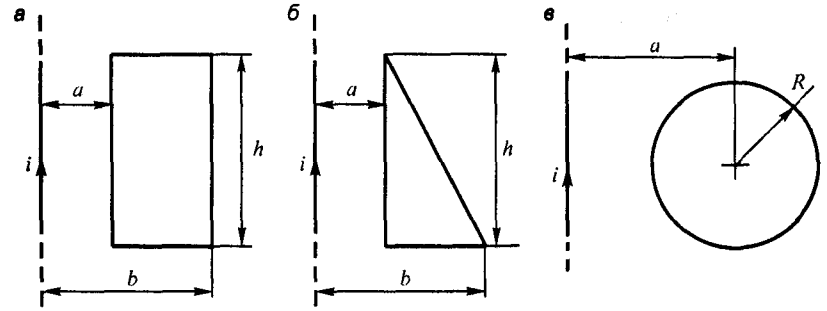


Рис. В1.24

8. Рассчитайте взаимную индуктивность на единицу длины двух 2-проводных линий при их различном взаимном расположении (рис. В1.25, провода 1-й линии *1*, *1'*, 2-й — *2*, *2'*). Направление токов и расстояния между проводами линий указаны на рисунке.

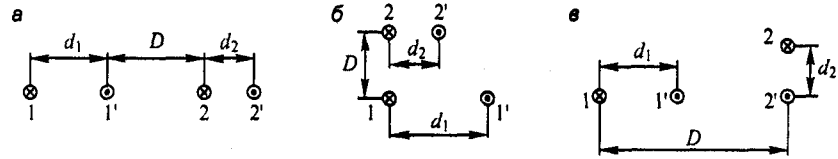


Рис. В1.25

9. (Р) В начальный момент времени ток в идеально проводящем кольце равен нулю. Магнитная индукция внешнего однородного магнитного поля, нормальная к плоскости кольца, изменяется по закону $B(t)$ (рис. В1.26). Изобразите кривую изменения тока $i(t)$ в кольце.

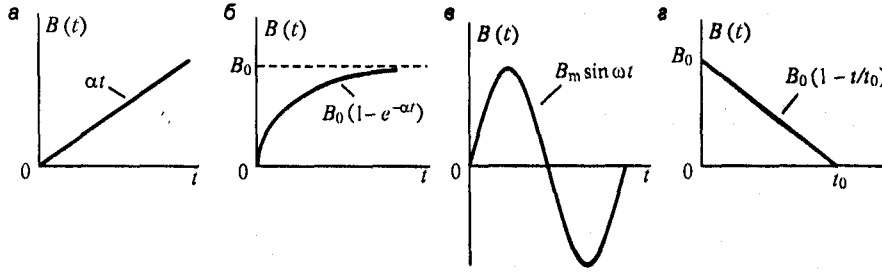


Рис. В1.26

10. Характер изменения магнитного потока в ферромагнитном сердечнике электромагнитного реле и время достижения им установившегося постоянного значения можно изменить, охватив сердечник кольцом или гильзой из хорошо проводящего вещества. Быстрее или медленнее при этом будет возрастать магнитный поток при подключении обмотки реле к источнику постоянного напряжения? Изобразите кривые $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$, соответствующие изменению потока в сердечнике, охваченном и не охваченном кольцом или гильзой.

11. (Р) Идеально проводящее кольцо с током, отключенное от источника, деформируется под действием внешних приложенных к нему сил. Почему при этом изменяется ток? Во сколько раз изменилась индуктивность кольца, если после деформации ток увеличился в 1,5 раза?

12. По двум отключенным от источника удаленным друг от друга тонким идеально проводящим виткам одинаковой формы течет ток i. Какое значение он будет иметь после совмещения витков, если взаимная индуктивность $M > 0$?

13. (Р) В плоском идеально проводящем витке индуктивностью L, отключенном от источника, течет ток i. Какое значение примет ток после внесения витка в однородное магнитное поле с индукцией B_0, линии которой направлены к плоскости кольца под углом α? Охватываемая витком площадь равна S.

14. Короткозамкнутая идеально проводящая обмотка с числом витков w, имеющая форму прямоугольной рамки, вращается вокруг своей оси в однородном магнитном поле, линии индукции которого B_0 перпендикулярны оси вращения. Ток обмотки равен нулю, когда плоскость рамки охватывает наибольший магнитный поток. Какова амплитуда тока в обмотке, если ее индуктивность L, а площадь, охватываемая рамкой, S?

15. (Р) В длинный короткозамкнутый идеально проводящий соленоид с током i вставляют сверхпроводящий длинный цилиндр. Каким будет ток соленоида, если внутренний радиус соленоида равен R_i, внешний радиус цилиндра равен R_e?

1.8. Потенциальное и вихревое электрические поля

ВОПРОСЫ

1. По проводу течет постоянный ток. Суммарный заряд элемента провода равен нулю. Существует ли электрическое поле вне провода?

2. Разомкнутая на конце двухпроводная линия присоединена к источнику изменяющейся во времени ЭДС. При каких условиях электрическое поле вокруг проводов можно рассматривать как потенциальное?

3. По длинному проводу круглого сечения течет постоянный ток. Напряжение измеряют между точками A, B поверхности провода (рис. В1.27). Зависит ли показание вольтметра от расположения соединительных проводов a, b? Изменится ли ответ, если ток провода переменный?

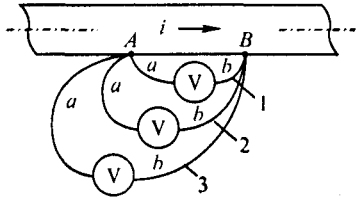


Рис. В1.27

4. По проводу (рис. В1.27) течет переменный ток. При каком из вариантов (*1*, *2*, *3*) расположения проводов a, b напряжение между точками A, B имеет наименьшее значение?

5. (О) Плоский проводящий замкнутый виток находится в переменном магнитном поле (рис. В1.28, *а*), вследствие чего по витку течет переменный ток. Будет ли в нем протекать ток, если весь провод витка экранировать от магнит-

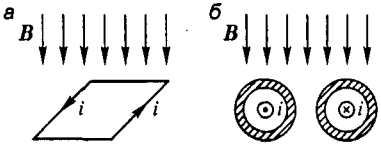


Рис. В1.28

ного поля, заключив его в трубчатый ферромагнитный экран? На рис. В1.28, *б* показано сечение провода и заштрихованное сечение экрана.

6. (О) В находящемся в переменном магнитном поле проводящем теле индуцируется ЭДС и вследствие этого в нем протекает электрический ток. Может ли существовать потенциальная составляющая электрического поля в окружающем его диэлектрике? В проводящем теле?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Весьма длинный ферромагнитный цилиндрический проводящий стержень радиусом $R = 0{,}5$ см помещен в параллельное его оси однородное магнитное поле. Магнитная индукция в любой точке стержня изменяется по закону $B = 0{,}7 \sin \pi \cdot 10^3 t$ (Тл). Определите напряженность вихревого электрического поля на поверхности стержня.

2. В результате разрыва витка вторичной обмотки трансформатора тока ($w_2 = 1$) образовался воздушный промежуток $\Delta = 2$ мм. Произойдет ли электрический пробой этого промежутка, если магнитный поток сердечника, охватываемого витком, $\Phi = 2 \sin 2\pi \cdot 50t$ (Вб)?

3. Плоская однослойная катушка с внутренним радиусом 2 см и внешним радиусом 6 см образована плотной укладкой 100 витков провода по спирали. Рассчитайте ЭДС, индуцируемую в катушке однородным перпендикулярным плоскости катушки магнитным полем с индукцией $B = 0{,}5 \sin 2\pi \cdot 10^3 t$ (Тл).

1.9. Связь магнитного поля с электрическим током

ВОПРОСЫ

1. Воздушный конденсатор подключен к источнику переменного напряжения. Существуют ли в пространстве между обкладками конденсатора замкнутые линии магнитной индукции?

2. Провод с током $i = 2$ А расположен в пустоте. Можно ли при интегрировании вектора магнитной индукции выбрать охватывающий провод замкнутый путь, вдоль которого интеграл $\oint_l \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{l}$ был бы равен $-2\mu_0$; $3\mu_0$; $6\mu_0$; $1{,}2\mu_0$; $-14\mu_0$; 2?

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

1. Ток в контуре равен 3 А. Укажите путь интегрирования при расчете интеграла $\oint_l \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{l}$, при котором его значение равно $3\mu_0$; $6\mu_0$; $9\mu_0$; $15\mu_0$; $-6\mu_0$; $9\mu_0$.

2. Значение интеграла $\oint_l \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{l}$ вдоль указанного пунктиром на рис. В1.29 контура равно $7\mu_0$. Определите ток i_3, если $i_1 = 10$ А, $i_2 = 5$ А.

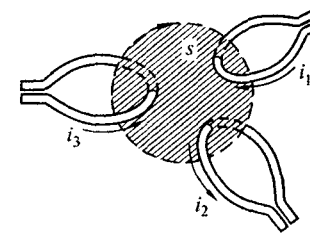


Рис. В1.29

3. Весьма длинный тонкий прямой провод изогнут под углом 90° в точке *A*. Определите магнитную ин-

дукцию в точках на оси провода, если провод расположен в пустоте и его ток равен i.

4. (Р) Ток течет по расположенному в пустоте проводящему листу, толщина которого весьма мала. Лист расположен в плоскости $x = 0$, так что называемый поверхностным ток листа течет в направлении оси z и имеет линейную плотность $j\boldsymbol{k}$, где $\boldsymbol{k}$ — единичный орт оси z. Какие составляющие содержит магнитная индукция? Найдите их в точках $x > 0$ и $x < 0$.

5. Используя метод наложения, решите предыдущую задачу для случая двух листов, лежащих в плоскостях $x = 0$ и $x = d$, по которым текут токи плотностью: *а)* $j_z\boldsymbol{k}$ и $-j_z\boldsymbol{k}$; *б)* $j_z\boldsymbol{k}$ и $j_z\boldsymbol{k}$; *в)* $j_z\boldsymbol{k}$ и $j_y\boldsymbol{j}$; *г)* $-j_z\boldsymbol{k}$ и $j_y\boldsymbol{j}$. Найдите $B(x, y, z)$ в точках $x < 0$, $0 < x < d$, $x > d$.

6. Весьма длинный соленоид радиусом R рассматриваем как бесконечно длинный. Плотность намотки витков составляет $w' = w/l$, ток соленоида i. Считаем витки обмотки плотно уложенными, а провод обмотки имеющим диаметр $d \ll R$. Определите магнитную индукцию внутри и вне соленоида. Постройте кривую $B = f(r)$ для $0 \le r < \infty$. В чем заключается особенность поведения функции $B = f(r)$ в точках $r = R$?

7. Используя метод наложения, решите предыдущую задачу для случая двух весьма длинных соосных соленоидов радиусами R_1, R_2 с токами: *а)* $i_1 = -i_2$; *б)* $i_1 = i_2$; *в)* $i_1 \ne i_2$, плотность намотки у которых одинакова. Постройте кривые $B = f(r)$ для $0 < r < \infty$.

8. (Р) Весьма длинные прямолинейные провода распределены равномерно по окружности радиусом R, причем диаметр каждого из проводов, уложенных вплотную, $d \ll R$. Токи проводов равны i. Рассчитайте линейную плотность j эквивалентного поверхностного тока. Определите составляющие магнитной индукции и постройте кривую $B(r)$ для $0 \le r < \infty$. В чем заключается особенность поведения функции $B(r)$ в точках $r = R$? Магнитная проницаемость равна μ_0 всюду.

9. (О) В электрической машине с гладкими (беззубцовыми) немагнитными ротором и статором длинные прямолинейные провода, образующие обмотку статора, равномерно распределены по окружности радиусом R. Токи проводов таковы, что линейная плотность j поверхностного тока, распределенного по окружности, имеет вид $j = j_m \cos \alpha$. Найдите зависимость $B = f(r)$ при $\alpha = 0$ для $0 \le r < \infty$ и постройте ее.

10. Внутренняя оболочка (жила) коаксиального кабеля заменена весьма длинным прямолинейным (радиусом $r \to 0$) проводом с током $+i$, а внешняя оболочка — охватывающим жилу соосным тонкостенным (толщина стенки $d \to 0$) цилиндром с током $-i$. Радиус цилиндра R. Найдите зависимость магнитной индукции $B(r)$ от расстояния до оси кабеля. Постройте кривую зависимости $B(r)$ и объясните особенность поведения функции $B(r)$ при $r = R$. Магнитная проницаемость равна μ_0 всюду.

11. (Р) Катушка с числом витков w плотно намотана на тороидальный сердечник прямоугольного сечения $h(R_2 - R_1)$, магнитной проницаемостью μ. Через

окно тороида (рис. В1.30) проходит бесконечно длинный провод, совпадающий с осью тороида. Определите взаимную индуктивность между проводом и обмоткой тороида и проверьте выполнение равенства $M_{12} = M_{21}$, принимая, что магнитные силовые линии тока катушки замыкаются только в сердечнике. Численное значение получите для $R_2 = 8$ см, $R_1 = 1$ см, $h = 1$ см, $w = 2000$, $\mu = 400\mu_0$.

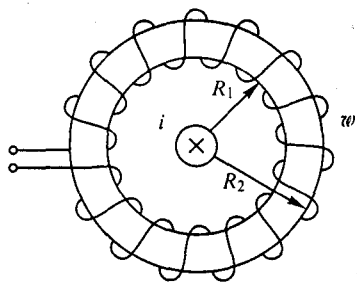


Рис. В1.30

1.10. Намагниченность вещества и закон полного тока

ВОПРОСЫ

1. (О) Сплошной шар из ферромагнитного вещества, магнитная проницаемость которого равна μ, находится во внешнем однородном магнитном поле с индукцией B_0. Какая из величин магнитной индукции больше: B_0 или B_i внутри шара? Какая из величин напряженности магнитного поля больше: $H_0 = B_0/\mu_0$ вне или H_i внутри шара?

2. У одного из двух тел одинаковой формы магнитная восприимчивость больше. В каком из тел, помещенных в одинаковое магнитное поле, больше: *а*) магнитная индукция; *б*) намагниченность; *в*) напряженность магнитного поля?

3. В каком из двух проводов одинаковой формы и размеров с одинаковым постоянным током магнитная индукция и напряженность магнитного поля больше: в медном или ферромагнитном?

4. Ферромагнитный тороидальный сердечник с током i обмотки имеет воздушный зазор, в который вставляют ферромагнитную пластину. Каким будет при этом характер изменения: *а*) магнитной индукции и напряженности магнитного поля в сердечнике; *б*) намагниченности сердечника?

5. (О) Вблизи витка с током расположено ферромагнитное тело. Одинаковые ли значения принимают интегралы $\oint_l \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{l}$, вычисляемые вдоль двух контуров, охватывающих ток и отличающихся один от другого тем, что один из них пересекает тело, а другой — нет? Одинаковые ли значения имеют интегралы $\oint_l \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l}$, вычисляемые вдоль этих контуров?

6. (О) Весьма длинный прямолинейный провод круглого сечения с током охвачен соосным с ним ферромагнитным цилиндром с внешним радиусом R. Экранирует ли цилиндр в точках $r > R$ магнитное поле провода? Изменятся ли значения магнитной индукции и напряженности магнитного поля в точках внутри провода, между проводом и цилиндром, вне цилиндра после удаления цилиндра?

7. (О) Иногда используют допущение о том, что магнитная проницаемость вещества бесконечно велика. Что можно сказать о значении напряженности поля в таком идеализированном веществе?

8. В двух точках ферромагнитной среды магнитная индукция одинакова, но напряженность магнитного поля различна: $H_1 > H_2$. В какой из точек больше: *а*) намагниченность; *б*) магнитная проницаемость; *в*) магнитная восприимчивость? Изменятся ли ответы на эти вопросы, если среда является диамагнитной?

9. Почему уравнение $\oint_l \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = i$, а не опытное соотношение $\oint_l \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{l} = \mu_0 i$ рассматривается как одно из основных уравнений электромагнитного поля?

10. Можно ли применить закон полного тока для описания магнитного поля в случае, когда электрический ток изменяется во времени?

11. Изменится ли значение интеграла $\oint_l \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l}$, если направление интегрирования изменить на противоположное?

12. (О) Следует ли из закона полного тока, что при изменении во времени магнитного поля возникает связанное с ним электрическое поле?

13. Зависит ли МДС $\int_A^B \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = F_{AB}$ от выбора пути интегрирования между точками A и B, если любая пара из путей не охватывает электрический ток?

14. В каком направлении относительно линий напряженности магнитного поля МДС изменяется с наибольшей скоростью?

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

1. Анизотропная ферромагнитная среда характеризуется во всех точках тензором относительной магнитной проницаемости $(\mu_r) = \begin{Vmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{Vmatrix}$. Рассчитайте: *а*) магнитную индукцию, если напряженность магнитного поля $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}\cdot 3\cdot 10^3 + \boldsymbol{j}\cdot 2\cdot 10^3 + \boldsymbol{k}\cdot 10^3$ А/м; *б*) напряженность магнитного поля, если магнитная индукция $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{i}\cdot 0{,}9 + \boldsymbol{j}\cdot 1{,}2 + \boldsymbol{k}\cdot 0{,}1$ Тл.

2. В некоторой точке изотропного ферромагнитного вещества относительная магнитная проницаемость $\mu_r = 900$ при напряженности магнитного поля $H = 10^{-3}$ А/м. Определите значения магнитной индукции, намагниченности, магнитной восприимчивости вещества в этой точке.

3. (Р) Цилиндрический ферромагнитный сердечник постоянного сечения вставлен в соленоид, расположенный в воздухе. Число витков соленоида на единицу длины w/l, его ток i. Длины соленоида и сердечника бесконечны, однородно намагниченный сердечник характеризуется магнитной проницаемостью μ. Найдите намагниченность $\boldsymbol{M}$ и магнитную индукцию $\boldsymbol{B}$ в сердечнике. Какую часть сечения соленоида должна составлять площадь сечения сердечника, чтобы при его введении в соленоид индуктивность на единицу его длины увеличилась в n раз?

4. (Р) Однородно намагниченный цилиндрический стержень длиной l характеризуется намагниченностью $\boldsymbol{M}$, направленной по оси стержня. Рассчитайте ток i

эквивалентного ему соленоида того же сечения, что и стержень, и расположенного в среде с магнитной проницаемостью μ_0

Примечание. Магнитное поле соленоида и намагниченного вещества эквивалентны, если создаваемые ими магнитные поля одинаковы во всех точках пространства.

5. (Р) Бесконечно длинный цилиндр радиусом R намагничен однородно в направлении, нормальном к оси z цилиндра. Рассчитайте линейную плотность $j(\varphi)$ расположенных в пустоте токов, распределенных по окружности цилиндра того же радиуса и создающих вне цилиндра такое же магнитное поле, как и намагниченный цилиндр, характеризуемый намагниченностью $\boldsymbol{M} = j M_y$.

6. (Р) Однородно намагниченный шар радиусом R характеризуется намагниченностью $\boldsymbol{M} = j M_y$. Рассчитайте линейную плотность $j(\varphi)$ расположенных в пустоте токов, распределенных по поверхности немагнитной сферы радиусом R и создающих вне сферы такое же магнитное поле, как и намагниченный шар.

7. На плоской безграничной поверхности тела, магнитная проницаемость которого принята равной бесконечности, лежит прямолинейный изолированный провод с током i (рис. В1.31). Изобразите семейство линий напряженности магнитного поля. Чему равна МДС F_{AB} вдоль пути, проходящего в воздухе? Постройте кривую изменения МДС вдоль поверхности тела.

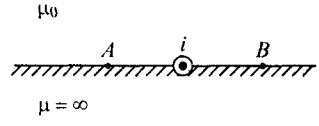


Рис. В1.31

8. На рис. В1.32 указаны варианты расположения линейных токов i и поверхностных токов плотностью $j(x)$ на плоской безграничной поверхности тела с проницаемостью $\mu = \infty$. Постройте кривые изменения МДС вдоль оси x.

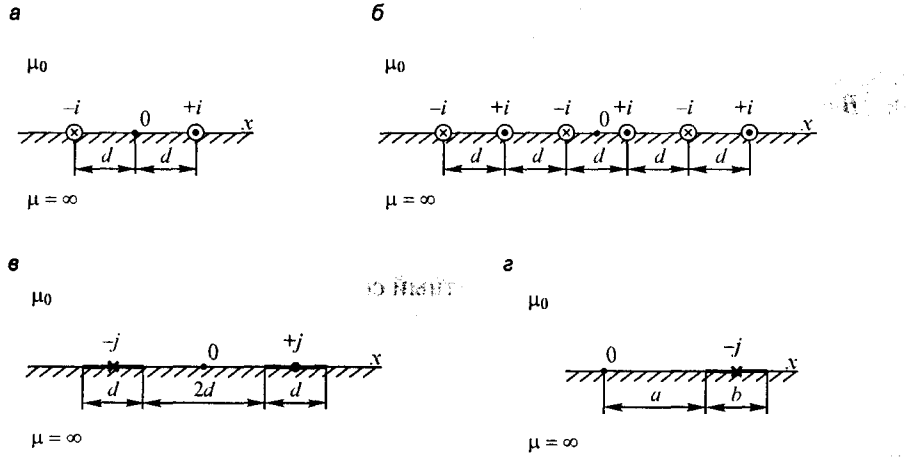


Рис. В1.32

9. Рассчитайте МДС между точками A, C вдоль указанного на рис. В1.33 пути.

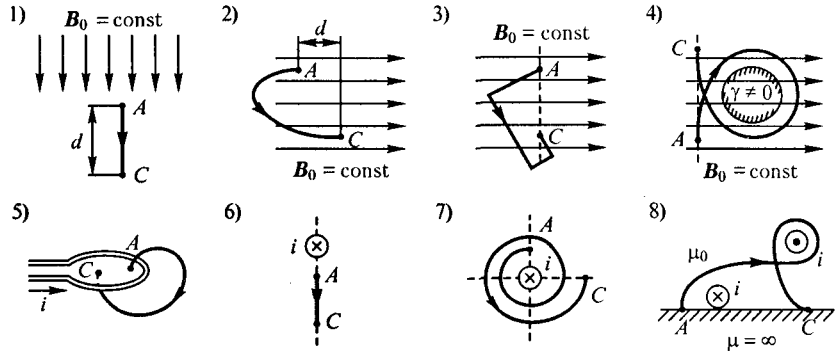


Рис. В1.33

10. (Р) Постоянный ток $i = 100$ А течет по плоской пластине толщиной $\Delta = 1$ см в направлении оси z. Допуская, что длина и ширина h пластины значительно превышают ее толщину Δ, найдите и постройте функции $H(y)$, $B(y)$ при $x = 0$, $y \ll h$. Магнитная проницаемость пластины $\mu = 200\mu_0$, $h = 20$ см (рис. В1.34).

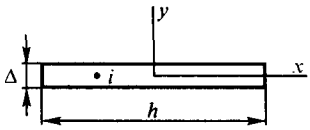


Рис. В1.34

11. По двум параллельным немагнитным ($\mu = \mu_0$) пластинам толщиной $\Delta_1 = 5$ мм, $\Delta_2 = 8$ мм (рис. В1.35) соответственно текут постоянные токи прямого $i = +100$ А и обратного $i = -100$ А направлений. Учитывая, что длина и ширина $h = 0{,}2$ м каждой пластины значительно больше их толщины, найдите и постройте кривую зависимости $H(y)$ при $x = 0$. Постройте $H(y)$ также для случая, когда токи пластин имеют одинаковое направление. Зависит ли вид функции $H(y)$ от расстояния между пластинами?

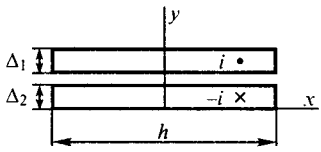


Рис. В1.35

12. Постоянный ток i течет по весьма длинному прямолинейному проводу круглого сечения радиусом R. Определите напряженность магнитного поля и магнитную индукцию внутри и вне провода в точках на расстоянии r от его оси. Магнитная проницаемость вещества провода $\mu = 100\mu_0$.

13. По весьма длинному прямолинейному трубчатому проводу с внутренним и внешним радиусами, равными, соответственно, $R_1 = 6$ см и $R_2 = 7$ см, течет постоянный ток $i = 200$ А. Постройте кривые зависимостей $H(r)$, $B(r)$, где r — расстояние от точки до оси трубы, для значений $0 \le r \le R_2$. Магнитная проницаемость вещества трубы равна $200\mu_0$.

14. Постоянный ток $i = 200$ А прямого направления течет по весьма длинному прямолинейному проводу радиусом $R = 3$ мм, а такой же ток противоположного направления — по такому же параллельному проводу. Расстояние между осями проводов $D = 1$ м. Постройте кривую зависимости $H(x)$, где x — координата, отсчитываемая по прямой, соединяющей оси проводов и перпендикулярной им.

15. Постоянный ток $i = 100$ А течет по весьма длинному прямолинейному проводу радиусом $R = 5$ мм, а такой же ток противоположного направления — по соосной с ним трубе (рис. В1.36) с внутренним и внешним радиусами $R_i = 8$ мм, $R_e = 10$ мм. Магнитная проницаемость провода равна $100\mu_0$, вещества трубы — $200\mu_0$. Рассчитайте зависимости $H(r)$, $B(r)$ и постройте кривые их изменения для значений $0 \le r \le R_e$ (r — расстояние от точки до оси провода).

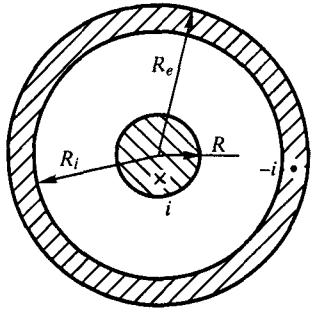


Рис. В1.36

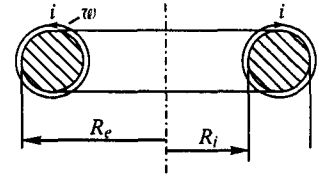


Рис. В1.37

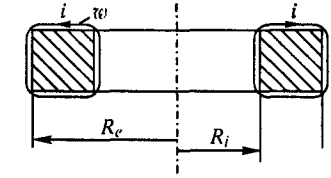


Рис. В1.38

16. (Р) На тороидальный сердечник круглого сечения (рис. В1.37) плотно уложена обмотка с числом витков $w = 200$. Определите наибольшее и наименьшее значения напряженности магнитного поля и магнитной индукции внутри сердечника, если ток обмотки $i = 100$ А, магнитная проницаемость вещества сердечника $\mu = 200\mu_0$, $R_i = 5$ см, $R_e = 8$ см.

17. На тороидальный сердечник прямоугольного сечения (рис. В1.38) плотно уложена обмотка с числом витков $w = 200$. Определите и постройте зависимость $H(r)$ при $R_i \le r \le R_e$, принимая магнитную проницаемость вещества сердечника $\mu = 200\mu_0$, $i = 10$ А, $R_i = 4$ см, $R_e = 5$ см.

2.1. Энергия системы заряженных тел. Энергия контуров с токами

ВОПРОСЫ

1. При выводе формулы для расчета энергии системы заряженных тел принимается допущение об отсутствии необратимых процессов в диэлектрике. Какие необратимые процессы имеются в виду?

2. Предложите способ, которым можно преобразовать энергию электрического поля заряженного конденсатора в другой вид энергии.

3. (О) Разность потенциалов двух присоединенных к источнику ЭДС проводящих тел равна u. Изменяется ли энергия этой системы при сближении тел?

4. (О) Два одноименно заряженных тела приближаются друг к другу. Изменяется ли энергия этой системы?

5. Изменится ли энергия заряженного конденсатора, если в его электрическое поле внести незаряженное проводящее тело?

6. (О) Провода двухпроводной линии передачи покрываются слоем льда. Изменяется ли энергия электрического поля, а также емкость между проводами? Относительная диэлектрическая проницаемость льда $\varepsilon_r > 1$ ($u = \text{const}$).

7. Изменится ли энергия электрического поля конденсатора, если его бумажную изоляцию пропитать маслом, диэлектрическая проницаемость которого превышает ε_0?

8. Изменятся ли емкость и энергия электрического поля разрядника, представляющего собой присоединенные к источнику ЭДС две металлические сферы, при изменении сухой погоды на дождливую, в результате чего они покрываются тонким слоем воды?

9. (О) У какого заряженного шара энергия электрического поля больше: у проводящего или у шара с таким же зарядом, равномерно распределенным в объеме?

10. У поверхности какой из обкладок однослойного цилиндрического соосного конденсатора — внутренней или внешней — объемная плотность энергии электрического поля больше?

11. Изменится ли энергия магнитного поля двух контуров с токами, если изменить направление тока на противоположное: *а*) в одном из контуров; *б*) в обоих контурах?

12. Изменится ли энергия магнитного поля катушки, по которой течет постоянный ток, если внутрь нее внести ферромагнитный сердечник?

13. Два удаленных друг от друга плоских контура с токами сближаются. Каким должно быть их взаимное расположение после сближения, чтобы энергия магнитного поля была: *а*) равной сумме энергий уединенных контуров; *б*) больше суммы энергий уединенных контуров; *в*) меньше суммы энергий уединенных контуров?

14. Для улучшения механических свойств линий электропередач алюминиевые провода навивают на стальную сердцевину. Изменяются ли при этом индуктивность проводов и энергия магнитного поля?

15. (О) Почему большее распространение на практике нашли не емкостные, а индуктивные электромеханические машины, преобразующие механическую энергию в энергию магнитного, а не электрического поля?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Напряженность электрического пробоя воздуха составляет 30 кВ/см. Рассчитайте предельную объемную плотность энергии электрического поля в воздухе.

2. Рассчитайте работу, которую необходимо выполнить для зарядки конденсатора емкостью 1 мкФ до напряжения 200 В.

3. Площадь каждой из обкладок плоского двухслойного конденсатора $S = 50$ см^2. Диэлектрические проницаемости вещества слоев равны $\varepsilon_1 = 4\varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_0$, их толщины $d_1 = 2$ мм, $d_2 = 3$ мм. Напряжение между обкладками равно $u = 200$ В. Рассчитайте энергию электрического поля в слоях и полную энергию электрического поля конденсатора. В каком из слоев плотность энергии поля больше?

4. Рассчитайте энергию электрического поля в каждом из слоев диэлектрика, полную энергию электрического поля $W_э$, объемную плотность энергии $W'_э(r)$ электрического поля: *а*) в двухслойном цилиндрическом; *б*) в двухслойном сферическом конденсаторах. Радиусы обкладок R_1, R_2, радиус поверхности, общей для обоих слоев диэлектрика, R, диэлектрические проницаемости слоев ε_1, ε_2, напряжение между обкладками u. Численные расчеты выполните для $R_1 = 2$ см, $R_2 = 1$ см, $R = 1{,}5$ см, $\varepsilon_1 = 4\varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_0$, $u = 300$ В.

5. (Р) Рассчитайте энергию магнитного поля трех последовательно соединенных индуктивно связанных катушек с током 1 А, имеющих индуктивности $L_1 = 1{,}5$ мГн, $L_2 = 2$ мГн, $L_3 = 1$ мГн и взаимные индуктивности $M_{12} = 0{,}3$ мГн, $M_{13} = 0{,}2$ мГн, $M_{23} = 0{,}06$ мГн.

6. Определите энергию магнитного поля катушек в условиях предыдущей задачи, если у второй катушки поменять местами зажимы.

7. Определите отношение плотности энергии электрического и магнитного полей в воздухе при $B = 1{,}5$ Тл, $E = 30$ кВ/см.

8. Тороидальный сердечник катушки индуктивности образован двумя кольцами прямоугольного сечения, разделенными воздушным зазором Δ (рис. В2.1). Принимая линии магнитной индукции в сердечнике и в зазоре окружностями, рассчитайте отношение объемной плотности энергии магнитного поля в зазоре и прилегающих к нему точках сердечника ($\mu = \mu_c$), а также отношение энергии магнитного поля в сердечнике к энергии магнитного поля в зазоре.

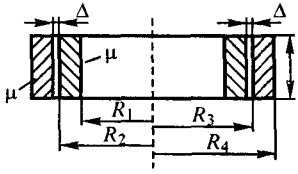


Рис. В2.1

9. (Р) Пакет листов (толщиной d каждый) из магнитного материала, разделенных воздушными промежутками Δ (рис. В2.2), помещен вначале в продольное (∥), а затем в поперечное (⊥) магнитное поле, причем МДС сохраняется неизменной: $F_{ab} = F_{||} = F_{ac} = F_{\perp}$ ($ab = ac$). Определите отношение средних для нескольких листов значений магнитной индукции $\dfrac{B_{||\,ср}}{B_{\perp ср}}$, где $B_{||\,ср} = \dfrac{\Phi_{||}}{S_{||}}$, $B_{\perp ср} = \dfrac{\Phi_{\perp}}{S_{\perp}}$, $S_{||} = S_{\perp}$. Может ли значение $\dfrac{B_{||\,ср}}{B_{\perp ср}}$ быть меньше 1?

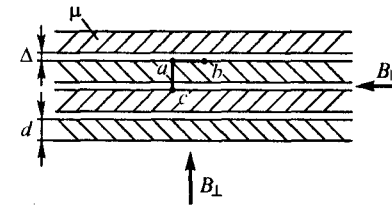


Рис. В2.2

10. Немагнитная жила коаксиального кабеля имеет радиус R, а немагнитная оболочка — внутренний радиус R_i и внешний R_e. Сопоставьте индуктивность на единицу длины кабеля в следующих случаях: *а*) ток распределен равномерно по сечению жилы и оболочки; *б*) ток течет в тонком поверхностном слое жилы и тонком слое внутренней поверхности оболочки.

11. (Р) При зарядке конденсатора емкостью C до напряжения u ток изменяется по закону $i = \frac{U}{r}\exp\left(-\frac{t}{rC}\right)$. Рассчитайте отношение энергии, запасаемой конденсатором, к тепловой энергии, выделяемой в резисторе r, включенном последовательно с конденсатором и источником напряжения. Изменится ли это отношение при изменении C или r?

12. (Р) Прямолинейные весьма длинные тонкие провода, образуя обмотку, уложены вплотную на поверхности немагнитного ротора радиусом R. Ток проводов распределен по закону $i = I_m \cos\alpha$, где α — угловая координата точек поверхности ротора. Рассчитайте энергию ее магнитного поля и индуктивность, заменяя обмотку токовым слоем радиуса R и принимая, что число витков обмотки w.

13. (Р) В глубоком прямоугольном пазу (рис. В2.3) уложены два немагнитных провода *1* и *2* с равными токами $\pm i$ различных направлений. Рассчитайте энергию магнитного поля токов и индуктивность проводов, принимая, что магнитная проницаемость вещества, образующего паз, $\mu = \infty$, и что линии напряженности магнитного поля перпендикулярны стенкам паза. Ток по сечению проводов распределен равномерно.

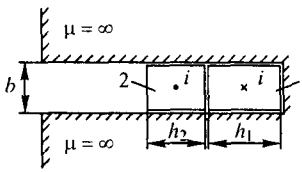


Рис. В2.3

2.2. Силы, действующие на заряженные тела. Электромагнитная сила

ВОПРОСЫ

1. В каком направлении действует сила на элементы поверхности уединенного проводящего заряженного тела?

2. (О) Заряженное тело расположено вблизи поверхности незаряженного проводящего тела, например, вблизи поверхности земли. Существует ли сила взаимодействия между этими телами?

3. (О) Почему незаряженная проводящая частица, помещенная в неоднородное электрическое поле, испытывает силу, направленную в сторону более сильного поля?

4. (О) Незаряженная проводящая частица внесена в пространство между пластинами плоского заряженного конденсатора. Почему она притягивается к той пластине, к которой ближе расположена?

5. (О) Электрический фильтр очистки воздуха состоит из длинной проводящей трубы и соосной с ней нити, к которым приложено напряжение. К какому электроду — трубе или нити — притягиваются загрязняющие воздух частицы пыли?

6. (О) Двухслойный плоский заряженный конденсатор отключен от источника. Определите направление силы, действующей на общую поверхность двух диэлектриков, параллельную пластинам. Диэлектрические проницаемости слоев равны ε_1 и $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$.

7. (О) Изменит ли направление сила, действующая на общую поверхность двух диэлектриков в условиях из предыдущего вопроса, если конденсатор заряжен, но не отключен от источника?

8. Плоский конденсатор имеет между обкладками два слоя диэлектрика, граница которых нормальна к поверхности пластин. Объясните действие силы на поверхность диэлектриков в условиях из двух предыдущих вопросов.

9. Уединенная заряженная сфера окружена концентрическими слоями диэлектрика, имеющего диэлектрические проницаемости $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 > \varepsilon_3$, $\varepsilon_3 < \varepsilon_4$. Укажите направление сил, действующих на общие поверхности слоев диэлектриков.

10. (О) По гибкому проводу, образующему виток, течет ток. Какую форму стремится придать витку электромагнитная сила?

11. Тороидальный сердечник катушки индуктивности имеет разрез вдоль радиуса толщиной Δ. В каком направлении действует на поверхность разреза электромагнитная сила?

12. Сферическая частица (дробь), вещество которой имеет проницаемость $\mu > \mu_0$, помещена в однородное магнитное поле. Действует ли на нее электромагнитная сила? Будет ли действовать на нее электромагнитная сила при размещении ее вблизи поверхности одного из полюсов магнита, создающего однородное магнитное поле?

13. В витке, плоскость которого нормальна к линиям внешнего однородного магнитного поля, течет ток. Зависит ли направление электромагнитной силы, действующей на виток, от взаимной ориентации тока и магнитного поля?

14. (О) Вдоль оси кругового витка проходит провод. Существует ли силовое взаимодействие между витком и проводом, если по ним течет ток?

15. (О) Какие электромагнитные силы действуют на две рядом расположенные ферромагнитные сферические частицы, помещенные в однородное магнитное поле?

16. Ток течет по весьма длинной прямолинейной трубе. Испытывает ли внутренняя поверхность трубы давление со стороны магнитного поля?

17. (О) По двум соосным длинным соленоидам радиусами R_1, $R_2 > R_1$ и числом витков на единицу длины w_1 и w_2 текут токи i_1 и i_2. При каких направлениях и величинах токов сила, действующая на один из соленоидов, равна нулю?

18. Незаряженная проводящая частица, помещенная в неоднородное электрическое поле, испытывает действие силы, стремящейся переместить ее в сторону более сильного поля. Почему немагнитный проводник без тока не испытывает действия электромагнитной силы, если он помещен в неоднородное не изменяющееся во времени магнитное поле?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Определите силу притяжения, действующую на единицу поверхности двух параллельных безграничных разноименно заряженных плоскостей, плотность заряда которых равна σ. Почему сила не зависит от расстояния между плоскостями?

2. Расстояние между двумя весьма длинными прямыми параллельными проводами, заряженными разноименными зарядами, значительно больше их радиусов. Определите силу, действующую на единицу длины проводов, если напряжение между ними равно u.

3. Найдите силу, действующую на единицу поверхности уединенной проводящей сферы радиусом R с зарядом q.

4. Определите силы, действующие на внутреннюю ($r = R_i$) и внешнюю ($r = R_e$) обкладки: *а*) однослойного цилиндрического; *б*) однослойного сферического конденсаторов. Напряжение между обкладками равно u.

5. (Р) Поверхность S разделяет две среды с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2. Определите силу, действующую на единицу поверхности, если вектор электрического смещения $\boldsymbol{D}$ направлен по нормали к ней.

6. (Р) Найдите силы, действующие на единицу поверхности обкладок плоского двухслойного конденсатора (давление), при диэлектрических проницаемостях слоев ε_1, ε_2 и их толщинах d_1, d_2. Определите давление на границу раздела слоев. Зависит ли направление давления от соотношения между ε_1 и ε_2? Напряжение между обкладками равно u.

7. (Р) В плоском двухслойном конденсаторе поверхность раздела диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 нормальна к его пластинам (рис. В2.4). Определите давление на границу раздела диэлектриков.

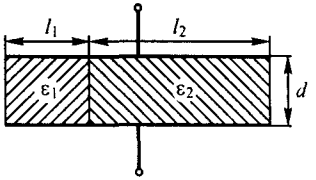


Рис. В2.4

8. Уединенная заряженная сфера окружена концентрическими слоями диэлектриков, имеющих диэлектрические проницаемости $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 > \varepsilon_3$, $\varepsilon_3 < \varepsilon_4$. Рассчитайте давления на границы слоев диэлектриков.

9. Диэлектрические проницаемости слоев цилиндрического двухслойного конденсатора равны ε_i, ε_e, ($\varepsilon_i > \varepsilon_e$). Радиусы обкладок R_i, R_e, радиус цилиндрической поверхности раздела слоев R_0. Рассчитайте силу, действующую на обкладки, а также на общую поверхность слоев. Какая из этих сил изменится, если внутренний слой примет проницаемость ε_e, а внешний — ε_i?

10. Объясните, почему электромагнитная сила, действующая на проводник в точке A, имеет указанное на рис. В2.5 направление. Укажите направление электромагнитной силы в точках C, D, E проводников. Сила $\boldsymbol{f}_1$ обусловлена действием на провод с током со стороны собственного магнитного поля тока, сила $\boldsymbol{f}_2$ — со стороны магнитного поля другого контура с током (вариант 8).

11. Прямолинейный бесконечно длинный тонкий провод изогнут и образует в точке A прямой угол. Найдите распределение вдоль провода силы, стремящейся его разогнуть. Ток провода $i = 100$ А, $\mu = \mu_0$ всюду.

12. Кратчайшее расстояние между двумя бесконечно длинными взаимно перпендикулярными проводами с токами $i = 10$ А равно $d = 5$ см. Постройте кривую распределения электромагнитной силы вдоль одного из проводов.

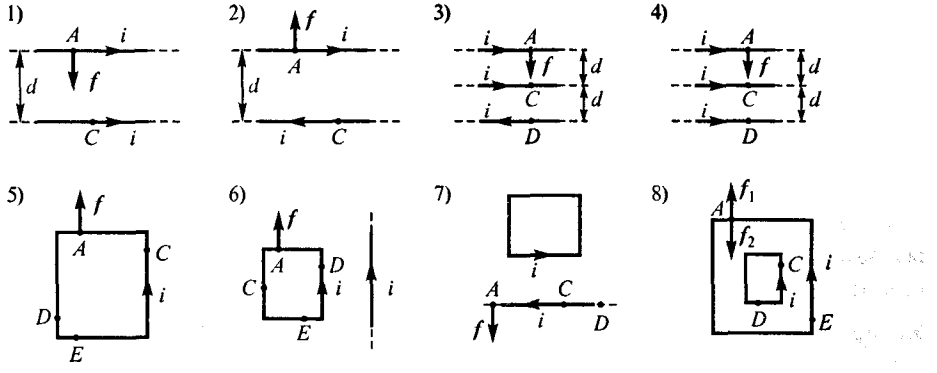


Рис. В2.5

13. (Р) Длинный прямолинейный провод с током i и прямоугольная рамка с размерами сторон a, b находятся в одной плоскости. Рассчитайте силу, стремящуюся изменить положение рамки, при токе рамки i_1. При численном расчете примите $a = 5$ см, $b = 10$ см, $i = 10$ А, $i_1 = 100$ А. Кратчайшее расстояние d от провода до ближайшей к проводу и параллельной ему стороне a рамки равно 5 см, $\mu = \mu_0$.

14. (Р) Индуктивность круглого витка можно рассчитать по формуле $L = R\,[\mu_0(\ln 8R/r - 2) + \mu/4]$, если радиус r провода значительно меньше радиуса R витка. Найдите выражение обобщенных сил f_R и f_r, стремящихся изменить размеры витка. Магнитная проницаемость вещества провода равна μ. Выполните вычисления для $R = 8$ см, $r = 0{,}25$ см, $i = 20$ А при: *а*) $\mu = \mu_0$; *б*) $\mu = 500\mu_0$.

15. Круглый плоский виток радиусом R из медного провода, радиус сечения которого r, расположен в однородном магнитном поле так, что угол между вектором магнитной индукции $\boldsymbol{B}$ и нормалью к плоскости витка составляет α. Рассчитайте силу, стремящуюся изменить радиус R витка при различных направлениях магнитной индукции и тока i витка. Численный расчет выполните при $i = 100$ А, $R = 4$ см, $r = 0{,}5$ мм, $B = 0{,}4$ Тл. При каких α сила, действующая на виток: *а*) наименьшая; *б*) наибольшая?

16. (Р) Определите значение тока i, протекающего по наружной поверхности (при условии резко выраженного поверхностного эффекта) стальной трубы с внешним радиусом R, при котором давление со стороны электромагнитного поля превысит предел прочности σ стали и труба начнет деформироваться. Численный расчет выполните при $R = 1{,}5$ см, $\sigma = 0{,}1$ кг/мм^2.

Примечание. При условии резко выраженного поверхностного эффекта ток течет в тонком поверхностном слое трубы.

17. (Р) Весьма длинный соленоид радиусом R имеет w витков на единицу длины. Рассчитайте силу, действующую на единицу длины соленоида и стремящуюся изменить его радиус.

18. Определите характер и величину сил, действующих на однослойную катушку радиусом R, длиной l, с числом витков w, приближенное выражение

индуктивности которой можно записать в виде $L = \dfrac{4R^2w^2}{9R+10l}\cdot 10^{-5}$ Гн. Численное значение силы определите при $i = 3$ А, $R = 2$ см, $w = 100$, $l = 8$ см.

19. Индуктивность на единицу длины весьма длинного коаксиального кабеля с радиусом жилы R_0 и внутренним радиусом оболочки R_i при высокой частоте протекающего по нему тока можно найти, пользуясь выражением $L' = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\dfrac{R_i}{R_0}$.

Рассчитайте силу, действующую на единицу длины жилы и оболочки, принимая $R_0 = 3$ мм, $R_i = 6$ мм. Ток кабеля $i = 1 \sin wt$ А.

20. Тороидальная катушка имеет средний радиус R, круглое сечение радиусом r и число витков w. Индуктивность такой катушки $L = \dfrac{\mu_0 w^2 r^2}{R+\sqrt{R^2-r^2}}$. Рассчитайте силы, стремящиеся изменить радиусы R, r катушки. Определите их численные значения при токе катушки 1 А, $w = 200$, $r = 1$ см, $R = 10$ см.

21. (Р) Тороидальный сердечник прямоугольного сечения имеет равномерно намотанную обмотку с числом витков $w = 200$. Сердечник имеет радиальный зазор $\Delta = 1$ мм; внутренний радиус сердечника $R_i = 0{,}2$ м, внешний – $R_e = 0{,}25$ м, его высота 0, 03 м, $i = 10$ А, $\mu = 100\mu_0$. Рассчитайте силу, действующую на элемент поверхности сердечника, расположенный в центральной части зазора при $R_{\text{ср}} = \dfrac{R_i + R_e}{2}$.

ЗАДАЧИ

1. (Р) Прямолинейный весьма длинный немагнитный провод круглого сечения с током $i = 1000$ А расположен в воздухе параллельно плоской поверхности среды, магнитная проницаемость которой может быть принята бесконечно большой. Рассчитайте силу, действующую на единицу длины провода, при расстоянии между осью провода и поверхностью $d = 5\cdot 10^{-2}$ м.

2. Линейные бесконечно длинные провода размещены на поверхности немагнитного цилиндра радиусом R. Линейная плотность j токов проводов изменяется по окружности сечения цилиндра по закону $j = j_m \cos\alpha$. Найдите радиальную $F_r(\alpha)$ и тангенциальную $F_t(\alpha)$ составляющие силы, действующей на провода, учитывая, что созданное током магнитное поле внутри цилиндра однородное с магнитной индукцией $B = \dfrac{\mu_0 j_m}{2}$ (см. упр. 9, §1.9).

3. (Р) По бесконечно протяженной в направлении осей x, y пластине толщиной $2d$ протекает электрический ток, плотность которого $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{i}J_x$ постоянна во всех точках пластины. Рассчитайте распределение электромагнитной силы вдоль линии, нормальной поверхности пластины, а также полную силу, сжимающую единицу объема пластины. Выведите формулу для сжимающей пластину силы при переходе к бесконечно тонкой пластине, когда $d \to 0$, $J \to \infty$ и когда пластина переходит в поверхность с линейной плотностью тока j ($\mu = \mu_0$ всюду).

4. (Р) Круговой контур с током $i = 10$ А расположен в одной плоскости с прямолинейным бесконечно длинным проводом, ток которого $i_1 = 1000$ А. Кратчайшее расстояние между контуром и проводом равно $d = 2$ см, радиус контура $R = 5$ см. Рассчитайте силу взаимодействия токов контура и провода и постройте зависимость силы $F = f(\varphi)$ в точках контура в функции положения точки ($0 < \varphi \le 2\pi$). Постройте также зависимость электромагнитной силы вдоль провода.

5. (Р) На внутренней цилиндрической поверхности ($R = R_c$) статора электрической машины токовая нагрузка (линейная плотность тока) $j_c = j_{cm} \cos \alpha$, а на поверхности ротора (при $R_p < R_c$) $j_p = j_{pm} \cos(\alpha + \varphi)$. Статор и ротор выполнены из немагнитного вещества. Рассчитайте зависимость вращающего момента, действующего на ротор, от угла φ, принимая, что длины ротора и статора значительно превышают их радиусы. При каких значениях угла φ момент имеет: *а*) наибольшее значение; *б*) наименьшее значение?

6. (Р) Две плоские поверхности тела, вещество которого имеет бесконечно большую магнитную проницаемость, образуют прямой угол (рис. В2.6). Весьма длинный немагнитный провод с током $i = 1000$ А расположен в воздухе параллельно поверхностям тела. Определите направление и значение силы, действующей на провод, при $h = 5$ см.

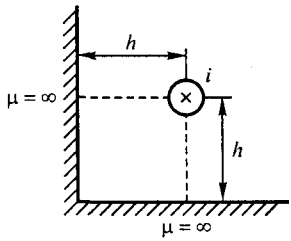


Рис. В2.6

Вопросы, упражнения, задачи к главам 3 и 4

3.1. Элементы электрических цепей

ВОПРОСЫ

1. Почему в цепи постоянного тока напряжение, измеряемое на зажимах цепи, не зависит от расположения проводов, соединяющих вольтметр с цепью?

2. (О) При каком допущении напряжение, измеряемое на зажимах цепи переменного тока, не зависит от расположения в пространстве проводов, соединяющих вольтметр с цепью?

3. (О) Почему конденсаторы обычно характеризуются малыми индуктивностями?

4. (О) Для определения индуктивности элемента цепи через него пропускают ток $i(t)$ и рассчитывают индуктивность по формуле $L = \psi(t)/i(t)$. Является ли найденная таким образом индуктивность функцией времени?

5. (О) Между участками электрической цепи протекает ток смещения. Можно ли утверждать, что эти участки обладают друг по отношению к другу электрической емкостью?

6. Влияние межвитковой емкости катушки индуктивности проявляется при частоте тока $f = 10^3$ Гц. Усиливается ли оно при: *а*) увеличении; *б*) уменьшении частоты?

7. (О) Почему при совпадающих условно положительных направлениях тока и напряжения на катушке индуктивности действительное направление напряжения будет определено правильно не только при увеличении, но и при уменьшении тока?

8. При выбранных условно положительных направлениях токов двух индуктивно связанных катушек величина коэффициента взаимной индукции M отрицательна. Каково направление потоков самоиндукции и взаимной индукции?

9. Следует ли при заданном знаке коэффициента взаимной индукции указывать направление токов катушек?

10. Обязательна ли маркировка индуктивно связанных катушек?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Протяженность воздушной двухпроводной линии, соединяющей источник электромагнитной энергии с приемником, составляет 10 км. Можно ли рассматривать это устройство как цепь с сосредоточенными параметрами при частоте тока $f = 50$ Гц? При какой частоте необходимо принимать во внимание волновой процесс в линии?

2. (Р) Катушка индуктивности обладает как электрическим сопротивлением, так и межвитковой емкостью. Изобразите схему электрической цепи, эквивалентную катушке и состоящую из идеальных резистора, катушки и конденсатора.

3. Конденсатор с неидеальным диэлектриком обладает электрическим сопротивлением, а также некоторой индуктивностью. Изобразите схемы электрических

цепей, эквивалентных конденсатору и содержащих только идеальные резистор, катушку индуктивности и конденсатор.

4. (Р) Имеется отрезок провода радиусом сечения r_0 и длиной $l \gg r_0$. Изобразите составленный из провода контур, индуктивность которого имеет: *а*) наибольшее значение; *б*) наименьшее значение.

5. (Р) Резистор образован путем намотки на цилиндрический каркас провода из материала с высоким удельным электрическим сопротивлением. Предложите такой способ намотки, при котором индуктивность резистора оказывается минимальной.

6. На рис. В3.1 изображены характеристики линейного и нелинейного резисторов, конденсатора и катушки индуктивности. Постройте соответствующие им зависимости $r = u/i = f(i)$, $C = q/u = f(u)$, $L = \psi/i = f(i)$.

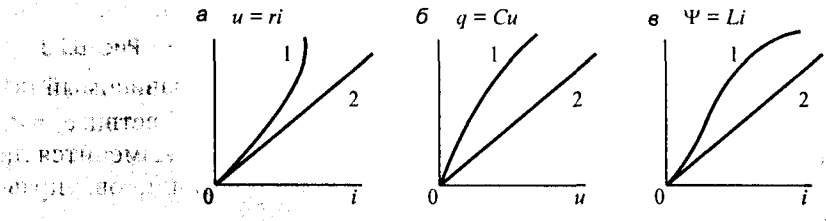


Рис. В3.1

7. (Р) Предложите способ нахождения индуктивности коаксиального кабеля, сечение которого изображено на рис. В3.2, основанный на расчете энергии магнитного поля тока кабеля, при допущении, что толщина оболочки *1* кабеля весьма мала.

8. Рассчитайте индуктивность плоского конденсатора с круглыми пластинами радиусом $R = 1$ см при расстоянии между ними $d = 1$ мм. Примите допущение, что ток конденсатора распределен между пластинами равномерно и не выходит за пределы цилиндра, образованного обкладками.

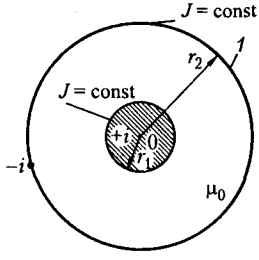


Рис. В3.2

9. Найдите ток конденсатора емкостью C при напряжении на его зажимах: *а*) $U_m \sin(\omega t + \psi_u)$; *б*) $U_m \cos \omega t$; *в*) kt; *г*) $U_0 = \text{const}$; *д*) $U_0 e^{-\alpha t}$; *е*) $U_0 e^{\alpha t}$.

10. Найдите напряжение на зажимах конденсатора емкостью $C = 10^{-5}$ Ф, учитывая, что $u_C(0) = 20$ В и его ток (в амперах) равен *а*) $0{,}1 \sin(314t + 30°)$; *б*) $0{,}2 \cos 314t$; *в*) $2e^{-10t}$; *г*) $0{,}35e^{t}$; *д*) $0{,}1t$; *е*) $2/(2 + t)$; *ж*) $1 - 2t$.

11. Рассчитайте напряжение на зажимах катушки индуктивностью $L = 0{,}1$ Гн, если ток (в амперах) в ней равен *а*) $10e^{-0{,}01t}$; *б*) $2t$; *в*) $1{,}5\,(1 - e^{-0{,}1t})$; *г*) $3e^{t}$; *д*) $2 \sin(314t + \pi/4)$; *е*) $3\sqrt{2}\cos(314t - \pi/3)$; *ж*) $5 \cdot 10^{-2} e^{-0{,}01t} \sin 314t$.

12. Рассчитайте ток катушки индуктивностью $L = 0{,}2$ Гн при $i_L(0) = 2$ А и напряжении (в вольтах) на ее зажимах: *а*) $100e^{-2t}$; *б*) $220\sqrt{2}\sin(314 - \pi/6)$; *в*) $127\sqrt{2}\sin 314t$; *г*) $15e^{-0{,}02t} \sin(314t - \pi/2)$; *д*) $100t$; *е*) 20; *ж*) $2te^{-0{,}2t}$.

3.2. Источники в электрических цепях

ВОПРОСЫ

1. Каким должно быть соотношение между сопротивлением $r_{вн}$ источника ЭДС и сопротивлением $r_н$ подключенной к нему нагрузки, чтобы напряжение на зажимах источника слабо зависело от тока нагрузки?

2. Чему равна внутренняя проводимость идеального источника тока?

3. Почему стремятся применять такие источники ЭДС, внутреннее сопротивление которых имеет как можно меньшее значение?

4. (О) Какому режиму работы источника ЭДС соответствует точка пересечения его внешней характеристики с осью: *а*) абсцисс; *б*) ординат (рис. В3.3)?

5. (О) Какие опыты следует поставить и какие величины измерить для нахождения внутреннего сопротивления источника ЭДС?

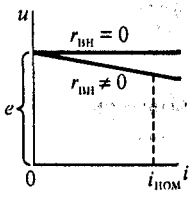


Рис. В3.3

6. В электрической цепи наряду с независимыми имеется также зависимый источник ЭДС e_k, включенный в k-ю ветвь и управляемый током i_j j-й ветви: $e_k = ri_j$, где r — постоянная величина. Является ли линейной такая цепь? Изменится ли ответ на этот вопрос, если зависимыми являются несколько источников, управляемых токами и напряжениями ветвей цепи?

7. (О) В цепи имеется контур, образованный только идеальными источниками ЭДС e_k. Какому условию должны удовлетворять ЭДС e_k, чтобы такое соединение было корректным (чтобы удовлетворялись законы Кирхгофа)?

8. (О) В цепи имеется узел, к которому подходят только идеальные источники тока $\mathfrak{I}_k$. Какому условию должны удовлетворять токи $\mathfrak{I}_k$, чтобы такое соединение было корректным (чтобы удовлетворялись законы Кирхгофа)?

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

1. Рассчитайте токи ветвей и напряжения на элементах изображенных на рис. В3.4 цепей.

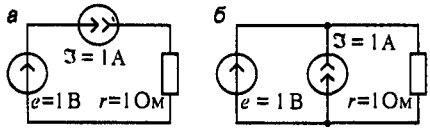


Рис. В3.4

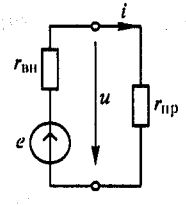


Рис. В3.5

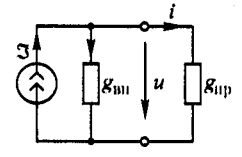


Рис. В3.6

2. (Р) Определите соотношение между сопротивлениями $r_{вн}$ и $r_{пр}$ в цепи, изображенной на рис. В3.5, при котором: *а*) мощность в приемнике будет наибольшей; *б*) величина $\eta = P_{пр}/P_{ист}$, равная отношению мощности в приемнике и мощности источника, принимает наибольшее значение.

3. Определите соотношение между проводимостями $g_{вн}$ и $g_{пр}$ в цепи, изображенной на рис. В3.6, при которых мощность в приемнике будет наибольшей. Рассчитайте значение $\eta = P_{пр}/P_{ист}$ при этом соотношении $g_{вн}$ и $g_{пр}$.

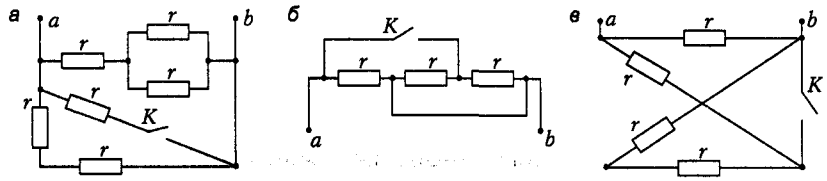


Рис. В3.7

4. Рассчитайте сопротивление цепи (рис. В3.7) между точками a и b при замкнутом и разомкнутом положении ключа K, $r = 1$ Ом.

3.3. Топологические понятия схемы электрической цепи

ВОПРОСЫ

1. Можно ли считать узлом место соединения двух ветвей?

2. Могут ли части несвязного графа иметь в схеме электрические соединения?

3. Может ли контур быть образован отрезками, входящими в различные части несвязного графа?

4. Граф состоит из двух узлов и десяти соединяющих их отрезков. Сколько деревьев содержит граф?

5. Может ли граф схемы состоять из одной ветви, соединяющей два узла? Ведь ток в этом случае незамкнут, что противоречит принципу непрерывности электрического тока?

6. Можно ли восстановить вид графа электрической цепи, если задано: *а*) одно из его деревьев; *б*) два его дерева; *в*) все деревья графа?

7. Совпадают ли понятия топологической и электромагнитной связей?

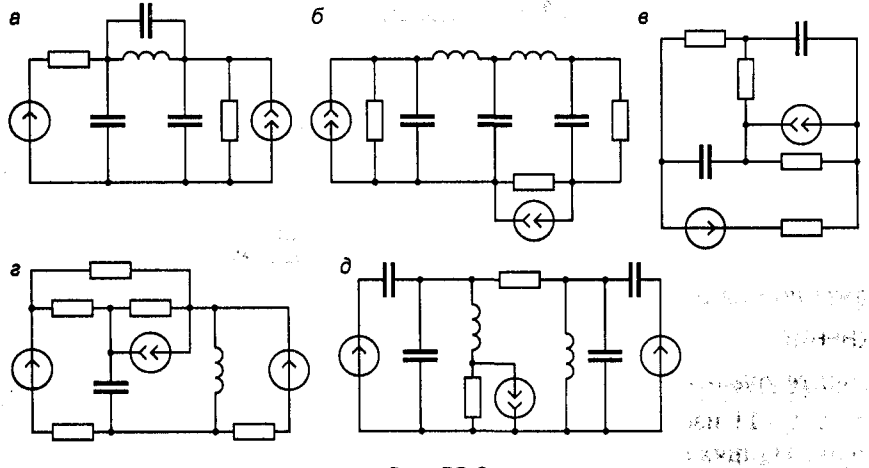


Рис. В3.8

8. Изменится ли граф схемы, если:

1) в одну из ее ветвей включить идеальный источник: *а*) ЭДС; *б*) тока?

2) к паре узлов, соединенных ветвью, подключить ветвь с идеальным источником: *а*) ЭДС; *б*) тока?

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Подсчитайте количество ветвей полного графа схемы, т. е. такого графа, в котором любые два узла соединены ветвью, при числе узлов графа: *а*) 3; *б*) 4; *в*) *N*.

2. На рис. В3.8 изображены схемы электрических цепей. Для каждой из них пронумеруйте узлы и ветви, изобразите граф и дерево графа.

3.4. Законы Кирхгофа

ВОПРОСЫ

1. Почему в уравнениях первого закона Кирхгофа выходящие из узла токи приняты положительными? Можно ли считать условно положительно направленными токи, подходящие к узлу?

2. В одной из ветвей цепи действует идеальный источник тока. Как следует учесть ток источника при записи уравнения первого закона Кирхгофа для узла, к которому подходит эта ветвь?

3. (О) В одной из ветвей цепи действует идеальный источник тока. Как найти напряжение на этой ветви?

4. Можно ли записать уравнение второго закона Кирхгофа для контура, одна из ветвей которого содержит только идеальный источник тока?

5. Можно ли записать уравнение второго закона Кирхгофа для изображенного на рис. В3.9 контура *ambna*?

6. Можно ли при составлении уравнений для токов ветвей цепи выбрать замкнутую поверхность *s* так, чтобы она охватывала несколько узлов, а не один?

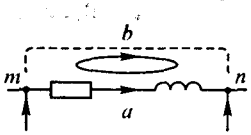


Рис. В3.9

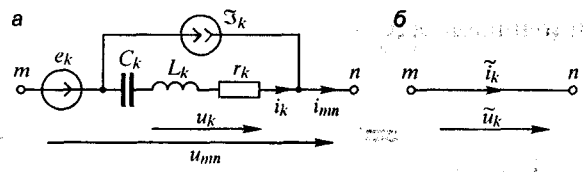


Рис. В3.10

7. Справедливы ли соотношения $\tilde{i}_k = i_k + \mathfrak{I}_k$, $\tilde{u}_k = u_k - e_k$ для обобщенной ветви, изображенной на рис. В3.10?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Запишите уравнения законов Кирхгофа для цепей, изображенных на рис. В3.8.

2. На рис. В3.11 изображены узлы *A*, *B*, *C*, *D*, *E* электрической цепи. Напряжения u_{AB}, u_{CB}, u_{DC}, u_{DE} заданы. Выразите через них напряжения u_{AC}, u_{AD}, u_{AE}, u_{BD}, u_{BE}, u_{DA}, u_{EA}, u_{EB}, u_{EC}.

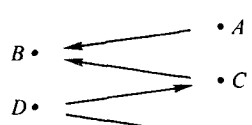


Рис. В3.11

3. (О) Почему ошибочно следующее рассуждение: уравнения $\Sigma\tilde{i}_k = 0$, $\Sigma\tilde{u}_k = 0$ имеют своими решениями $\tilde{i}_k = 0$, $\tilde{u}_k = 0$, так

что из соотношений $\tilde{i}_k = i_k + \Im_k$, $\tilde{u}_k = u_k - e_k$ можно легко найти величины i_k и u_k, не решая системы уравнений законов Кирхгофа?

3.5. Топологические матрицы

ВОПРОСЫ

1. Можно ли, пользуясь матрицей соединений, восстановить: *а*) граф цепи; *б*) схему цепи?

2. Имеет ли значение при составлении матрицы соединений, какую из строк расширенной матрицы соединений вычеркнуть?

3. К каким изменениям матрицы соединений приведет перенумерация: *а*) ветвей графа; *б*) узлов графа?

4. Зависит ли вид матрицы соединений от выбора дерева графа?

5. Может ли число ненулевых элементов строки матрицы соединений быть равным: *а*) одному; *б*) двум; *в*) трем или более?

6. Можно ли транспонированную матрицу соединений рассматривать как матрицу соединений некоторой схемы?

7. Может ли матрица соединений не иметь нулей?

8. Матрица соединений имеет размерность 4×6. Какова размерность: *а*) матрицы токов ветвей; *б*) матрицы $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{i}}$?

9. Сохраняется ли одним и тем же число контурных уравнений при выборе различных деревьев?

10. При каком порядке нумерации связей в матрице контуров можно выделить ее часть, представляющую собой единичную матрицу размерностью $[p - (q - 1)]\times[p - (q - 1)]$ (здесь p — число ветвей, q — число узлов графа)?

11. Источников ЭДС в цепи нет. Означает ли это, что уравнению $\mathbf{C}\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ соответствует решение $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$?

12. При каком порядке нумерации ветвей дерева графа в матрице сечений можно выделить часть, являющуюся единичной матрицей?

13. Число узлов графа равно q. Какое наибольшее число ненулевых элементов может содержаться в строке матрицы сечений?

14. Можно ли в системе уравнений $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{i}} = \mathbf{0}$, $\mathbf{C}\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$, $\tilde{\mathbf{u}} = f(\tilde{\mathbf{i}})$ заменить уравнения $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{i}} = \mathbf{0}$ на уравнения $\mathbf{D}\tilde{\mathbf{i}} = \mathbf{0}$? Изменятся ли решения $\tilde{\mathbf{i}}$, $\tilde{\mathbf{u}}$ этих уравнений?

15. Можно ли, имея матрицу сечений, составить: *а*) матрицу соединений; *б*) матрицу контуров?

16. Изменится ли матрица сечений, если к некоторым узлам цепи подключить ветви с идеальным источником: *а*) ЭДС; *б*) тока?

17. Изменится ли матрица сечений, если в некоторые из ветвей цепи включить дополнительные идеальные источники: *а*) ЭДС; *б*) тока?

18. Токи связей найдены. С помощью какой из матриц (подматриц) можно рассчитать токи ветвей дерева?

19. Ветви дерева и связи пронумерованы произвольно. Можно ли вычислить матрицы **C** и **D** по известной матрице **A**?

20. Можно ли, зная элементы матрицы **C** и подматрицы $\mathbf{A}_2$ (см. § 3.16), составить матрицу **A**?

21. В матрице соединений утеряна информация об элементах k-го столбца. Можно ли ее восстановить, если известны элементы: *а*) матрицы контуров; *б*) сечений?

УПРАЖНЕНИЯ

1. На рис. В3.12 изображены графы схем электрических цепей. Составьте матрицы соединений. Рассчитайте значения определителей матриц. Зависят ли они от нумерации ветвей и узлов графа?

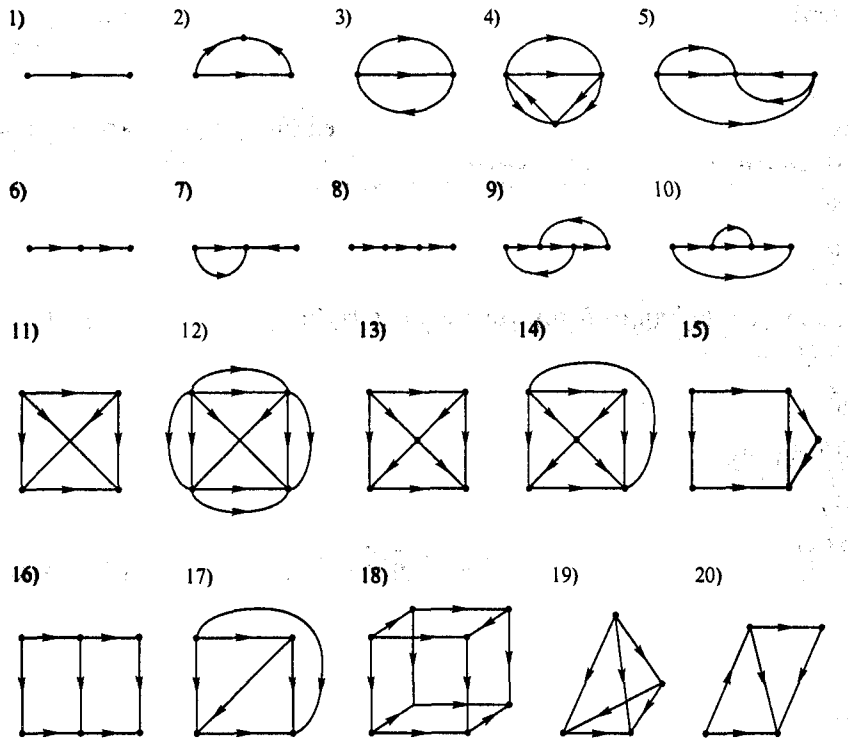


Рис. В3.12

2. Составьте граф схемы, матрица соединений **A** которой известна:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

3. (Р) Укажите ошибки, допущенные при составлении матрицы соединений

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \mathrm{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

4. Считая, что в цепи (рис. В3.13) наряду с изображенными действуют дополнительные источники тока $\mathfrak{I}_k$ ($k = 1, 2, \ldots, 5$), направленные от узла с меньшим номером к узлу с большим номером, составьте матрицы $\mathfrak{I}$ и $\mathbf{A}\mathfrak{I}$.

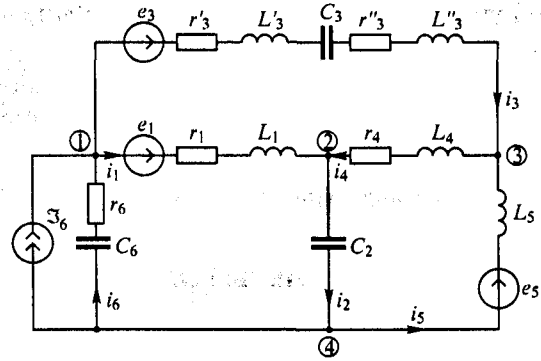


Рис. В3.13

5. Путь между узлами m и n проходит по нескольким ветвям графа. В электрической цепи эти узлы соединяет также источник тока, направленный от узла m к узлу n. Составьте матрицу $\mathfrak{I}$, считая, что число ветвей графа равно p и что источников в цепи больше нет.

6. Составьте матрицы контуров графов схем, изображенных на рис. В3.12.

7. Составьте матрицы сечений графов схем, изображенных на рис. В3.12.

8. Запишите векторы $\mathfrak{I}$ для схем, изображенных на рис. В3.8.

9. Изобразите граф схемы, матрица сечений $\mathbf{D}$, которого имеет вид

$$\mathbf{D} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

10. Убедитесь в справедливости соотношений $\mathbf{C}\mathbf{D}^{\mathrm{t}} = \mathbf{0}$, $\mathbf{D}\mathbf{C}^{\mathrm{t}} = \mathbf{0}$, выражающих ортогональность матриц контуров и сечений.

3.6. Уравнения электрических цепей

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Ветви цепи содержат в общем случае несколько последовательно соединенных элементов, каждый из которых можно отнести к отдельной ветви. Укажите преимущества и недостатки такого подхода при составлении уравнений цепи на основе топологических матриц.

2. (Р) Источник тока $\mathfrak{I}_p$ управляется током и равен $\mathfrak{I}_p = \alpha_{pq} i_q$. Какие преобразования уравнений $\mathbf{Ai} = -\mathbf{A}\mathfrak{I}$ необходимо выполнить, чтобы правая часть уравнения не содержала тока i_q. Сформулируйте алгоритм преобразования матрицы **A** для случая, когда все источники тока управляются током одной из ветвей.

3. Источники ЭДС e управляются напряжениями ветвей. Сформулируйте алгоритм преобразования уравнений $\mathbf{Cu} = \mathbf{Ce}$, при котором в правую часть не будут входить ЭДС управляемых источников.

4. В линейной цепи действуют источники тока, управляемые напряжениями ветвей, и источники напряжения, управляемые токами ветвей. Изложите алгоритм преобразования уравнений цепи $\mathbf{Ai} = -\mathbf{A}\mathfrak{I}$, $\mathbf{Cu} = \mathbf{Ce}$, $\mathbf{i} = \mathbf{Gu}$, $\mathbf{u} = \mathbf{Ri}$, при котором в правой части первых двух уравнений остаются только независимые источники.

4.1. Характеристики синусоидальных ЭДС, напряжений и токов

ВОПРОСЫ

1. Период изменения одного из синусоидальных напряжений равен 0,02 с, частота изменения другого 60 Гц. У которого их них больше угловая частота?

2. У какого из двух электромашинных генераторов синусоидальной ЭДС, имеющих одну и ту же частоту напряжения, скорость вращения ротора выше и во сколько раз: у двухполюсного или четырехполюсного?

3. Разность фаз двух напряжений возрастает по линейному закону от времени $\varphi = kt$. Каково соотношение между частотами этих напряжений?

4. (О) Совпадают ли кривые, соответствующие функциям напряжения (в вольтах):

а) $u_1 = 1 \sin \omega t$ и $u_2 = 1 \sin (\omega t + \pi)$;

б) $u_1 = 10 \sin (\omega t + 30°)$ и $u_2 = 10 \cos (\omega t + 60°)$;

в) $u_1 = 127\sqrt{2} \sin (\omega t - 5°)$ и $u_2 = 127\sqrt{2} \sin (\omega t + 355°)$;

г) $u_1 = 220\sqrt{2} \sin (\omega t - 2/3\ \pi)$ и $u_2 = 220\sqrt{2} \sin (\omega t + 4/3\ \pi)$.

5. (О) Справедливо ли следующее утверждение: все электрические генераторы переменного напряжения, входящие в единую энергетическую систему, вращаются с одной угловой частотой?

6. Зависят ли средние и действующие значения синусоидальных токов от их начальных фаз?

7. Во сколько раз изменится среднее значение синусоидального тока при увеличении его периода в 2 раза и сохранении той же амплитуды?

8. Во сколько раз изменится действующее значение синусоидального тока при увеличении его амплитуды в n раз и сохранении той же частоты?

9. Изменятся ли коэффициент формы $k_ф$ и коэффициент амплитуды $k_а$ синусоидального напряжения при изменении его амплитуды от U_m до $2U_m$ и сохранении того же периода?

10. Среднее значение одного из двух синусоидальных напряжений больше, чем другого. Справедливо ли такое же соотношение для действующих значений этих напряжений? Справедливо ли обратное утверждение?

11. Коэффициенты формы двух несинусоидальных периодических напряжений одинаковы. Одинаковы ли формы кривых этих напряжений? Изменится ли ответ, если одинаковы коэффициенты амплитуды этих напряжений?

12. Равны ли средние (действующие) значения произведения синусоидальных тока и напряжения произведению, соответственно, их средних (действующих) значений?

13. Изобразите кривую ЭДС $e(t)$, для которой коэффициент формы меньше единицы. Чему равны максимально возможные значения $k_ф$ и $k_а$?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Определите угол сдвига φ между напряжением u и током i и изобразите на графике кривые $u(t)$ и $i(t)$:

а) $i = 10\sqrt{2}\sin(\omega t + 20°)$, $u = 220\sqrt{2}\sin(\omega t - 20°)$;

б) $i = 10\sin(\omega t + \pi)$, $u = 220\sqrt{2}\sin(\omega t - \pi)$;

в) $i = I_m\sin(\omega t + \pi/3)$, $u = U_m\sin(\omega t + \varphi + \pi/3)$;

г) $i = \sqrt{2}\sin(\omega t + 180°)$, $u = \sin(\omega t + 90°)$;

д) $i = -2\sqrt{2}\sin(\omega t - 90°)$, $u = 100\sin\omega t$;

е) $i = -\sin\omega t$, $u = \cos\omega t$, *ж*) $i = 2\cos\omega t$, $u = 10\sin\omega t$.

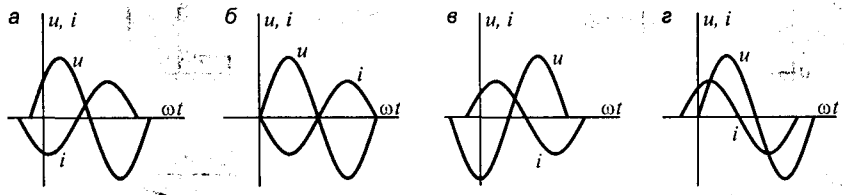


Рис. В4.1

2. Укажите графики, на которых изображено напряжение, опережающее ток (рис. В4.1).

3. Синусоидальное напряжение $u(t)$ с амплитудой U_m изображено на рис. В4.2 при принятом начале отсчета времени в точке 0. Запишите выражение для напряжения $u(t)$ при других началах отсчета времени t_1, t_2, t_3, t_4, указанных на рисунке.

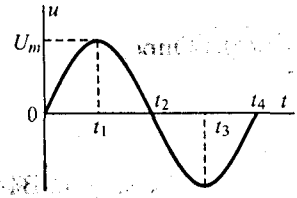


Рис. В4.2

4. Изобразите кривые мгновенных токов и напряжений так, чтобы выполнялись следующие условия: *а*) ток опережал напряжение на $\pi/2$; *б*) напряжение опережало ток на $\pi/4$; *в*) ток и напряжение были в квадратуре; *г*) ток и напряжение были в фазе, в противофазе.

5. (Р) Определите действующие значения периодических токов и напряжений, изображенных на рис. В4.3.

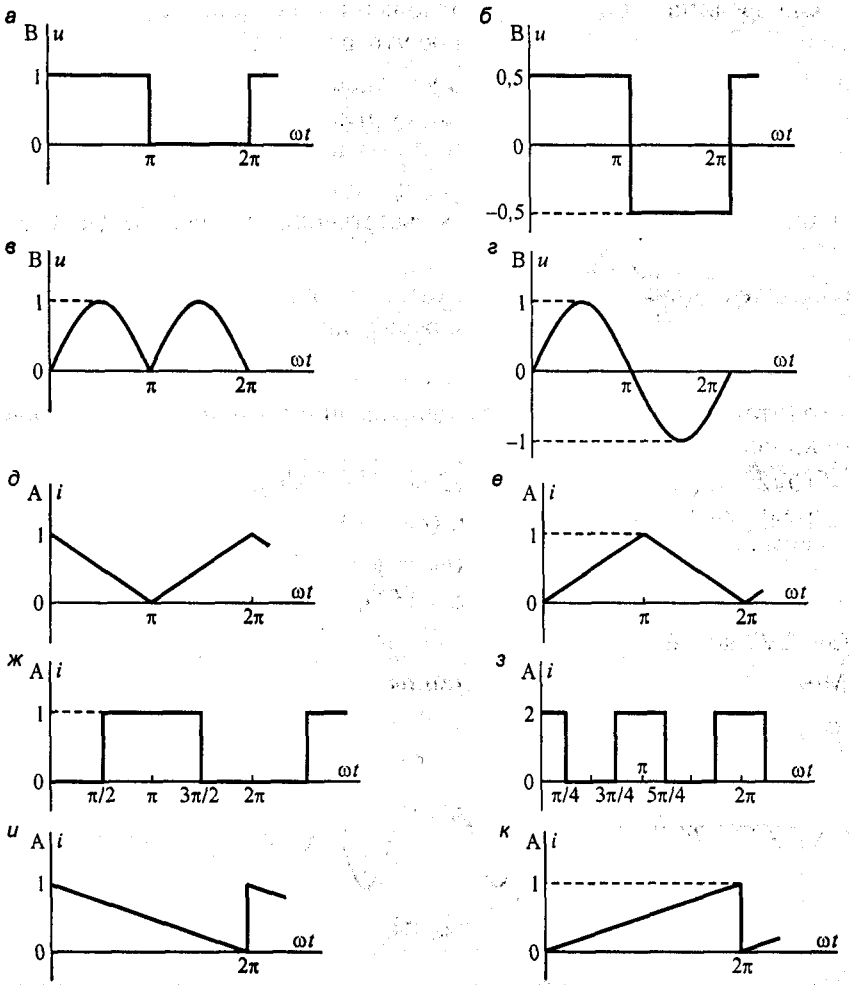


Рис. В4.3

6. (О) Определите среднее значение ЭДС, индуцируемой периодически изменяющимся потокосцеплением, вид которого указан на рис. В4.4. Изобразите кривые $e(t)$.

7. Определите коэффициент формы и коэффициент амплитуды кривых, представленных на рис. В4.4.

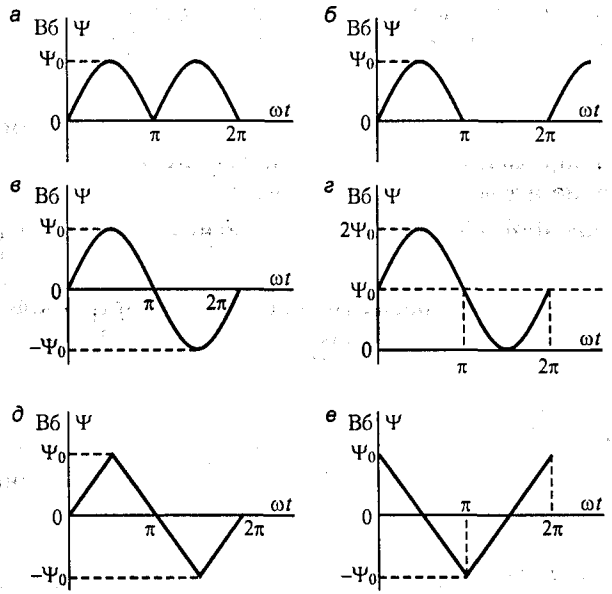


Рис. В4.4

8. (Р) Сформулируйте условия, при выполнении которых напряжение $u(t)$, равное сумме напряжений $U_{m1} \sin(\omega_1 t + \psi_1)$ и $U_{m2} \sin(\omega_2 t + \psi_2)$, изменяется по периодическому закону.

4.2. Векторные диаграммы

ВОПРОСЫ

1. (О) Можно ли при построении векторных диаграмм использовать не действующие и амплитудные значения, а средние значения синусоидальных величин?

2. (О) Возможно ли изображение на одной векторной диаграмме следующих пар напряжений и токов:

а) $u_1 = U_{m1} \sin \omega t$ и $u_2 = U_{m2} \cos \omega t$;

б) $i = I_m \sin(\omega t - \pi)$ и $u = U_{m1} \sin \omega t + U_{m2} \sin(\omega t + \pi/2)$;

в) $i_1 = I_{m1} \sin \omega t$ и $i_2 = I_{m2} \sin 2\omega t$;

г) $u_1 = U_{m1} \sin 3\omega t$ и $u_2 = -U_{m2} \sin 3\omega t$.

3. (О) Каков угол сдвига по фазе между синусоидальным током контура и обусловленным им магнитным потоком? Между ЭДС самоиндукции контура и вызвавшим ее магнитным потоком?

4. Угол между векторами, соответствующими синусоидально изменяющимся току и напряжению, равен φ при $t = t_1$. Сохранит ли он свое значение при $t_2 > t_1$? В каком случае значение φ зависит от времени?

5. Соответствуют ли правила сложения синусоидальных величин на векторной диаграмме правилам их сложения в тригонометрии?

6. (О) Можно ли с помощью векторных диаграмм изображать периодические несинусоидальные величины?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Изобразите на векторной диаграмме ток и напряжение таким образом, чтобы: *а*) ток опережал напряжение на 30°; *б*) напряжение и ток находились в противофазе; *в*) напряжение и ток находились в фазе.

Запишите соотношения, связывающие начальные фазы тока и напряжения в указанных выше случаях.

2. Изобразите на векторной диаграмме следующие пары токов и напряжений:

а) $u = U_m \sin \omega t$, $i = I_m \sin (\omega t + \pi/2)$;

б) $u = U_m \sin \omega t$, $i = I_m \cos \omega t$;

в) $u = U_m \sin \omega t$, $i = I_m \sin (\omega t + \pi)$.

3. На векторной диаграмме выполните сложение двух напряжений (в вольтах):

а) $u_1 = \sqrt{2} \sin \omega t$, $u_2 = \sqrt{2} \sin (\omega t + \pi/2)$;

б) $u_1 = \sqrt{2} \sin \omega t$, $u_2 = \sqrt{2} \cos \omega t$;

в) $u_1 = \sqrt{2} \sin (\omega t - \pi/4)$, $u_2 = \sqrt{2} \sin (\omega t + \pi/4)$;

г) $u_1 = -\sin \omega t$, $u_2 = \sin \omega t$;

д) $u_1 = \sin \omega t$, $u_2 = \sin (\omega t + \pi)$.

4. Ток катушки индуктивности и напряжение на ней связаны соотношением $u_L = Ldi/dt$. Изобразите на векторной диаграмме векторы $\bar{U}_L$ и $\bar{I}_L$ при $i_L = I_m \sin \omega t$.

5. Решите предыдущую задачу, рассматривая вместо катушки индуктивности *а*) резистор *r*, *б*) конденсатор *C*.

6. (Р) Магнитный поток Ф, сцепленный с контуром, изменяется по синусоидальному закону. Изобразите на векторной диаграмме векторы потока и индуцируемой им в контуре ЭДС.

7. (Р) В контуре течет синусоидальный ток. Изобразите на векторной диаграмме вектор магнитного потока, сцепленного с контуром, и вектор ЭДС самоиндукции.

8. Изобразите на векторной диаграмме два тока, сумма которых равна нулю.

9. (Р) Изобразите векторы трех токов, действующие значения которых равны, а сумма равна нулю.

10. (О) Синусоидальные токи и напряжения не могут иметь частоту $\omega < 0$. Однако понятие отрицательной частоты может быть введено формально и соответствующие векторы также можно изображать на векторных диаграммах. Чем различаются изображения векторов $i = I_m \sin \omega t$ и $u = U_m \sin (\omega t + \varphi)$ при $\omega > 0$ и $\omega < 0$?

11. (О) На рис. В4.5 показаны векторные диаграммы, соответствующие некоторому элементу электрической цепи. Изобразите эти элементы.

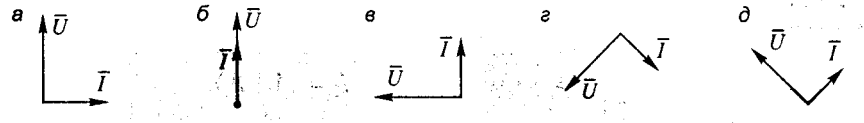


Рис. В4.5

12. (О) На схемах рис. В4.6 указаны действующие значения напряжений элементов двухполюсников. Определите с помощью векторных диаграмм действующее значение U входного напряжения.

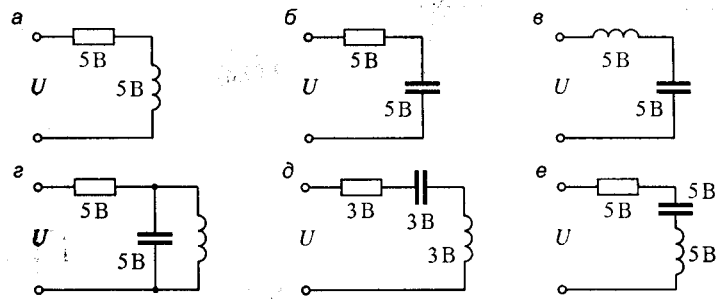


Рис. В4.6

13. (Р) Изобразите на векторных диаграммах токи и напряжения на всех участках цепей, показанных на рис. В4.7. Параметры элементов цепей, а также напряжение на входе цепей примите произвольными.

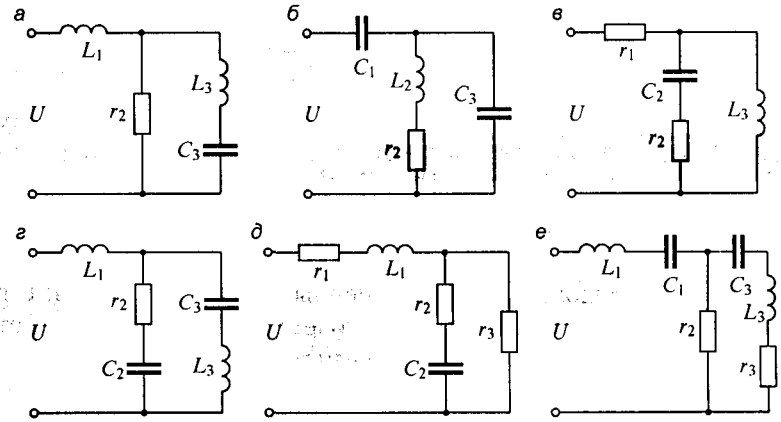


Рис. В4.7

14. (Р) Изобразите схему электрической цепи, содержащую пять последовательно соединенных элементов, в которой при напряжении на входе $U = 220$ В действующие значения напряжения на каждом из ее элементов также равны 220 В.

15. (Р) Три элемента электрической цепи соединены последовательно-параллельно, причем действующие значения напряжения на входе цепи и на каждом из ее элементов равны. Изобразите схему цепи и ее векторную диаграмму.

16. (Р) Постройте векторные диаграммы для схем электрических цепей (рис. В4.8) и определите численные значения указанных величин:

а) определите U, I ($r_2 = \dfrac{1}{\omega C_2} = 2$ Ом; $I_1 = 10$ А; $I_2 = 14{,}1$ А);

б) определите U, I ($I_2 = I_3 = 4$ А; $\omega L_1 = r_2 = 10$ Ом);

в) определите I ($U = 10$ В; $I_3 = 2$ А; $r_1 = 2$ Ом; $\dfrac{1}{\omega C_3} = 3$ Ом);

г) определите I, I_2, I_3 ($U = U_1 = U_2 = 200$ В; $\dfrac{1}{\omega C_1} = 50$ Ом);

д) определите U ($I_1 = I_2 = 4$ А; $r_1 = \omega L_1 = \omega L_2 = 2$ Ом);

е) определите I, I_1, I_2 ($U = 20$ В; $U_{L_2} = 10$ В; $\dfrac{1}{\omega C_2} = 6$ Ом; $r_1 = 4$ Ом).

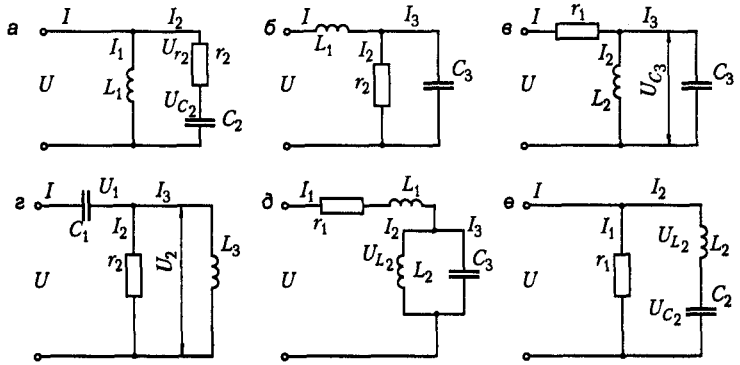


Рис. В4.8

4.3. Ток в цепи с последовательным и параллельным соединением элементов *r, L, C*

ВОПРОСЫ

1. (О) Для цепи с последовательно соединенными участками r, L и C построена векторная диаграмма. Возможны ли такие сочетания значений параметров r, L и C, при которых: *а*) вектор напряжения на резисторе находится в фазе с вектором напряжения на катушке; *б*) вектор тока находится в фазе с вектором входного напряжения; *в*) вектор напряжения на конденсаторе отстает от вектора напряжения на катушке на угол $\pi/2$; *г*) вектор напряжения на резисторе находится в фазе с вектором входного напряжения?

2. Возможно ли выполнение следующих соотношений в изображенной на рис. В4.9 цепи: *а*) $U < U_r$; *б*) $U < U_L$; *в*) $U > U_C$; *г*) $U_r = U_C$; *д*) $U_C > U_L$; *е*) $U = U_r$.

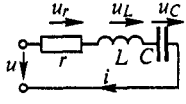


Рис. В4.9

3. Правильные утверждения вопросов 1 и 2 переформулируйте таким образом, чтобы они относились (и оставались справедли-

выми) к цепи, содержащей параллельно соединенные участки g, L и C. Проведите аналогию между цепями, состоящими из последовательно соединенных участков r, L и C и параллельно соединенных участков g, L и C.

4. (О) Почему, несмотря на одинаковую размерность величин r и x, а также g и b, при расчетах нельзя использовать величины $z = r \pm x$; $y = g \pm b$?

5. (О) Почему в выражении для реактивного сопротивления (проводимости) индуктивное и емкостное сопротивления (проводимости) входят с разными знаками?

6. В цепи, состоящей из последовательно соединенных участков r, L, C, величина r стремится к нулю. Опишите изменение угла сдвига между входными током и напряжением.

7. (О) Угол сдвига между током и напряжением в электрической цепи, состоящей из последовательно соединенных участков r, L, C (параллельно соединенных участков g, L, C), положителен. Можно ли изменить знак угла, изменяя: *а*) сопротивление r (проводимость g); *б*) частоту приложенного напряжения; в) емкость C; *г*) индуктивность L?

8. Цепь состоит из последовательно соединенных источника синусоидальной ЭДС и резистора. Изменится ли активное сопротивление цепи, если параллельно резистору подключить: *а*) конденсатор; *б*) катушку индуктивности; *в*) другой резистор?

9. (Р) В каких пределах будет изменяться угол между входным током и напряжением на входе двухполюсника, состоящего из соединенных последовательно участков r, L и C, при изменении сопротивления r резистора от нуля до бесконечности?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Укажите соотношения между величинами r, L и C для цепи, состоящей из последовательно соединенных участков r, L, C, при которых ток: *а*) опережает напряжение на 45°; *б*) совпадает с напряжением по фазе; *в*) отстает от напряжения на угол $\pi/2$.

2. Определите значение угловой частоты ω_0, при котором активное сопротивление (активная проводимость) цепи, состоящей из последовательно (параллельно) включенных участков r (g), L, C равно ее полному сопротивлению (полной проводимости).

3. (Р) Активное сопротивление провода катушки при частоте ω_0 в два раза меньше ее реактивного сопротивления ($r = x_L/2$). Определите частоту ω_1, при которой будет выполняться равенство $r = 2x_L$, при условии, что активное сопротивление не зависит от частоты.

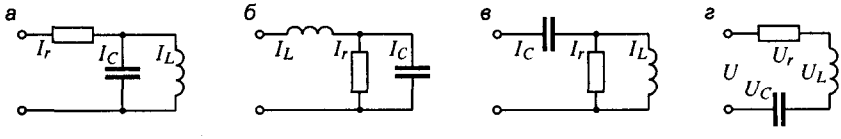


Рис. В4.10

4. (Р) Для изображенных на рис. В4.10 цепей определите отсутствующие в таблице значения тока (схемы *а*, *б*, *в*) или напряжения (схема *г*).

Номер варианта	I_r, А	I_C, А	I_L, А	U_r, В	U_L, В	U_C, В	U, В
1*	?	5	2	1	1	1	?
2	1	?	3	40	40	?	40
3	5	3	?	10	?	200	220

* Для схем *а*, *в*, *г*.

5. Выразите действующие значения указанных на схемах (рис. В4.11) токов и напряжений через заданные функции $e_1(t) = E_{m1} \sin \omega t$, $e_2(t) = E_{m2} \sin (\omega t + \pi/2)$, $\mathfrak{I}_1(t) = \mathfrak{I}_{m1} \sin \omega t$, $\mathfrak{I}_2(t) = \mathfrak{I}_{m2} \sin (\omega t + \pi/2)$ и величины r, L, C.

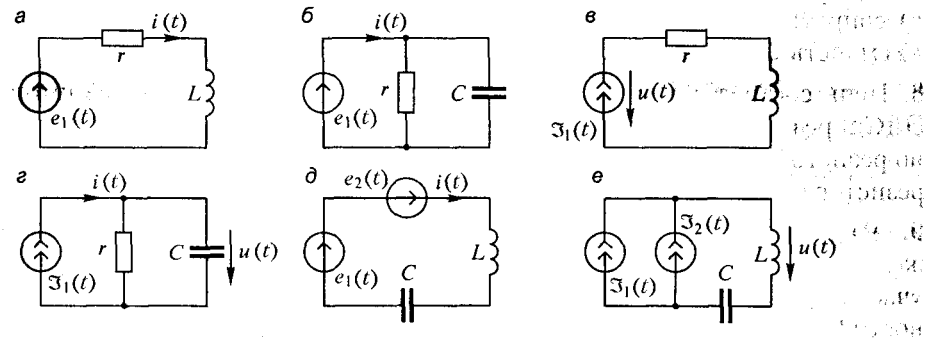


Рис. В4.11

6. (Р) Составьте простейшие схемы двухполюсников, у которых угол сдвига по фазе φ между входными током и напряжением: *а*) $\varphi > 0$, *б*) $\varphi = -\pi/2$, *в*) $\varphi = 0$, *г*) $\varphi < 0$, *д*) $\varphi = \pi/2$.

ЗАДАЧИ

1. (Р) Покажите, что не существует двухполюсников, содержащих только элементы r, L и C, для которых $|\varphi| > \pi/2$.

2. (Р) Цепь, состоящая из последовательно соединенных участков r, L и C, подключена к источнику ЭДС $e(t) = E_m \sin \omega t$. Получите выражения для величин $I(\omega)$, $U_r(\omega)$, $U_L(\omega)$. Определите частоту ω_0, при которой $I(\omega)$ достигает максимума.

4.4. Мощность в цепи синусоидального тока

ВОПРОСЫ

1. (О) Может ли электрическая цепь, в которой полная мощность S равна активной мощности P, содержать реактивные элементы?

2. При каком условии активная мощность в цепи равна нулю? Изобразите электрическую цепь, соответствующую этому случаю.

3. (О) Могут ли быть отрицательными: *а*) полная мощность; *б*) активная мощность; *в*) реактивная мощность. Приведите примеры.

4. Почему в электроэнергетике стремятся к повышению коэффициента мощности?

5. Цепь с последовательно соединенными участками r, L находится под действием источника напряжения $u(t) = U_m \sin \omega t$. Изменится ли активная мощность в цепи, если изменить частоту ω?

6. Справедливо ли утверждение о том, что в двухполюснике отсутствуют реактивные элементы, если $\varphi = 0$?

7. (О) Мгновенная мощность на входе цепи, состоящей из последовательно соединенных участков r, L и C, равна сумме мгновенных мощностей на каждом из элементов. Справедливо ли это утверждение для более сложных схем?

8. Имеют ли место колебания энергии в цепях с одним реактивным элементом?

9. Колеблется ли активная мощность при колебаниях мгновенной мощности?

10. (О) Можно ли, пользуясь графиком мгновенной мощности, определить, какой характер (емкостный или индуктивный) имеет сопротивление цепи?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Выразите коэффициент мощности двухполюсников (рис. В4.12) через их параметры, считая, что двухполюсники подключены к источнику синусоидального напряжения.

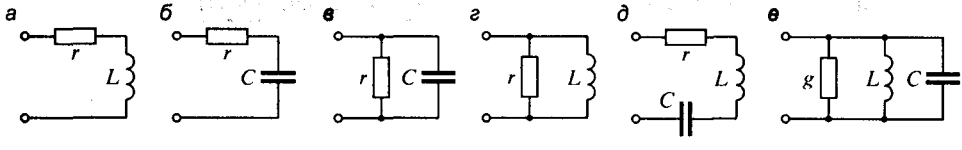


Рис. В4.12

2. Выразите $\cos \varphi$ цепи через активную P и реактивную Q мощности в цепи синусоидального тока.

3. На рис. В4.13 приведены осциллограммы одного периода тока и напряжения двухполюсника. Найдите активную мощность, потребляемую двухполюсником.

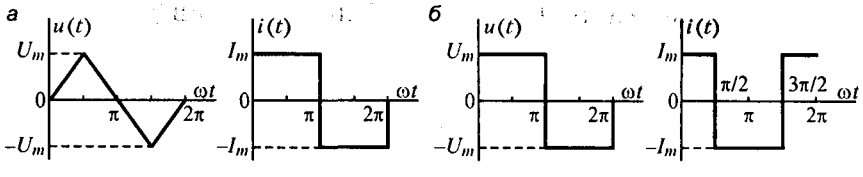


Рис. В4.13

4. (Р) Как изменится активная мощность цепи, изображенной на рис. В4.14, при $e(t) = E_m \sin \omega t$, если внутрь катушки внести ферромагнитный сердечник? (Потерями в сердечнике пренебречь.)

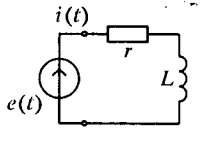


Рис. В4.14

5. (О) Генератор синусоидального напряжения имеет номинальное напряжение U_0, номинальный ток I_0 и может при активной нагрузке развить мощность $P_0 = U_0 I_0$. На сколько пришлось бы повысить напряжение генератора U_0 при $I_0 = \text{const}$, чтобы активная мощность P_0 в нагрузке осталась неизменной при коэффициенте мощности нагрузки: *а*) 0,8; *б*) 0,6; *в*) 0,5?

6. Известны активная мощность P в цепи, а также полная мощность S и приложенное к цепи напряжение U. Найдите выражения для определения параметров r, x, z, g, b, y цепи.

7. (Р) Сопротивление проводов катушки индуктивности при частоте ω_0 меньше ее индуктивного сопротивления в 2 раза. Как надо изменить частоту тока, чтобы коэффициент мощности вырос в 2 раза? Примите допущение о независимости сопротивления проводов от частоты.

8. (Р) Определите коэффициент мощности в изображенных на рис. В4.15 схемах, считая показания приборов известными.

а) $V_1 = 120$ В, $V_2 = 50$ В, $A_1 = 2$ А, $P_2 = 50$ Вт;

б) $V_1 = 100$ В, $A_1 = 2$ А, $P_2 = 50$ Вт.

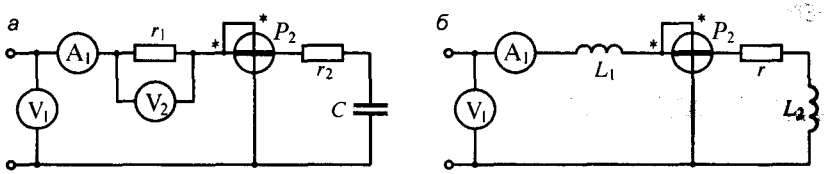


Рис. В4.15

9. (Р) Определите показания ваттметра в изображенных на рис. В4.16 схемах.

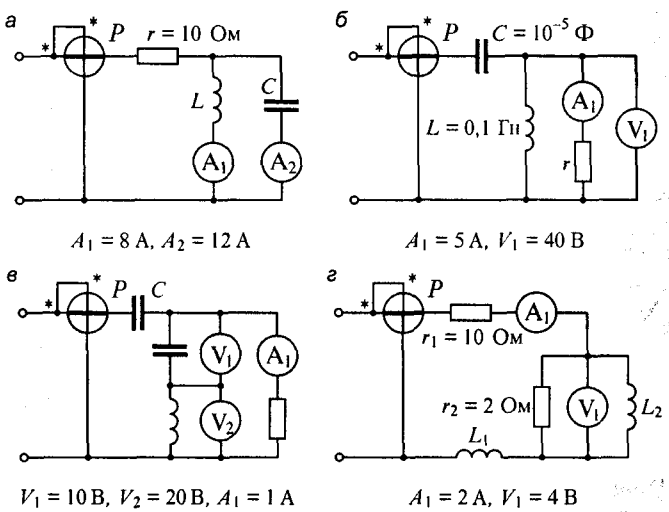


Рис. В4.16

10. На рис. В4.17 изображен график мгновенной мощности у потребителя электроэнергии. Определите активную, реактивную и полную мощности, а также cos φ, с которым работает потребитель.

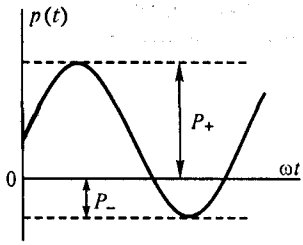


Рис. В4.17

$$P_+ = 500 \text{ В·А}, \quad P_- = 100 \text{ В·А}$$

11. Получите выражения для мгновенной мощности на зажимах всей цепи, а также для мгновенных мощностей на каждом из элементов изображенных на рис. В4.18 цепей ($e(t) = E_m \sin \omega t$, $\Im(t) = \Im_m \sin \omega t$).

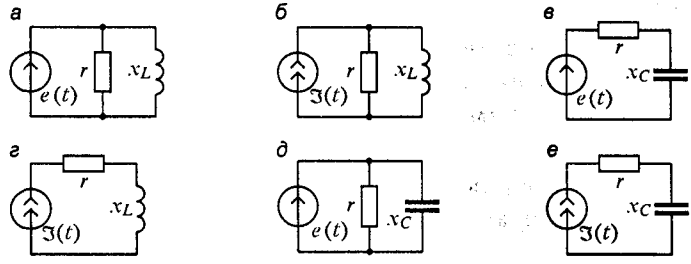


Рис. В4.18

ЗАДАЧИ

1. (Р) Докажите, что в цепи, состоящей из последовательно соединенных участков r, L, при изменении r, постоянной индуктивности L и постоянной амплитуде приложенного к цепи синусоидального напряжения активная мощность достигает максимального значения при $r = \omega L$.

2. (Р) В условиях предыдущей задачи определите максимум активной мощности при постоянном r и переменной L.

3. (Р) С помощью векторной диаграммы поясните, каким образом подключение конденсатора параллельно активно-индуктивной нагрузке может увеличить коэффициент мощности.

4.5. Эквивалентные параметры цепи, рассматриваемой как двухполюсник

ВОПРОСЫ

1. Эквивалентные параметры $r_э$ и $g_э$ некоторого двухполюсника известны. Можно ли по этим данным определить величины $b_э$ и $x_э$?

2. (О) Можно ли изменить активную проводимость цепи, не изменяя ее активного сопротивления?

3. (О) Цепь переменного тока состоит из источника ЭДС и резистора. Какие элементы следует включить в цепь, чтобы вдвое уменьшить ее эквивалентную активную проводимость, оставив неизменным активное сопротивление?

4. (О) Известны коэффициент мощности двухполюсника и его эквивалентное полное сопротивление. Могут ли быть однозначно определены по этим данным эквивалентное активное и реактивное сопротивления двухполюсника?

5. Реактивная мощность двухполюсника отрицательна. Означает ли это, что его эквивалентное реактивное сопротивление носит емкостный характер? Может ли этот двухполюсник содержать катушки индуктивности?

6. Может ли один и тот же двухполюсник иметь различные схемы замещения при разных частотах синусоидального тока?

7. (О) Можно ли построить двухполюсник с реактивными элементами, входные сопротивление и проводимость которого не зависят от частоты?

8. Эквивалентное активное сопротивление массивного проводника при частоте тока ω_0 равно r_0. Как изменяется эквивалентное сопротивление проводника при увеличении частоты? С каким физическим явлением связано изменение сопротивления?

9. (О) К катушке индуктивности, находящейся под действием переменного напряжения, поднесли медную болванку. Как изменится эквивалентное активное сопротивление катушки?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Укажите способ измерения эквивалентного полного сопротивления и эквивалентного активного сопротивления цепи. Изобразите схему с использованием амперметра, вольтметра и ваттметра для выполнения измерений.

2. (Р) Схема некоторого двухполюсника неизвестна. Используя амперметр, вольтметр и ваттметр, а также дополнительные конденсатор и катушку индуктивности, предложите несколько различных опытов, которые позволят определить величину и знак эквивалентного реактивного сопротивления двухполюсника.

3. (Р) Для схем, изображенных на рис. В4.19, определите эквивалентные параметры $r_э$, $x_э$, $z_э$, $y_э$, $b_э$, $g_э$ при $x_L = x_C = r = 1$ Ом.

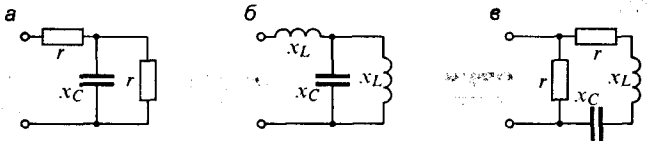


Рис. В4.19

4. (Р) Для схем, изображенных на рис. В4.20, определите величину x_C, при которой ток на входе цепи и приложенное к ней напряжение совпадают по фазе.

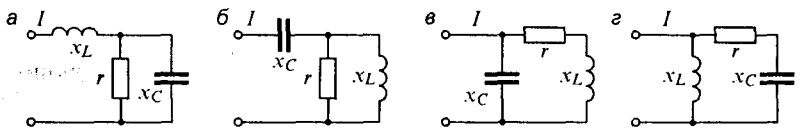


Рис. В4.20

5. (Р) Параметры изображенных на рис. В4.21 электрических цепей при частоте $\omega = \omega_0$ напряжения на входе таковы, что $r \cong x_L \cong x_C$. Составьте схемы замещения этих цепей при $\omega >> \omega_0$; $\omega << \omega_0$.

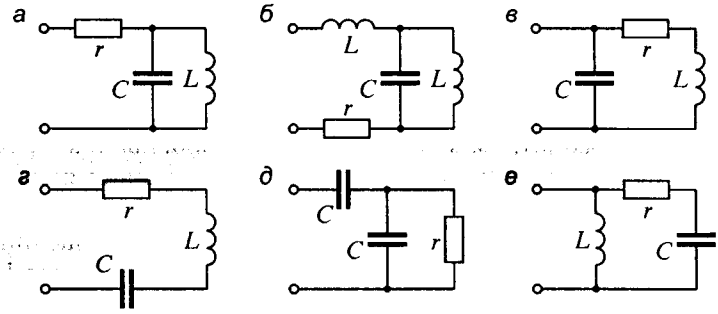


Рис. В4.21

6. Приведите примеры цепей, схемы замещения которых следует изменять при изменении частоты напряжения на входе.

ЗАДАЧИ

1. (Р) На рис. В4.22 изображены две электрические цепи. Укажите диапазон изменения частоты ω тока, при котором эти цепи могут рассматриваться как последовательные *rL*-цепи.

2. Известны реактивная составляющая приложенного к цепи напряжения $U_р$, реактивная составляющая тока цепи $I_р$, активная мощность P, потребляемая цепью. Получите выражения для определения следующих величин: cos φ, r, x, z, а также активных составляющих тока и напряжения.

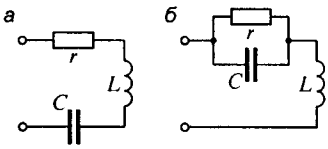


Рис. В4.22

3. (Р) Цепь состоит из последовательно соединенных источника синусоидальной ЭДС, действующее значение которой равно E, и двухполюсника, эквивалентные активное и реактивное сопротивления которого равны, соответственно, $r_э$ и $x_э$. Определите активную $I_а$ и реактивную $I_р$ составляющие тока двухполюсника.

Вопросы, задачи и упражнения к главам 6, 7 и 8

6.1. Резонанс при последовательном соединении элементов *r, L, C*

ВОПРОСЫ

1. Можно ли достичь резонанса в изображенной на рис. В6.1 цепи, изменяя: *а*) емкость конденсатора; *б*) приложенное к цепи напряжение; *в*) сопротивление резистора; *г*) индуктивность катушки; *д*) частоту приложенного к цепи напряжения?

2. Чему равно напряжение U_{LC} на участке *LC* при резонансе?

3. Чему равна реактивная мощность в цепи при резонансе?

4. На каких участках цепи следует измерить напряжение для определения добротности?

5. (О) Увеличится или уменьшится полоса пропускания цепи (рис. В6.1), если, сохраняя неизменной резонансную частоту, *а*) увеличить индуктивность; *б*) увеличить емкость; *в*) увеличить добротность контура; *г*) увеличить емкость и одновременно уменьшить сопротивление *r* резистора; *д*) увеличить сопротивление *r* резистора?

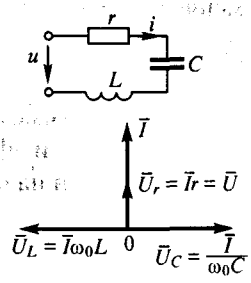


Рис. В6.1

6. (О) Следует ли с целью уменьшения полосы пропускания цепи (рис. В6.1) при сохранении ее резонансной частоты: *а*) увеличивать волновое сопротивление и уменьшать активное сопротивление; *б*) уменьшать индуктивность, увеличивая активное сопротивление?

7. Какое значение (наименьшее или наибольшее) принимает при резонансе напряжение на зажимах цепи (рис. В6.1) при питании ее от источника тока?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Определите, как изменятся добротность контура, ток при резонансе и резонансная частота (рис. В6.1) при сохранении неизменными всех параметров и увеличении: *а*) сопротивления *r* в 1,5 раза; *б*) индуктивности *L* в 2 раза; *в*) емкости *C* в 3 раза; *г*) напряжения на входе в 2 раза?

2. (Р) В каком диапазоне частот входного напряжения $U = 220$ В в контуре, имеющем резонансную частоту ω_0, с добротностью $Q = 20$ и волновым сопротивлением $\rho = 100$ Ом ток будет превышать значение 31 А?

3. (Р) Напряжение U_C на конденсаторе достигает при резонансе значения 1000 В, что недопустимо. Во сколько раз следует изменить емкость конденсатора, чтобы напряжение на нем снизилось на 10% при сохранении неизменной резонансной частоты?

4. (Р) Получите соотношение между частотами ω_1 и ω_2 изменения тока в цепи (рис. В6.1), при которых ее реактивные сопротивления равны по абсолютному значению, но противоположны по знаку.

5. (Р) Коэффициенты мощности цепи (рис. В6.1) при частотах ω_1 и ω_2 равны между собой. Определите частоту резонанса.

6. (Р) Предложите различные опыты с использованием вольтметров, амперметра, ваттметра и фазометра, в результате выполнения которых может быть определена резонансная частота.

7. В цепи (рис. В6.1) величины L и C изменяют таким образом, что ее резонансная частота сохраняется постоянной. Постройте зависимости волнового сопротивления контура и полосы пропускания при изменении L от нуля до бесконечности.

8. (Р) При выполнении какого условия зависимости $U_C(\omega)$ и $U_L(\omega)$ в цепи (рис. В6.1) при действии на ее входе источника синусоидального напряжения $U = \text{const}$ не имеют экстремумов?

9. Цепь (рис. В6.1) подключена к источнику тока $\Im(t) = \Im_m \sin \omega t$. Получите зависимости $U_C(\omega)$, $U_L(\omega)$, $U(\omega)$ и постройте их.

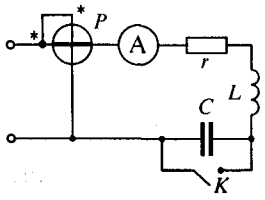


Рис. В6.2

10. (Р) Покажите, что если при частоте резонанса ω_0 в цепи (рис. В6.1) выполняется условие $U_L > 1/\sqrt{2}\ U_r$, то функция $U_L(\omega)$ имеет максимум.

11. Схема, изображенная на рис. В6.2, настроена в резонанс. Как изменятся показания приборов после замыкания ключа K при сохранении напряжения на входе цепи неизменным?

6.2. Резонанс при параллельном соединении элементов *g, L, C*

ВОПРОСЫ

1. Какое значение (наибольшее или наименьшее) имеет напряжение на входе цепи, изображенной на рис. В6.3, при резонансе и питании ее от источника тока?

2. Какое значение (наибольшее или наименьшее) принимает ток неразветвленного участка цепи при резонансе и питании ее от источника напряжения?

3. (О) Можно ли измерять ток, протекающий через конденсатор (рис. В6.3), амперметром с верхним пределом измерения 5 А, если добротность контура $Q = 4$, а ток I при резонансе равен 2 А?

4. Имеют ли экстремумы функции $I_L = f_1(L)$, $I_C = f_2(L)$, $I = f_3(L)$ при питании цепи (рис. В6.3) от источника тока?

5. В чем различие «опрокидывания фазы» в точке резонанса в цепях с последовательным и параллельным соединением элементов r, L, C?

6. (О) Почему активная проводимость цепи (рис. В6.3) не зависит от частоты приложенного напряжения, а эквивалентное активное сопротивление зависит?

7. Какое значение (наибольшее или наименьшее) имеет эквивалентное активное сопротивление цепи (рис. В6.3)

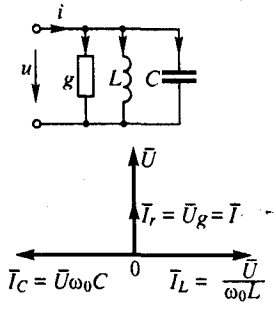


Рис. В6.3

при резонансе? Можно ли его рассчитать по формуле $r_э = 1/g$ при любой частоте приложенного напряжения?

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) В цепи (рис. В6.3) заданы значения параметров элементов L = 10 мГн, C = 1 мкФ. Найдите проводимость g, при которой: *а*) ток конденсатора I_C при резонансе превосходит входной ток в 2 раза; *б*) добротность контура равна 4; *в*) ток I_g резистора при резонансе равен току I_C конденсатора; *г*) коэффициент мощности цепи при $\omega = 2\omega_0$ равен 0,5 (ω_0 — частота резонанса).

2. Во сколько раз изменится затухание d цепи (рис. В6.3) при сохранении неизменными всех параметров и уменьшении: *а*) проводимости g в 1,5 раза; *б*) индуктивности L в 2 раза; *в*) емкости C в 3 раза. Сопоставьте решение этого упражнения с решением упражнения 1 из § 6.1.

3. Изобразите кривые зависимостей $I_L = f_1(C)$, $I_C = f_2(C)$, $I = f_3(C)$ в цепи (рис. В6.3) при питании ее от источника тока.

4. Определите предельные (при $\omega = 0$ и $\omega \to \infty$) значения токов I_g, I_L, I_C в цепи (рис. В6.3) при питании ее от источника тока Э. Заполните таблицу

	I_g	I_L	I_C
$\omega = 0$			
$\omega \to \infty$			

5. (Р) Частота резонанса в цепи (рис. В6.3) равна ω_0. Укажите вместо знака ? правильные знаки равенств и неравенств в выражении: I? I_g? I_L? I_C для следующих случаев, считая, что ток на входе цепи постоянен:

а) $\omega = \omega_0$ и $d > 1$; *б*) $\omega = \omega_0$ и $d < 1$.

6. Предложите последовательность проведения опыта по измерению частотных характеристик цепи (рис. В6.3) при $I_{вх}$ = const, если в распоряжении имеются измерительные приборы и источник ЭДС.

7. Для цепи (рис. В6.3) справедливо следующее утверждение: при частоте резонанса ω_0 токи конденсатора и катушки индуктивности равны, а ток проводимости минимален. Сформулируйте и проверьте правильность аналогичного утверждения для соответствующих переменных дуальной цепи.

8. Какие приборы необходимы и как их следует подключить для определения резонанса в цепи (рис. В6.3)? (Предложите различные варианты опытов.)

9. Резонанс в цепи (рис. В6.3) достигается при частоте $\omega_0 = 10^3$ Гц. Во сколько раз необходимо изменить емкость конденсатора C, чтобы частота резонанса стала равной 500 Гц?

10. Во сколько раз изменится ток конденсатора в цепи (рис. В6.3) при изменении частоты резонанса от 10^3 до 500 Гц?

ЗАДАЧИ

1. Дайте определение полосы пропускания для цепи, изображенной на рис. В6.3. Получите выражения для коэффициента мощности цепи на границах полосы пропускания.

2. Определите частоты, при которых зависимость $x(\omega)$ в цепи (рис. В6.3) имеет экстремумы ($g \neq 0$).

3. Определите, располагаются ли максимумы зависимостей $I_L(\omega)$ и $I_C(\omega)$ в цепи (рис. В6.3) симметрично относительно частоты ω_0 резонанса.

4. (Р) Докажите, что при $g = 0$ для цепи (рис. В6.3) справедливо неравенство $dx_э/d\omega > 0$.

5. (Р) На входе цепи (рис. В6.3) включают ваттметр. Постройте кривую зависимости показаний ваттметра от частоты при постоянной амплитуде напряжения на входе цепи.

6. Получите соотношение между частотами ω_1 и ω_2 для цепи (рис. В6.3), при которых коэффициенты мощности равны между собой.

6.3. Резонанс в цепях, содержащих только реактивные элементы

ВОПРОСЫ

1. (О) Зависимость $x(\omega)$ цепи, содержащей только реактивные элементы, имеет два полюса. Сколько нулей может иметь эта зависимость? Изобразите частотную характеристику этой цепи.

2. Изобразите простейшие схемы, состоящие только из реактивных элементов, для которых справедливо одно из условий: число полюсов зависимости $x(\omega)$: *а*) равно числу нулей; *б*) больше числа нулей; *в*) меньше числа нулей.

3. Как изменится вид частотной характеристики цепи $x(\omega)$, содержащей только реактивные элементы, если последовательно с ней включить: *а*) катушку индуктивности; *б*) конденсатор; *в*) последовательный *LC* контур; *г*) параллельный *LC* контур? Дайте ответы на эти вопросы при включении указанных выше элементов параллельно цепи.

4. (О) Цепь состоит:

а) из n последовательно включенных контуров, каждый из которых образован параллельно соединенными элементами L и C;

б) n параллельно включенных ветвей, каждая из которых образована последовательно соединенными элементами L и C.

Сколько нулей и полюсов имеет частотная характеристика каждой цепи при условии, что частоты резонанса всех контуров различны?

5. (О) Зависимость $x(\omega)$ цепи, состоящей только из реактивных элементов, имеет 2 нуля и 3 полюса. Сколько нулей и полюсов имеет функция $b(\omega)$ дуальной цепи?

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Для изображенных на рис. В6.4 цепей постройте кривые зависимостей $x(\omega)$ и $b(\omega)$. Изобразите дуальные к ним цепи и постройте для них зависимости $b(\omega)$ и $x(\omega)$.

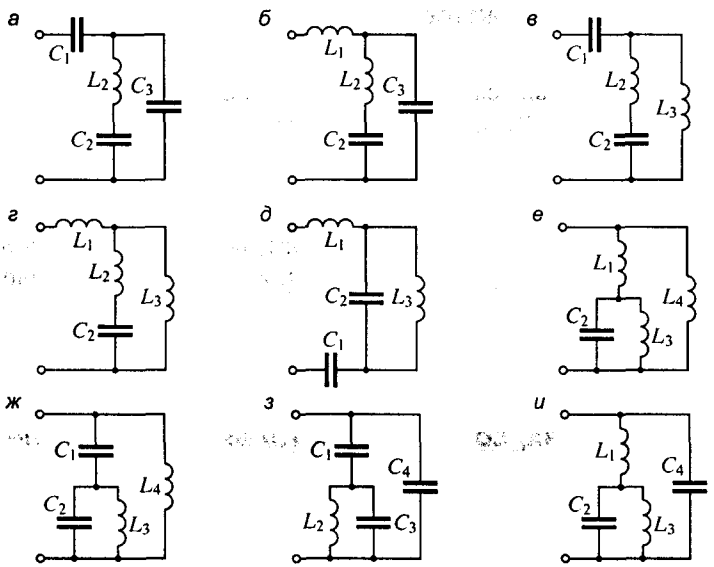


Рис. В6.4

2. (Р) Частотная зависимость $x(\omega)$ цепи, содержащей две параллельно включенные ветви L_1C_1 и L_2C_2, имеет два нуля и два полюса. Дайте качественное объяснение образования полюса, лежащего между нулями.

3. Нули и полюсы функции $x_{вх}(\omega)$ цепи, содержащей только реактивные элементы, чередуются. Сформулируйте и докажите справедливость аналогичного утверждения для дуальной цепи.

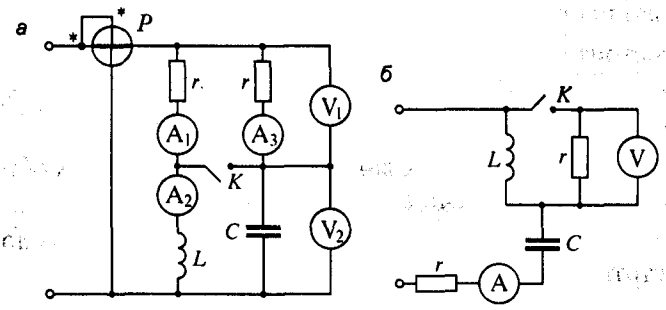


Рис. В6.5

4. (Р) Определите характер изменения показаний приборов для изображенных на рис. В6.5 цепей после замыкания ключа K, если до его замыкания цепи были настроены в резонанс.

ЗАДАЧИ

1. (О) Сформулируйте правило, пользуясь которым, можно по виду цепи, содержащей только катушки индуктивности и конденсаторы, определить число нулей и полюсов зависимости $x_{вх}(\omega)$.

2. (О) Зависимость $x_{вх}(\omega)$ цепи, содержащей только катушки индуктивности и конденсаторы, имеет два нуля и два полюса. Изобразите цепь с такой характеристикой.

6.4. Частотные характеристики электрических цепей

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Постройте амплитудные $K(\omega) = U_2(\omega)/U_1(\omega)$ и фазовые частотные характеристики $\varphi(\omega) = \psi_{u_2}(\omega) - \psi_{u_1}(\omega)$ цепей, схемы которых изображены на рис. В6.6. Сопротивления резисторов указаны в омах, индуктивности катушек — в миллигенри, емкости конденсаторов — в микрофарадах.

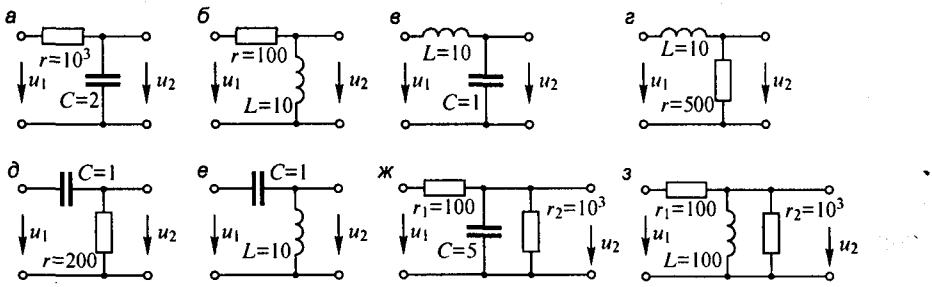


Рис. В6.6

2. (О) При каком соотношении параметров значение амплитудно-частотной характеристики $K(\omega) = \dfrac{U_{вых}(\omega)}{U_{вх}(\omega)}$ изображенной на рис. В6.7 цепи может превысить 1?

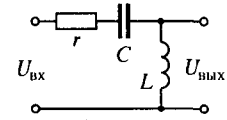


Рис. В6.7

3. (Р) Постройте вещественные $F_1(\omega) = \mathrm{Re}\dfrac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)}$ и мнимые $F_2(\omega) = \mathrm{Im}\dfrac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)}$ частотные характеристики изображенных на рис. В6.6 электрических цепей вариантов *а*, *б*, *г*, *д*, *ж*, *з*. Постройте также годографы амплитудно-фазовой частотной характеристики $K(j\omega) = \dfrac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)}$.

4. (Р) Постройте логарифмические амплитудные частотные характеристики $20\lg\dfrac{U_2(\omega)}{U_1(\omega)} = F(\lg\omega)$ изображенных на рис. В6.6 (варианты *а*, *б*, *г*, *д*) цепей. Определите наклон характеристик при $\omega \to 0$ и $\omega \to \infty$.

6.5. Резонанс в электрических цепях произвольного вида

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. (О) Получите выражения для резонансных частот изображенных на рис. В6.8 цепей.

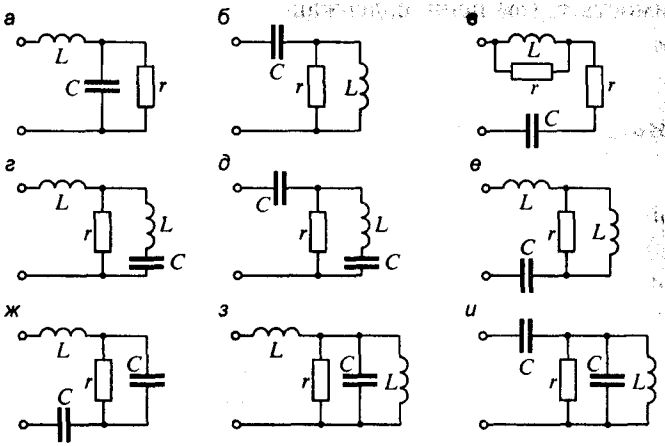


Рис. В6.8

2. Неидеальный конденсатор емкостью $C = 10^{-6}$ Ф имеет при частоте $\omega = 10^4$ с$^{-1}$ добротность $Q = \dfrac{\omega C}{g} = 2000$ (g — его активная проводимость). Определите параметры его схемы замещения, состоящей из резистора и идеального конденсатора, включенных *а*) последовательно; *б*) параллельно.

3. Мощность потерь в неидеальной катушке индуктивности составляет 4 Вт при токе 1 А частотой $\omega = 10^3$ с$^{-1}$. Определите добротность $Q = \dfrac{\omega L}{r}$ катушки (r — ее активное сопротивление), если ее индуктивность равна 0,1 Гн.

4. Рассчитайте добротность цепей, изображенных на рис. В6.9, если добротности конденсатора и катушки индуктивности, входящих в каждую из цепей, равны, соответственно, Q_C и Q_L.

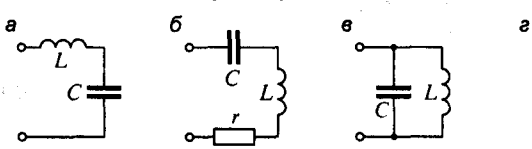


Рис. В6.9

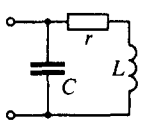


Рис. В6.10

5. Определите диапазон значений сопротивления r резистора, в котором резонанс в цепи (рис. В6.10) невозможен ни при какой частоте ($L = 10^{-3}$ Гн, $C = 10$ мкФ).

6. Возможен ли резонанс в цепи (рис. В6.11) при любых значениях r_1 и r_2?

7. Каково наибольшее значение r_1, при котором в цепи (рис. В6.11, $r_2 = 0$) возможен резонанс?

8. Для всех ли цепей, содержащих резисторы, возможна настойка в резонанс подбором сопротивлений резисторов?

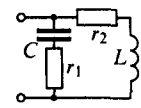


Рис. В6.11

9. Находятся ли в противофазе напряжения u_L и u_C в цепях, изображенных на рис. В6.8, *а*, *б*, при резонансе?

10. (О) Изобразите зависимости $I_1(\omega)$ и $I_2(\omega)$ в цепи (рис. В6.12) при $k = 0$. Сколько нулей и полюсов имеет в этом случае характеристика $x_{вх}(\omega)$?

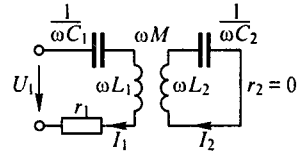


Рис. В6.12

11. (Р) Получите выражения для частот резонанса изображенных на рис. В6.13 цепей ($M > 0$).

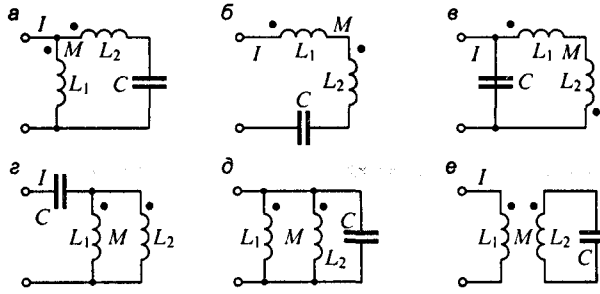


Рис. В6.13

12. (Р) Определите частоты резонанса в цепях, изображенных на рис. В6.14 ($L = 10^{-3}$ Гн, $C = 10^{-5}$ Ф, $M = 5 \cdot 10^{-4}$ Гн, $r = 1$ Ом).

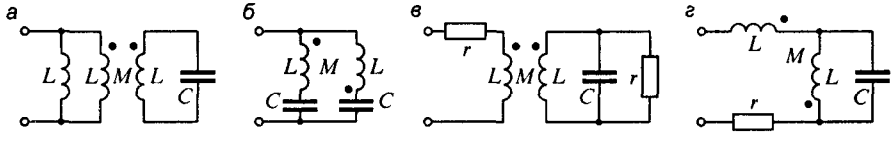


Рис. В6.14

13. Постройте векторные диаграммы для цепей, изображенных на рис. В6.14 при частоте резонанса.

7.1. Классификация многофазных цепей и систем

ВОПРОСЫ

1. Какими преимуществами обладают многофазные системы?

2. Чему равен угол сдвига между фазными ЭДС 6-фазной симметричной системы?

3. (О) Почему сечение нейтрального провода обычно выбирают меньшим сечения фазных проводов?

4. Всегда ли при симметричной системе фазных ЭДС симметрична система и линейных ЭДС?

5. (О) Фазные обмотки генератора соединены треугольником. Чему равны токи фаз, если приемник отсоединен, а система фазных ЭДС симметрична?

6. Какие недостатки присущи неуравновешенным многофазным системам?

7. Может ли двухфазная система быть уравновешенной?

8. При каком способе соединений трехфазных цепей: *а*) фазные токи одновременно являются линейными; *б*) фазные напряжения одновременно являются линейными?

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Изобразите на рисунке 6-фазную цепь, образованную соединением элементов приемника и генератора в шестиугольник и шестилучевую звезду. Получите соотношения между линейными и фазными напряжениями и токами 6-фазной системы, выражения для активной и реактивной мощностей.

2. (О) Какие из многофазных систем токов являются симметричными:

а) $i_1 = 20\sqrt{2}\sin\omega t$, $i_2 = 20\sqrt{2}\sin(\omega t - 2\pi/3)$, $i_3 = 20\sqrt{2}\sin(\omega t + 2\pi/3)$;

б) $i_1 = 2\sin\omega t$, $i_2 = 2\sin(\omega t - \pi/2)$; *в*) $i_1 = 10\cos\omega t$, $i_2 = 2\cos(\omega t - \pi)$;

г) $i_1 = 10\cos(\omega t + \pi/2)$, $i_2 = 10\cos(\omega t + \pi/2 + 2\pi/3)$, $i_3 = 10\cos(\omega t + \pi/2 + 4\pi/3)$;

д) $i_1 = 10{,}1\sin(\omega t + \psi)$, $i_2 = 10\sin(\omega t + \psi - 2\pi/3)$, $i_3 = 10\cos(\omega t + \psi - 2\pi/3)$;

е) $i_1 = \sin\omega t$, $i_2 = \cos\omega t$, $i_3 = \sin(\omega t + \pi)$, $i_4 = \cos(\omega t + \pi)$.

Изобразите токи на векторных диаграммах.

3. (О) ЭДС e_1, e_2 и e_3, индуцируемые в обмотках генератора, образуют симметричную систему прямой последовательности. Определите показания U вольтметров $V_1 \div V_4$ в изображенных на рис. В7.1 схемах при отсоединенном приемнике и заданных действующих значениях фазных ЭДС генератора, равных 220 В. Определите показания I амперметра A_2 в схемах *в*, *г* при комплексном сопротивлении фаз генератора $Z_ф = (2{,}2 + j10)$ Ом.

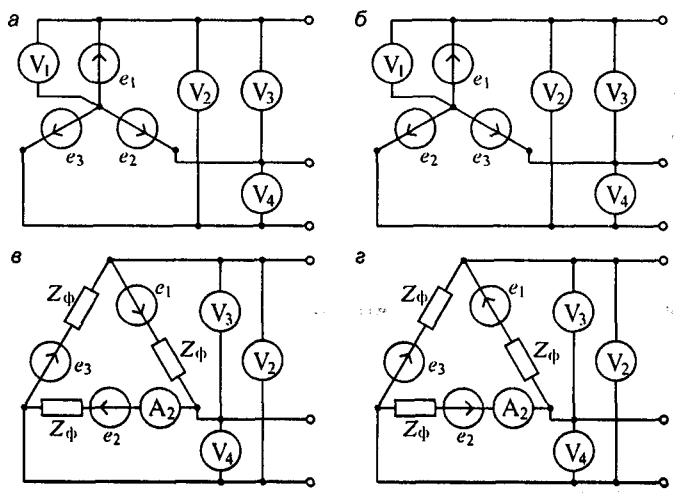


Рис. В7.1

4. (О) Определите показания приборов в изображенных на рис. В7.2 схемах, принимая, что система ЭДС и нагрузка симметричны ($E_ф = 220$ В, $Z = 10 + j10$ Ом).

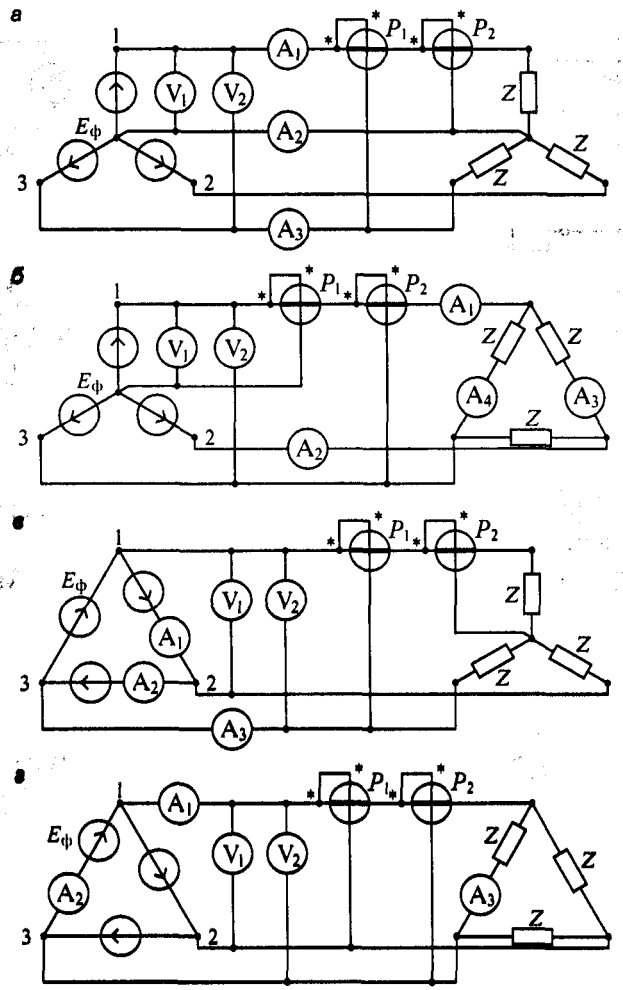


Рис. В7.2

ЗАДАЧИ

1. (Р) Для компенсации реактивной мощности в трехфазном приемнике ($Z_A = Z_B = Z_C = 10 + j10$ Ом) к нему подключают батарею конденсаторов. Найдите значение емкости C конденсаторов при соединении приемника: 1) треугольником; 2) в звезду; и батареи конденсаторов: *а*) треугольником; *б*) в звезду. Рассчитайте ток конденсаторов и приемника, а также напряжения на конденсаторе C и приемнике при $U_ф = 220$ В, $\omega = 100\pi$ с$^{-1}$.

2. (Р) Покажите, что при симметрии ЭДС *е* и нагрузки реактивную мощность в нагрузке можно определить по формуле $Q = \sqrt{3}P$, где P — показание ваттметра (рис. В7.3).

3. (Р) Покажите, что активную мощность трехфазной системы можно определить как сумму показаний двух ваттметров (рис. В7.4).

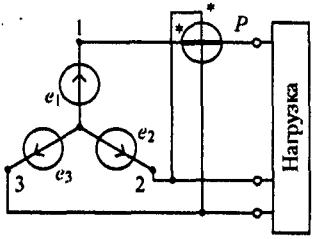


Рис. В7.3

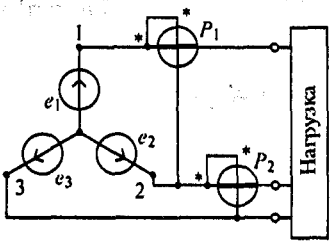


Рис. В7.4

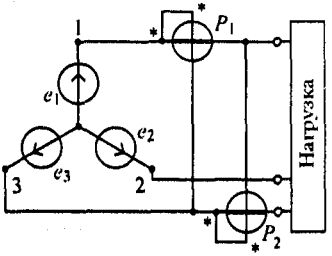


Рис. В7.5

4. Покажите, что реактивную мощность трехфазной системы можно определить по формуле $Q = \sqrt{3}(P_1 + P_2)$, где P_1, P_2 — показания ваттметров *1*, *2* (рис. В7.5).

7.2. Расчет трехфазных электрических цепей

ВОПРОСЫ

1. Может ли трехфазная система, в которой приемник и генератор соединены звездой, работать без нейтрального провода?

2. В трехфазной цепи действует симметричная система ЭДС. Можно ли утверждать, что токи фаз также образуют симметричную систему?

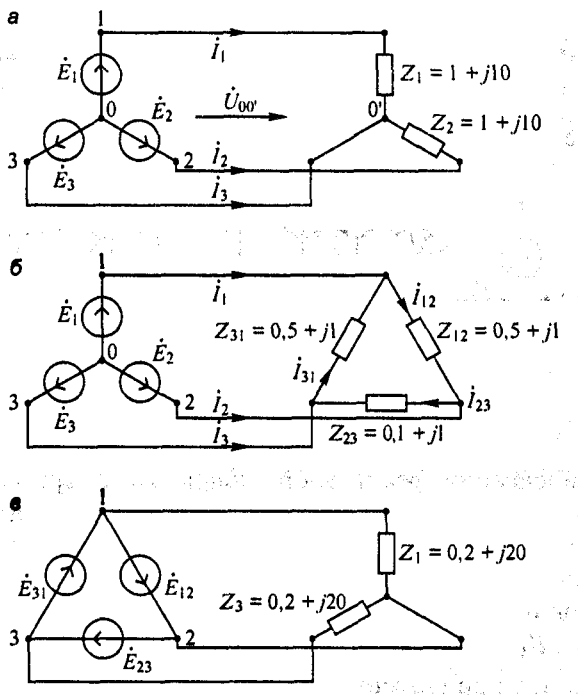


Рис. В7.6

3. Ток нейтрального провода $\dot{I}_0$ в цепи, где генератор и приемник соединены звездой, равен нулю. Означает ли это, что система фазных ЭДС симметрична?

4. (О) Ток нейтрального провода $\dot{I}_0$ в трехфазной цепи равен нулю. Сохранится ли он равным нулю: *а*) при обрыве в одной из фаз генератора; *б*) увеличении амплитудных значений ЭДС генератора в 2 раза; *в*) увеличении сопротивления одной из фаз приемника в 2 раза?

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

1. (Р) ЭДС e_1, e_2, e_3 образуют симметричную систему прямой последовательности ($E_m = 220\sqrt{2}$ В). Рассчитайте активную и реактивную мощности в нагрузке электрических цепей, схемы которых изображены на рис. В7.6. Сопротивления нагрузки указаны в омах.

2. (Р) В двухфазной системе ЭДС $E_1 = E_2 = E$, $Z_1 = Z_2$, угол между векторами $\overline{E}_1$ и $\overline{E}_2$ равен 90°. Активная мощность в приемнике с сопротивлением Z_1 (рис. В7.7) равна 2,25 кВт при его токе I_1 =15 А и $\cos\varphi_1 = 0{,}75$. Рассчитайте действующие значения ЭДС E генератора и тока I_0.

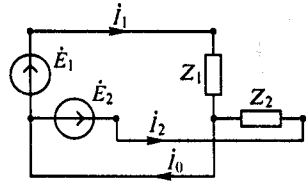


Рис. В7.7

7.3. Вращающееся магнитное поле

ВОПРОСЫ

1. (О) Можно ли с помощью трехфазной системы ЭДС получить не вращающееся (в угловом направлении), а бегущее магнитное поле? Если можно, то как?

2. (О) Возможно ли получение вращающегося магнитного поля с помощью одно-, двух-, четырехфазной системы токов?

3. (О) На практике находят применение однофазные двигатели, т. е. устройства с вращающимся магнитным полем, питаемые однофазным напряжением. Какие необходимые элементы должны содержать такие двигатели?

4. (О) Можно ли создать вращающееся магнитное поле: *а*) несимметричной системой токов; *б*) симметричной системой токов нулевой последовательности; *в*) симметричной системой токов обратной последовательности?

В каком из случаев вращающееся поле является круговым?

ЗАДАЧИ

1. (Р) Весьма длинные провода воздушной линии электропередачи расположены так, как это показано на рис. В7.8. Получите выражение для амплитуды вектора магнитной индукции $\boldsymbol{B}(t)$ в точке M. Покажите, что вектор $\boldsymbol{B}$ не только изменяется во времени, но меняет также свое направление (d = 1 м).

Токи проводов в соответствующих вариантах равны (в амперах):

а) $i_1 = 100\sin\omega t$, $i_2 = 100\sin(\omega t + \pi/2)$;

б) $i_1 = 100\sin\omega t$, $i_2 = 100\sin(\omega t + 2\pi/3)$, $i_3 = 100\sin(\omega t - 2\pi/3)$;

в) $i_1 = 100\sin\omega t$, $i_2 = 100\sin(\omega t + \pi/2)$, $i_3 = 100\sin(\omega t + \pi)$, $i_4 = 100\sin(\omega t + 3\pi/2)$.

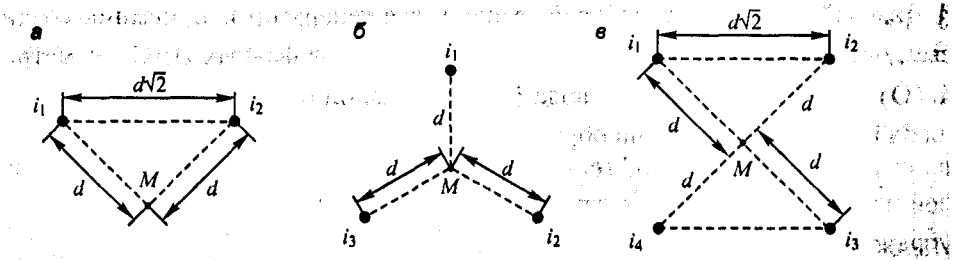


Рис. В7.8

2. Два линейных круговых витка радиусами $R_1 \cong R_2 = R$ с токами расположены так, как изображено условно на рис. В7.9. Получите выражение для амплитуды вектора магнитной индукции $\boldsymbol{B}(t)$ поля в точке пересечения осей витков M, если:

а) $i_1 = I_m \sin \omega t$, $i_2 = I_m \sin (\omega t + \pi/2)$;

б) $i_1 = I_m \sin \omega t$, $i_2 = I_m \sin (\omega t - \pi/2)$.

Указание. Значение индукции магнитного поля в центре витка с током i может быть вычислено по формуле $B = \mu_0 i/2R$.

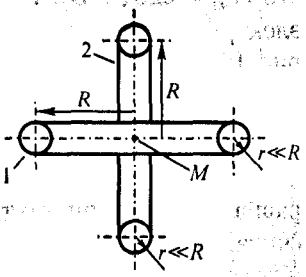


Рис. В7.9

7.4. Метод симметричных составляющих

ВОПРОСЫ

1. В силу каких причин система токов в симметричном трехфазном генераторе может быть несимметричной?

2. Какова амплитуда ЭДС нулевой последовательности, если известно, что сумма ЭДС фаз равна 100 В?

3. (О) На какие симметричные составляющие может быть разложена шестифазная система ЭДС? Изобразите соответствующие симметричные системы.

4. (О) К трехфазному симметричному электрическому генератору, обмотки которого соединены звездой, подключена несимметричная нагрузка, соединенная треугольником. Содержат ли систему нулевой последовательности следующие системы ЭДС, напряжений или токов: *а*) система фазных ЭДС? *б*) система фазных токов генератора? *в*) система фазных напряжений на нагрузке? *г*) система фазных токов нагрузки? *д*) система линейных напряжений генератора?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Изобразите трехфазную систему ЭДС $\dot{E}_A, \dot{E}_B, \dot{E}_C$, разложение которой на симметричные составляющие не содержит симметричной системы: *а*) прямой последовательности ($E_1 = 0$, но $E_2, E_0 \neq 0$); *б*) обратной последовательности ($E_2 = 0$, но $E_1, E_0 \neq 0$); *в*) нулевой последовательности ($E_0 = 0$, но $E_1, E_2 \neq 0$).

2. Определите напряжение симметричной системы нулевой последовательности для двухфазной системы $\dot{E}_A, \dot{E}_B$ для случаев, когда эта система: *а*) симметрична; *б*) несимметрична.

3. (Р) Разложите на симметричные составляющие следующие трехфазные системы ЭДС, токов и напряжений (ЭДС и напряжения — в вольтах, токи — в амперах):

а) $i_A = \sqrt{2}\sin\omega t$, $i_B = \sqrt{2}\cos\omega t$, $i_C = \sqrt{2}\sin(\omega t + \pi)$;

б) $e_A = 10\sin\omega t$, $e_B = 5\sin(\omega t + 2\pi/3)$, $e_C = 3\sin(\omega t - 2\pi/3)$;

в) $u_A = 5\sin\omega t$, $u_B = 10\sin(\omega t + 2\pi/3)$, $u_C = 10\sin(\omega t - 2\pi/3)$;

г) $i_A = 10\sin\omega t$, $i_B = 10\sin(\omega t + \pi/4)$, $i_C = 10\sin(\omega t - \pi/4)$;

4. Изобразите трехфазные системы ЭДС E_A, E_B, E_C и токов I_A, I_B, I_C, если известны их симметричные составляющие:

а) $E_0 = E_1 = E_2 = 1$ В;

б) $\dot{I}_0 = j$ А, $\dot{I}_1 = -j$ А, $\dot{I}_2 = j$ А;

в) $\dot{I}_0 = 1$ А, $\dot{I}_1 = 10 + j10$ А, $\dot{I}_2 = 10 - j10$ А.

ЗАДАЧИ

1. (Р) Докажите, что показания U вольтметра (его сопротивление равно r) в изображенной на рис. В7.10 схеме пропорциональны напряжению: *а*) прямой последовательности системы линейных напряжений при $Z_1 = z\,e^{-j\pi/3}$, $Z_2 = z\,e^{j\pi/3}$; *б*) обратной последовательности системы линейных напряжений при $Z_1 = z\,e^{j5\pi/12}$, $Z_2 = z\,e^{-j\pi/4}$. Докажите также, что показания I амперметров A_1 и A_2 пропорциональны, соответственно, напряжениям прямой и обратной последовательностям системы линейных напряжений при $Z_1 = z\,e^{-j\pi/2}$, $Z_2 = z\,e^{j\pi/6}$, $Z_3 = z\,e^{-j\pi/2}$.

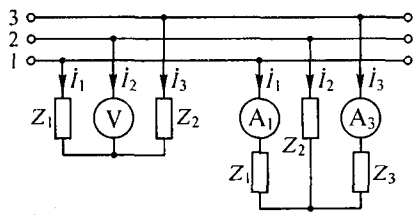


Рис. В7.10

8.1. Расчет электрических цепей при периодических несинусоидальных напряжениях

ВОПРОСЫ

1. Зависят ли коэффициенты I_0, B_k, C_k ряда Фурье от выбора начала отсчета времени для заданной кривой тока $i(t)$? Зависят ли начальные фазы ψ_k гармоник от выбора начала отсчета времени?

2. Можно ли по виду кривой несинусоидального напряжения определить, содержит ли оно при разложении в ряд Фурье: *а*) постоянную составляющую; *б*) четные гармоники; *в*) только функции sin; *г*) только функции cos?

3. (О) Может ли напряжение, равное сумме двух периодических напряжений, быть непериодическим?

4. Какие гармоники содержит выпрямленное синусоидальное напряжение, вид которого показан на рис. В8.1?

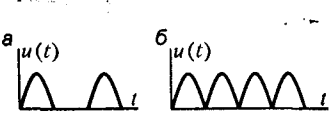


Рис. В8.1

5. (О) Как связаны частоты первой гармоники выпрямленных синусоидальных напряжений, изображенных на рис. В8.1?

6. (О) Можно ли рассматривать сумму комплексных значений гармоник токов $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3, \ldots$ ветви как комплексное значение тока $\dot{I}$ этой ветви?

7. Можно ли при расчете постоянной составляющей токов разомкнуть ветви с конденсаторами ? Как поступить с ветвями, в которые входят только катушки индуктивности?

УПРАЖНЕНИЯ

1. (О) Поставьте в соответствие приведенным на рис. В8.2 кривым тока $i(t)$ тип симметрии:

а) симметрия относительно оси абсцисс;

б) симметрия относительно начала координат (нечетная симметрия);

в) симметрия относительно оси ординат (четная симметрия).

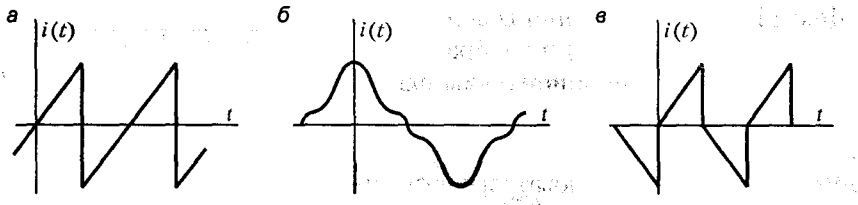


Рис. В8.2

2. (О) Поставьте в соответствие следующие утверждения: при разложении в ряд Фурье напряжение:

а) содержит только функции cos;

б) содержит только функции sin;

в) не содержит четных гармоник, если оно:

1) симметрично относительно оси ординат;

2) симметрично относительно начала координат;

3) симметрично относительно оси абсцисс.

3. (Р) Рассчитайте амплитуды пяти первых гармоник периодических напряжений $u(t)$, изображенных на рис. В8.3. Постройте их амплитудно-частотный спектр.

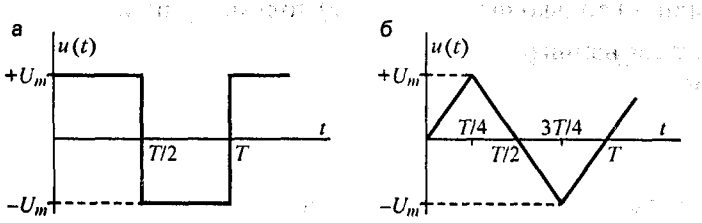


Рис. В8.3

4. (Р) Рассчитайте напряжение $u_н$ в электрических цепях (рис. В8.4), на входе которых действуют напряжения, изображенные на рис. В8.3. Сопоставьте значения U_{1m}/U_m, U_{3m}/U_m, U_{5m}/U_m на входе цепи и на нагрузке $r_н$ при заданных значениях величин: $T = 0{,}02$ с, $r = 100$ Ом, $L = 0{,}2$ Гн, $C = 10$ мкФ, $r_н = 1$ кОм, $U_m = 100$ В.

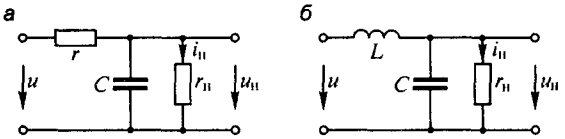


Рис. В8.4

5. (Р) Рассчитайте токи в изображенной на рис. В8.5 цепи. Постройте зависимости $i_1(t)$ и $i_3(t)$. Сопоставьте значение $U^{(5)}_{вх\,m}/U^{(1)}_{вх\,m}$ со значением $I^{(5)}_{r1m}/I^{(1)}_{r1m}$ и объясните причину их различия.

При расчете примите следующие значения величин:

$u_{вх} = 110 + 220\sqrt{2}\sin\omega t + 5\sin 5\omega t$ В,

$r_1 = 5$ Ом, $\omega L_2 = 2$ Ом, $1/\omega C_2 = 50$ Ом,

$r_3 = 20$ Ом, $\omega L_4 = 10$ Ом, $1/\omega C_5 = 10$ Ом.

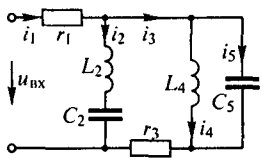


Рис. В8.5

6. Рассчитайте токи ветвей схем электрических цепей, изображенных на рис. В8.6. Сопротивления элементов указаны на схемах для первой гармоники тока в омах. Напряжения в вольтах, действующие на входе каждой из цепей, заданы следующими выражениями:

а) $u = 160\sin\omega t + 160 + 48\sin 3\omega t$;

б) $u = 96\sin\omega t + 20\sin 5\omega t$;

в) $u = 240\sin\omega t + 100\sin 5\omega t$;

г) $u = 125\sin\omega t + 25\sin 5\omega t$.

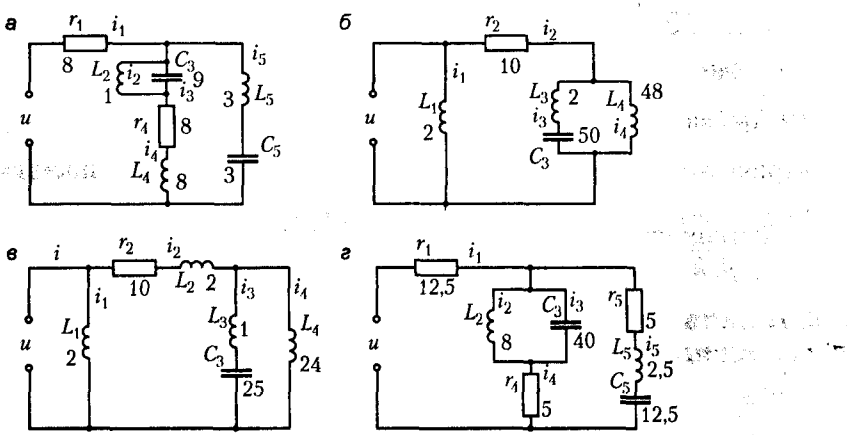


Рис. В8.6

8.2. Форма кривых тока в электрической цепи при несинусоидальном напряжении

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. К цепи (рис. В8.7) подведено несинусоидальное напряжение. Одинакова ли форма кривых напряжения на зажимах катушки индуктивности, конденсатора и приемника? Может ли в этой цепи кривая тока быть синусоидальной, если подведенное напряжение определяется следующими функциями:

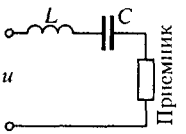


Рис. В8.7

а) $u = U_{m1} \sin \omega t + U_{m3} \sin 3\omega t$;

б) $u = U_{m1} \sin \omega t + U_{m5} \sin 5\omega t + U_{m7} \sin 7\omega t$;

в) $u = U_0 + U_{m3} \sin 3\omega t$?

2. Как изменяет катушка индуктивности форму кривой напряжения при подключении ее к источнику несинусоидального тока?

3. Как изменяет конденсатор форму кривой напряжения при подключении его к источнику несинусоидального тока?

4. Контур *LC* в цепи, изображенной на рис. В8.8, имеет резонансную частоту $\omega_0 = q\omega_1$, где ω_1 — частота первой гармоники напряжения на входе, q — целое число, большее единицы. Какие участки цепи содержат гармоники напряжения порядка q?

5. (О) Какое наименьшее число элементов должна содержать электрическая цепь, чтобы при действии на ее входе несинусоидального напряжения $u = U_{m1} \sin \omega t + U_{m3} \sin 3\omega t$ удалось бы подавить полностью в приемнике ($r_{пр}$) первую и пропустить без ослабления третью гармоники тока (рис. В8.9)?

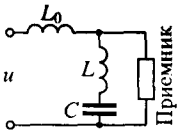


Рис. В8.8

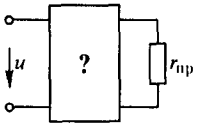


Рис. В8.9

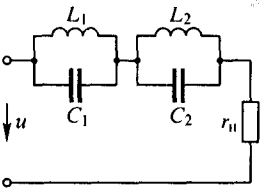


Рис. В8.10

6. (Р) При каком соотношении параметров элементов изображенной на рис. В8.10 электрической цепи ток в нагрузке $r_н$ определяется выражением $i = \dfrac{U_{pm}}{r_н} \sin p\omega_0 t$ при действии на ее входе напряжения $u = U_{qm} \sin q\omega_0 t + U_{pm} \sin p\omega_0 t + U_{km} \sin k\omega_0 t$ (здесь q, p, k — целые числа, такие, что $q < p < k$).

8.3. Действующие значения периодических несинусоидальных величин. Активная мощность

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Справедливо ли равенство $U_m/U = \sqrt{2}$ для несинусоидальных периодических напряжений?

2. Равны ли действующие значения напряжения на выходе однополупериодного и двухполупериодного выпрямителей, если напряжения на их входах одинаковы?

3. (О) Какую форму должен иметь периодический несинусоидальный ток заданной амплитуды, чтобы его действующее значение было максимально возможным?

4. (О) Последовательно соединенные резистор и катушка индуктивности имеют одинаковые сопротивления ($r = \omega L$). На каком из элементов действующее значение несинусоидального напряжения больше, если входное несинусоидальное напряжение не содержит постоянной составляющей?

5. Параллельно соединенные элементы g и L имеют одинаковые проводимости ($g = 1/\omega L$). Действующее значение какого из токов (i_r или i_L) больше, если напряжение на входе цепи несинусоидально и не содержит постоянной составляющей? Изменится ли ответ, если вместо катушки индуктивности включен конденсатор проводимостью $\omega C = g$?

6. Изменится ли действующее значение несинусоидального напряжения при изменении его периода?

7. К цепи, содержащей последовательно соединенные резистор и катушку индуктивности ($r = \omega L$), подключен источник напряжения $u = 10 + 10 \cos \omega t$. Справедливо ли равенство $U_r = U_L$? Справедливо ли соотношение $U_C > U_r$, если катушку индуктивности заменить конденсатором ($1/\omega C = r$)?

8. Цепь содержит резистор и включенный последовательно с ним параллельный контур LC. Какова активная мощность в цепи, если к ее входу приложено напряжение $u = U_0 + U_m \sin(3\omega t + \pi/6)$ и контур настроен в резонанс на частоту третьей гармоники? Изменится ли активная мощность, если контур настроить в резонанс на другую частоту?

9. К цепи с последовательно соединенными элементами r, L, C приложено напряжение $u = U_0 + U_{m1} \sin \omega t$. При какой частоте ω активная мощность в цепи имеет: *а*) наибольшее; *б*) наименьшее значения?

10. (О) Можно ли в цепи, содержащей последовательно соединенные резистор и конденсатор, рассчитать активную мощность по формуле $P = \frac{U_m}{\sqrt{2}} I \cos \varphi$, если ко входу приложено напряжение $u = U_0 + U_m \sin \omega t$?

11. Почему электрические генераторы и другие устройства электроэнергетики проектируют таким образом, чтобы их напряжения и токи были как можно ближе к синусоидальным?

12. (Р) Рассчитайте действующие значения периодических напряжений, изображенных на рис. В8.11. Определите действующие значения первых пяти гармоник (с учетом постоянной составляющей) разложения в ряд Фурье этих напряжений. Сопоставьте действующие значения, рассчитанные двумя способами: *а*) $U_\text{т} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2 dt}$, *б*) $U_\text{пр} = \sqrt{\sum_{k=0}^{4} U_k^2}$.

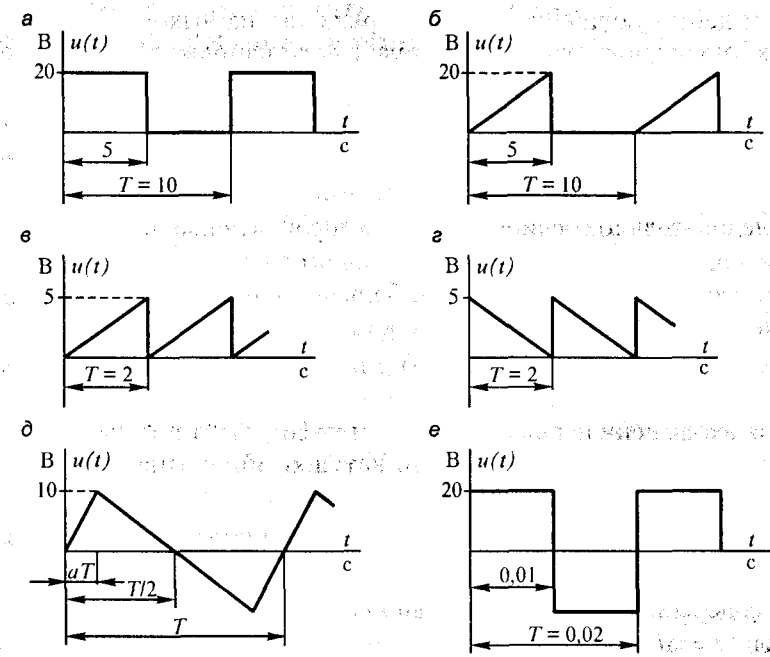


Рис. В8.11

8.4. Высшие гармоники в трехфазных цепях

ВОПРОСЫ

1. Почему на зажимах обмоток генератора, соединенных в треугольник, симметричные системы фазных напряжений гармоник, кратных трем, равны нулю?

2. (О) Какие гармоники отсутствуют в системе линейных напряжений генератора, обмотки которого соединены в m-фазную звезду?

3. В силу каких причин по обмоткам генератора, соединенным треугольником, может протекать ток даже при отключенной нагрузке?

4. Почему при соединении обмотки трехфазного генератора в треугольник гармоники, кратные трем, замыкаются внутри него и не выходят во внешнюю цепь?

Вопросы, упражнения, задачи к главе 5

5.1. Комплексный метод

ВОПРОСЫ

1. Токи $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ являются комплексно сопряженными. Чем различаются их мгновенные значения i_1 и i_2?

2. (О) Комплексное сопротивление двухполюсника равно $1 + j2$ Ом. Можно ли утверждать, что этот двухполюсник не содержит конденсаторов?

3. (О) Двухполюсник, имеющий комплексное сопротивление $Z = 1 + j$ Ом, содержит несколько конденсаторов, катушек индуктивности и один резистор R. Можно ли утверждать, что $R = 1$ Ом?

4. (О) Какой смысл имеют принимаемые условно положительные направления токов и напряжений, если они, являясь в действительности синусоидальными функциями, изменяют свое направление с течением времени?

5. (О) Справедливы ли законы Кирхгофа, записанные: *а*) для действующих значений токов и напряжений; *б*) мгновенных значений токов и напряжений; *в*) амплитудных значений токов и напряжений; *г*) комплексных значений токов и напряжений?

6. Почему при расчете комплексной мощности $\dot{S}$ один из комплексов ($\dot{I}$ или $\dot{U}$) выбирают сопряженным?

7. На некотором участке электрической цепи реактивная мощность $Q = 0$. Можно ли утверждать, что этот участок не содержит реактивных элементов?

8. (О) Каждый из последовательно включенных двухполюсников обладает отличными от нуля эквивалентным активным и реактивным сопротивлениями. Какие из утверждений справедливы: *а*) эквивалентное реактивное сопротивление всей цепи может быть положительным или равным нулю; *б*) эквивалентное реактивное сопротивление всей цепи может быть отрицательным; *в*) эквивалентное активное сопротивление всей цепи должно быть положительным или равным нулю; *г*) реактивная мощность всей цепи должна быть больше реактивной мощности первого двухполюсника; *д*) активная мощность всей цепи равна сумме активных мощностей двухполюсников?

9. Какие из предыдущих утверждений справедливы при параллельном соединении двухполюсников?

10. Каждый из параллельно включенных двухполюсников обладает отличным от нуля активным и реактивным сопротивлениями. Можно ли при расчете сопротивления и проводимости всей цепи сложить: *а*) активные сопротивления двухполюсников; *б*) активные проводимости двухполюсников; *в*) реактивные сопротивления двухполюсников; *г*) реактивные проводимости двухполюсников?

11. (О) В цепи, состоящей из двух параллельно включенных двухполюсников и источника ЭДС $\dot{E} = 1 + j$ В, комплексное значение тока источника равно $\dot{I} = 2 + j2$ А. Могут ли эти двухполюсники содержать реактивные элементы?

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Найдите комплексные действующие значения токов и напряжений: *а*) $i = 3 \sin \omega t$ А; *б*) $i = \sqrt{2} \cos \omega t$ А; *в*) $i = 3 \sin 3\omega t$ А; *г*) $i = \sqrt{2} \sin (\omega t + 1)$ А; *д*) $u = 5 \sin (\omega t - \pi)$ В; *е*) $u = 2 \sin (\omega t + \pi)$ В; *ж*) $u = 2 \sin (3\omega t - 30°)$ В; *з*) $u = 10 \sin (\omega t + 2\pi/3)$ В.

2. (Р) Найдите синусоидальные функции, соответствующие комплексам токов и напряжений, считая, что частота их изменения равна $f = 50$ Гц: *а*) $\dot{I} = 1 + j2$ А; *б*) $\dot{I} = 1 - j2$ А; *в*) $\dot{I} = -1 + j2$ А; *г*) $\dot{I} = -1 - j2$ А; *д*) $\dot{U}_m = a + jb$ В; *е*) $\dot{U} = \sqrt{2}$ В; *ж*) $\dot{U} = -j$ В; *з*) $\dot{U}_m = -3$ В; *и*) $\dot{I} = -j\sqrt{2}$ А.

3. Току $i = I_m \sin (\omega t + \varphi)$ соответствует комплексная величина $a + jb$. Определите комплексные изображения первой, второй производной тока i по времени.

4. В чем заключается способ получения комплексных изображений кратных интегралов от тока $i = I_m \sin (\omega t + \varphi)$?

5. (Р) Изобразите на комплексной плоскости векторы $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$, связанные между собой соотношениями: *а*) $\dot{I}_2 = \dot{I}_1 e^{j2\pi}$; *б*) $\dot{I}_2 = \dot{I}_1 e^{-j\pi/2}$; *в*) $\dot{I}_2 = \dot{I}_1 e^{j\pi}$; *г*) $\dot{I}_2 = -j\dot{I}_1$; *д*) $\dot{I}_2 = 0{,}7(1/\sqrt{2} + j\sqrt{2}/2)\dot{I}_1$; *е*) $\dot{I}_2 = \dot{I}_1 + \dot{I}_1$; *ж*) $\dot{I}_2 = \dot{I}_1 + \dot{I}_1 e^{j2\pi/3}$; *з*) $\dot{I}_2 = \dot{I}_1 + \dot{I}_1 e^{j\pi/2}$; *и*) $\dot{I}_2 = \dot{I}_1 + \dot{I}_1 e^{-j3\pi/2}$; *к*) $\dot{I}_2 = \dot{I}_1 + 1$; *л*) $\dot{I}_2 = \dot{I}_1 + \dot{I}_1 + j$.

6. На рис. В5.1 изображены кривые напряжения $u(t)$ и тока $i(t)$. Запишите соответствующие им комплексные величины $\dot{U}$ и $\dot{I}$.

7. Ток катушки индуктивностью $L = 0{,}2$ Гн равен $i_L = 2 \sin (314t + \pi/6)$ А. Определите напряжение на катушке u_L, комплексные амплитудные значения тока и напряжения на ней.

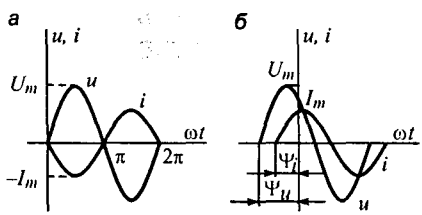


Рис. В5.1

8. Ток конденсатора емкостью $C = 10^{-6}$ Ф равен $i_C = 0{,}5 \sin (314t - \pi/3)$ А. Определите напряжение на конденсаторе u_C, комплексные действующие значения тока и напряжения на нем.

9. (Р) Определите величины, $Z_э$, $z_э$, $Y_э$, $y_э$, $r_э$, $x_э$, $g_э$, $b_э$ для изображенных на рис. В5.2 двухполюсников, считая величины ω, r, L, C заданными.

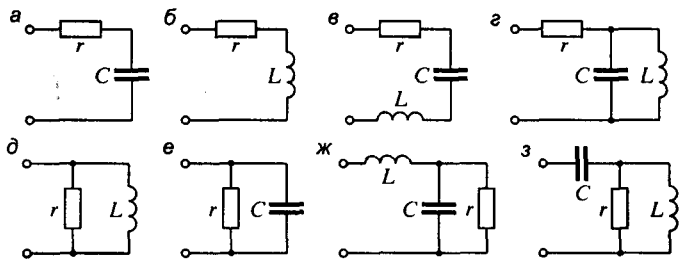


Рис. В5.2

10. (Р) Комплекс ЭДС на входе цепи равен $\dot{E} = 100 + j50$ В, комплекс тока на входе этой цепи $\dot{I} = 8 + j6$ А. Определите величины Z, z, Y, y.

11. На рис. В5.3 изображены кривые напряжения $u(t)$ и тока $i(t)$ на входе двухполюсника. Амплитудные значения напряжения и тока равны соответственно 10 В и 5 А. Определите параметры Z, z, Y, y двухполюсника.

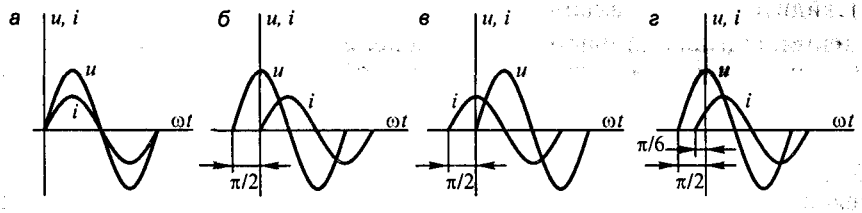


Рис. В5.3

12. (Р) В таблице указаны комплексные напряжения $\dot{U}$ на зажимах и токи $\dot{I}$ на входе двухполюсников. Рассчитайте активное и реактивное сопротивления каждого двухполюсника, угол сдвига между напряжением и током на его зажимах. Определите характер сопротивления двухполюсника (емкостный или индуктивный).

Вариант	U, В	I, А	**Вариант**	U, В	I, А
1	$5 + j$	$5 - j$	4	$3 + j$	$5 + j$
2	$1 + j$	$1 + j$	5	1	$1 - j$
3	$3 - j$	$5 + j$	6	$1 - j$	1

13. (Р) Пользуясь уравнениями законов Кирхгофа в комплексной форме, определите токи и напряжения всех ветвей для схем (рис. В5.4), считая величины r, x_C, x_L, $\dot{\mathfrak{I}}_1$, $\dot{\mathfrak{I}}_2$, $\dot{E}_1$, $\dot{E}_2$ известными. Определите напряжение $\dot{U}_{AB}$, а для схем *б* и *д* найдите также ток $\dot{I}$ ветви AC.

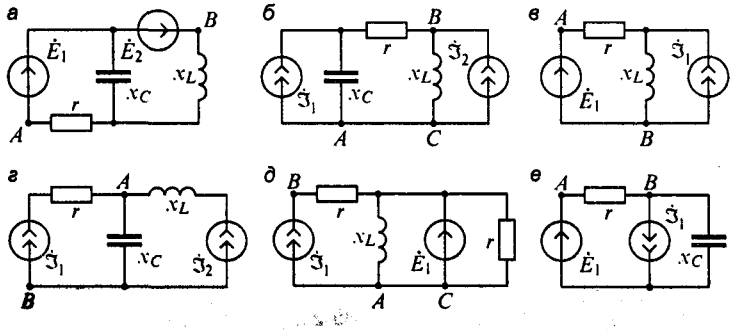


Рис. В5.4

14. (Р) Получите выражения для активной мощности изображенных на рис. В5.2 двухполюсников при напряжении $\dot{U} = (a + jb)$ В на их зажимах.

15. (Р) Укажите схемы, изображенные на рис. В5.2, активная мощность которых может быть вычислена по формуле $P = rI^2$, где I — действующее значение тока на входе цепи.

16. (Р) Запишите выражения для комплексных сопротивлений цепей, схемы которых изображены на рис. В5.5.

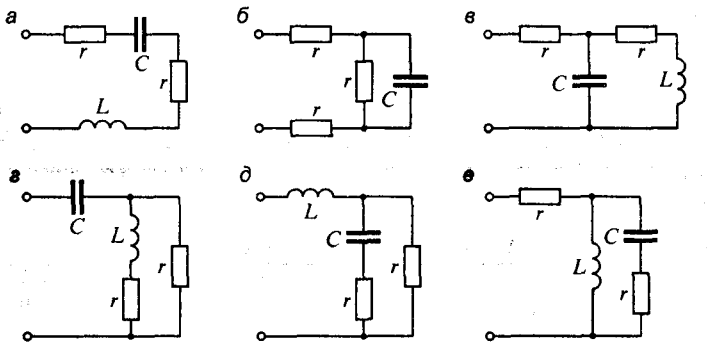


Рис. В5.5

17. (Р) Для цепей, схемы которых изображены на рис. В5.6, определите показания I_1, I_2 амперметров A_1 и A_2, а также U вольтметра V при $r = x_C = x_L = 1$ Ом и $\dot{I} = 10$ А в схеме *а*, $\dot{U} = 10$ В в схеме *б*.

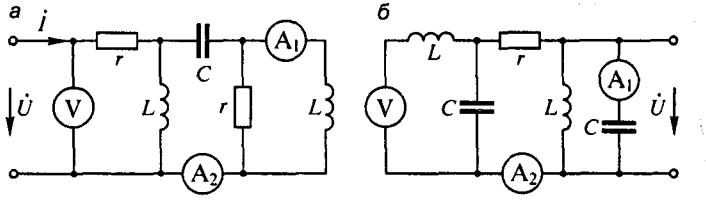


Рис. В5.6

18. (Р) Найдите величину x_C, при которой активная мощность изображенных на рис. В5.7 схем цепей максимальна.

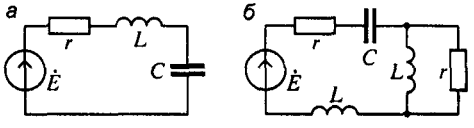


Рис. В5.7

19. (Р) Источник ЭДС с внутренним сопротивлением $Z_г = r_г + jx_г$ подключен к нагрузке $Z_н = r_н + jx_н$. Определите параметры нагрузки, при которых ее активная мощность будет максимальной.

20. (Р) На входе цепей, схемы которых изображены на рис. В5.8, действует источник тока $\dot{J}$. Определите токи $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$.

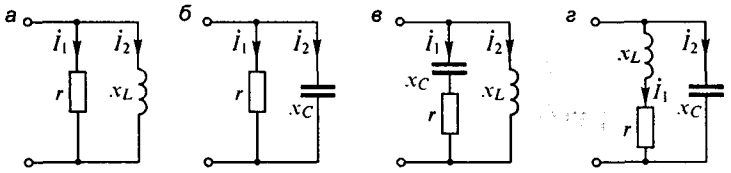


Рис. В5.8

21. (Р) Укажите последовательность расчета напряжений на всех элементах электрической цепи (рис. В5.9) и токов в них при заданном: *а*) напряжении $\dot{U}$ на ее входе; *б*) токе в одном из элементов цепи ($\dot{I}_1$, или $\dot{I}_2$, или $\dot{I}_3$ и т. д.). Комплексные сопротивления Z элементов цепи заданы. Рассчитайте токи ветвей при заданном напряжении на входе цепи или токе одной из ветвей цепи, используя данные следующей таблицы.

Вариант	Сопротивление ветви, Ом					Напряжение на входе	Номер ветви	Ток ветви
	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	U, В	k	I, А
1	$1{,}5 - j3$	6	$-j6$	$j10$	$10 + j10$	30	2	2
2	$3 - j6$	20	$-j20$	$j20$	$10 - j10$	130	4	4
3	$2 - j4$	3	$-j2$	10	$10 + j10$	120	3	5
4	$4 - j12$	60	$-j80$	100	$100 - j100$	100	1	2
5	$8 - j6$	20	$-j40$	$-j100$	$100 - j100$	120	5	8
6	$8 - j4$	20	$-j20$	$-j20$	$10 + j10$	80	3	6
7	$4 - j4$	$j4$	$-j4$	$j20$	$10 + j10$	100	4	2
8	$5 - j5$	$j10$	$-j10$	$j10$	$10 - j10$	80	2	4

ЗАДАЧИ

1. (Р) Найдите емкость C конденсатора в цепи, схема которой изображена на рис. В5.10, при которой ток I не будет зависеть от сопротивления r.

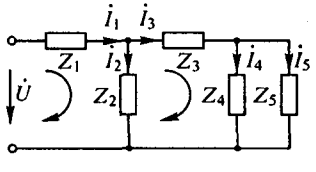


Рис. В5.9

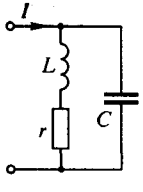


Рис. В5.10

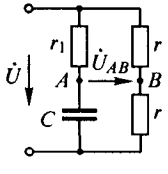


Рис. В5.11

2. (Р) Получите зависимость угла сдвига φ между напряжениями $\dot{U}$ и $\dot{U}_{AB}$ от сопротивления r_1 в цепи, схема которой изображена на рис. В5.11, при измене-

нии r_1 от нуля до бесконечности. Параметры цепи связаны соотношением $1/\omega C = r = 1$ Ом.

5.2. Методы расчета сложных электрических цепей

ВОПРОСЫ

1. (О) При каких условиях матрицы $\mathbf{Z}^{-1}$, $\mathbf{Y}^{-1}$ существуют?

2. (О) Граф цепи имеет q узлов и p ветвей. Какое минимально возможное число токов ветвей достаточно измерить, чтобы, не решая систем уравнений, найти токи всех остальных ветвей? Сколько следует измерить напряжений ветвей, чтобы при этом же условии определить напряжения всех остальных ветвей?

3. (О) Возможно ли взаимное преобразование идеальных источников ЭДС и тока?

4. (О) Возможно ли применение метода контурных токов для расчета токов в цепи, содержащей ветвь, которая имеет: *а*) равное нулю сопротивление; *б*) равную нулю проводимость?

5. Может ли ветвь входить в два независимых контура? В три независимых контура? В n независимых контуров?

6. Каким образом определяются токи ветвей дерева по контурным токам?

7. Граф схемы содержит q узлов и p ветвей. Сколько независимых уравнений должно быть записано методом контурных токов?

8. (О) Может ли модуль диагонального элемента матрицы контурных сопротивлений быть меньше модуля недиагонального элемента той же строки?

9. (О) Какие из управляемых источников могут быть учтены в методе контурных токов без предварительных преобразований?

10. (О) Как объяснить то обстоятельство, что все элементы матрицы узловых проводимостей, в отличие от элементов матрицы контурных сопротивлений, имеют заранее определенные знаки?

11. (О) Может ли модуль диагонального элемента матрицы узловых проводимостей быть меньше модуля внедиагонального элемента той же строки?

12. (О) В схеме равны нулю все узловые напряжения. Можно ли утверждать, что ни в одной ветви схемы не протекают токи? Справедливо ли это утверждение для обобщенных ветвей?

13. (О) Какие из управляемых источников могут быть учтены в методе узловых напряжений без предварительных преобразований?

14. (О) Возможно ли, чтобы система уравнений, составленная методом сечений, совпадала с системой уравнений, составленной методом узловых напряжений?

15. (О) Какими преимуществами обладает метод узловых напряжений в сравнении с методом сечений?

16. (О) Имеет ли метод сечений преимущества перед методом узловых напряжений при расчете схем, содержащих идеальные источники напряжения?

17. При формировании диагональных элементов матрицы узловых проводимостей проводимости элементов соответствующих ветвей входят в них со знаками

«плюс». Справедливо ли аналогичное утверждение для диагональных элементов матрицы проводимостей сечений?

18. Различаются ли размерности систем уравнений метода сечений и метода узловых напряжений?

19. (О) Возможен ли расчет методом сечений схемы, содержащей несколько идеальных источников ЭДС, не имеющих общего узла?

20. Каким свойством должен обладать граф схемы, чтобы элемент матрицы проводимостей сечений Y_{kl} ($k \neq l$) был равен нулю? Возможно ли равенство нулю диагонального элемента матрицы проводимостей сечений?

21. (О) Приведите пример схемы электрической цепи, для которой число уравнений метода смешанных величин меньше числа уравнений: *а*) методов сечений и контурных токов; *б*) метода узловых напряжений?

22. (О) Следует ли выбирать одинаковыми условные положительные направления токов в ветвях при расчете токов методом наложения при действии каждого из источников?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Изобразите графы электрических схем (рис. В5.12) при: *а*) разомкнутом; *б*) замкнутом ключе K.

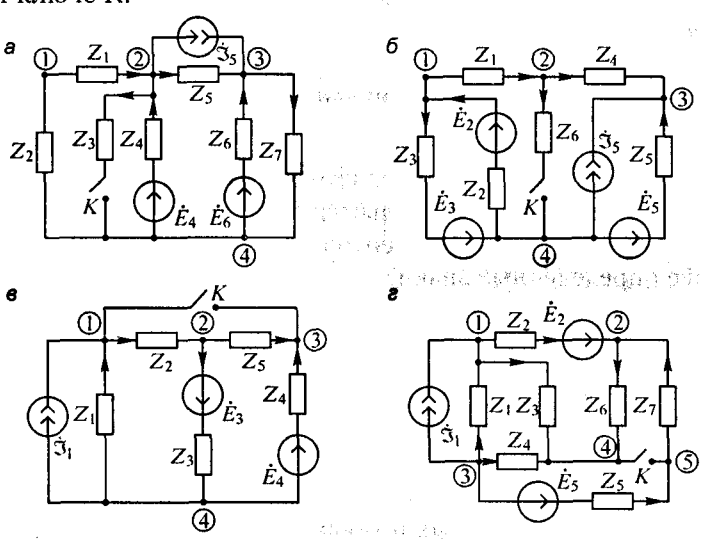


Рис. В5.12

2. Для представленных на рис. В5.13 графов электрических схем составьте: *а*) матрицу соединений **A**; *б*) матрицу главных сечений **D**, и, выбрав дерево графа, покажите на графе главные сечения; *в*) матрицу главных контуров **C**.

3. Для заданных схем (рис. В5.14) запишите уравнения законов Кирхгофа в матричной форме.

4. Рассчитайте токи в ветвях изображенных на рис. В5.15 схем, используя преобразование: *а*) звезда—треугольник; *б*) треугольник—звезда.

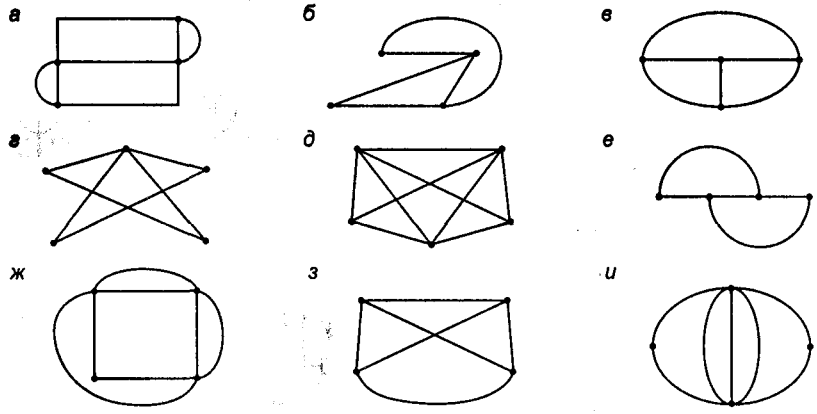


Рис. В5.13

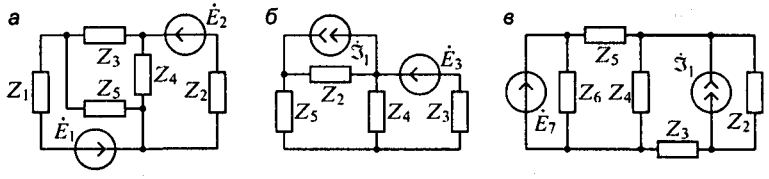
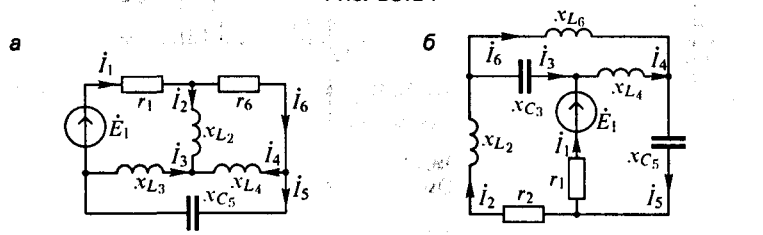


Рис. В5.14



$E_1 = 170$ В, $r_1 = 85$ Ом, $x_{L_2} = 50$ Ом, $x_{L_3} = 10$ Ом, $x_{L_4} = 20$ Ом, $x_{C_5} = 34$ Ом, $r_6 = 50$ Ом

$E_1 = 15$ В, $r_1 = 7{,}5$ Ом, $r_2 = 5$ Ом, $x_{L_2} = 5$ Ом, $x_{C_3} = 15$ Ом, $x_{L_4} = 5$ Ом, $x_{C_5} = 10$ Ом, $x_{L_6} = 20$ Ом

Рис. В5.15

5. (Р) Рассчитайте токи в ветвях изображенных на рис. В5.16 схем цепей для указанных в таблице значений параметров элементов методами узловых напряжений и контурных токов.

Вариант	Z_1, Ом	Z_2, Ом	Z_3, Ом	$\dot{E}_1$, В	$\dot{E}_2$, В	$\dot{\mathfrak{I}}_1$, А	$\dot{\mathfrak{I}}_2$, А
1	$-j10$	$2-j$	$1+j3$	100	$10+j20$	$15-j20$	–
2	–	$10+j10$	$5-j5$	$100+j100$	$100-j100$	–	–
3	$1+j2$	5	$2-j$	10	$10+j5$	–	–
4	$10+j10$	10	$10-j10$	-100	$250-j50$	–	–
5	$2-j$	$3-j$	5	–	–	$1-j2$	$2+j$
6	$3+j$	–	–	$10+j10$	$5-j5$	$j15$	–

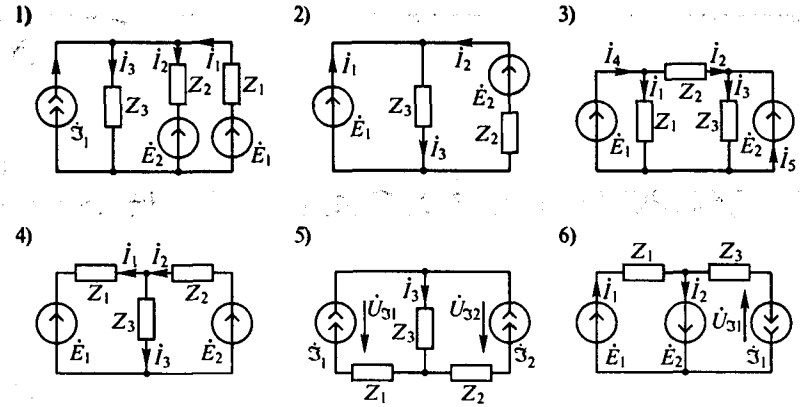
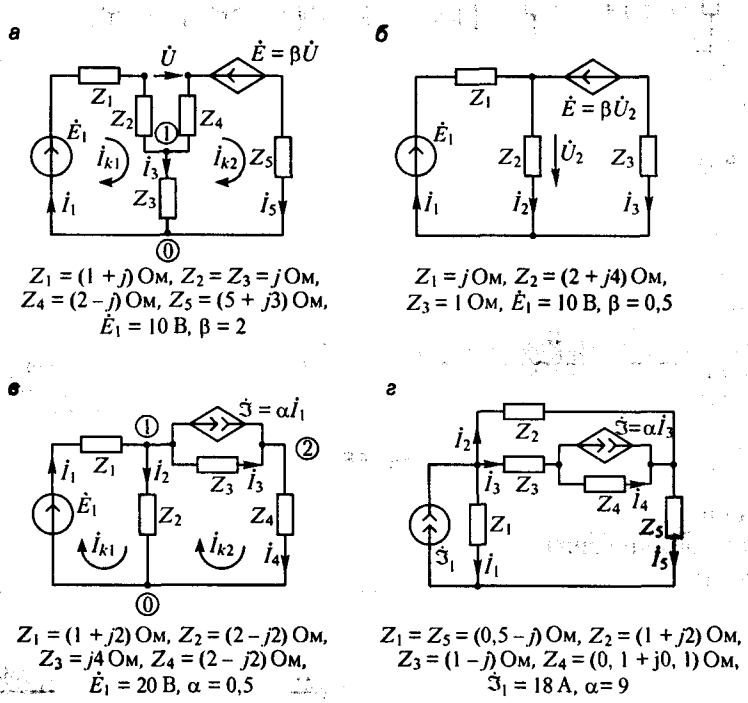


Рис. В5.16

6. (Р) Рассчитайте токи в ветвях изображенных на рис. В5.17 схем методами узловых напряжений и контурных токов при указанных значениях параметров элементов.



$Z_1 = (1 + j)$ Ом, $Z_2 = Z_3 = j$ Ом, $Z_4 = (2 - j)$ Ом, $Z_5 = (5 + j3)$ Ом, $\dot{E}_1 = 10$ В, $\beta = 2$

$Z_1 = j$ Ом, $Z_2 = (2 + j4)$ Ом, $Z_3 = 1$ Ом, $\dot{E}_1 = 10$ В, $\beta = 0{,}5$

$Z_1 = (1 + j2)$ Ом, $Z_2 = (2 - j2)$ Ом, $Z_3 = j4$ Ом, $Z_4 = (2 - j2)$ Ом, $\dot{E}_1 = 20$ В, $\alpha = 0{,}5$

$Z_1 = Z_5 = (0{,}5 - j)$ Ом, $Z_2 = (1 + j2)$ Ом, $Z_3 = (1 - j)$ Ом, $Z_4 = (0, 1 + j0, 1)$ Ом, $\mathfrak{Z}_1 = 18$ А, $\alpha = 9$

Рис. В5.17

7. (Р) Рассчитайте токи в ветвях цепи (рис. В5.18) методами узловых напряжений и контурных токов при указанных в таблице значениях параметров элементов и источников. Значения ЭДС $\dot{E}$ и токов $\mathfrak{Z}$, не указанных в таблице источников, примите равными нулю.

Вариант	Z_1, Ом	Z_2, Ом	Z_3, Ом	Z_4, Ом	Z_5, Ом	Z_6, Ом	k	$\dot{E}_k$, В	$\dot{\mathfrak{I}}$, А
1	j	$-j$	0	$1+j$	$1+j$	$-j$	3	3	$\dot{\mathfrak{I}}_5 = -0{,}5 + j0{,}5$; $\dot{\mathfrak{I}}_6 = j2$
2	$-j$	0	$1-j$	$-j$	1	j	2	5	$\dot{\mathfrak{I}}_1 = -6$; $\dot{\mathfrak{I}}_3 = 3 + j3$
3	1	$-j2$	$-j2$	$j2$	$-j4$	0	6	4	$\dot{\mathfrak{I}}_3 = j2$; $\dot{\mathfrak{I}}_5 = j$
4	0	$j2$	$-j$	$j2$	$1-j$	$1-j$	1	3	$\dot{\mathfrak{I}}_4 = j3$; $\dot{\mathfrak{I}}_6 = -3 + j3$
5	$1-j$	$j2$	$j2$	0	$-j2$	2	4	$2+j$	$\dot{\mathfrak{I}}_1 = -5 - j5$; $\dot{\mathfrak{I}}_6 = 5 - j5$
6	$1-j$	1	j	j	0	$-j2$	5	2	$\dot{\mathfrak{I}}_3 = 12 - j6$; $\dot{\mathfrak{I}}_6 = -j3$

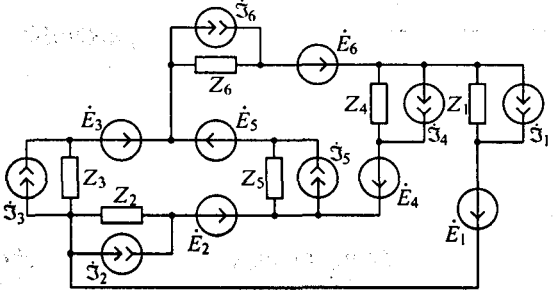
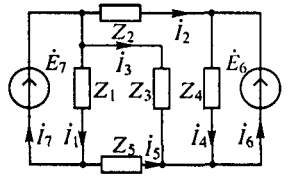


Рис. В5.18



$Z_1 = (1 + j)$ Ом, $Z_2 = (2 - j)$ Ом,
$Z_3 = (2 + j)$ Ом, $Z_4 = 1$ Ом,
$Z_5 = 5$ Ом, $\dot{E}_6 = (-5 + j5)$ В, $\dot{E}_7 = 10$ В

Рис. В5.19

8. (Р) Рассчитайте токи в ветвях схемы (рис. В5.19) методом сечений.

9. (О) Запишите уравнения метода смешанных величин для изображенной на рис. В5.20 схемы цепи.

10. (О) Сформулируйте принцип взаимности для схем с y-ветвями.

11. (Р) Найдите токи в изображенных на рис. В5.21 схемах, пользуясь методом наложения. Определите ток в одной из ветвей схемы, пользуясь принципом взаимности.

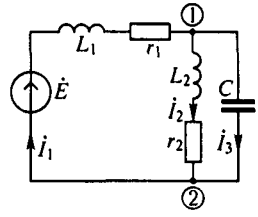


Рис. В5.20

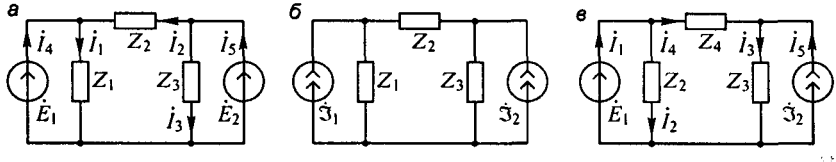


Рис. В5.21

12. (О) При каком виде схемы электрической цепи для расчета токов преимущества метода, основанного на принципе взаимности, выражены наиболее отчетливо?

13. (Р) В цепи, содержащей резистивные элементы и источники, выведены зажимы A и B. Напряжение на зажимах равно $U_{AB\,0} = 4$ В, а при коротком замыкании зажимов ток в перемычке равен $I_{AB\,кз} = 2$ А. Определите ток через резистор $R_{AB} = 6$ Ом, подключаемый к зажимам A и B.

14. (Р) Рассчитайте ток I в цепи (рис. В5.22) методом эквивалентного генератора при заданных значениях величин: $\dot{E} = 24$ В, $Z_1 = 4$ Ом, $Z_2 = 8$ Ом, $Z_3 = 4$ Ом, $Z_4 = 8$ Ом, $Z_5 = 5$ Ом.

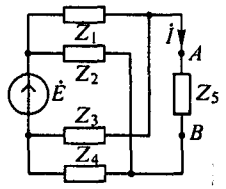


Рис. В5.22

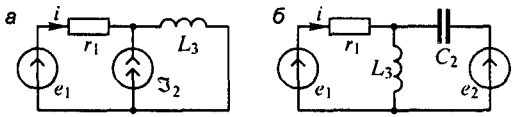


Рис. В5.23

15. (Р) Укажите рациональный метод определения тока $\dot{I}$ в изображенных на рис. В5.23 схемах цепей синусоидального тока.

ЗАДАЧИ

1. (Р) Выведите формулы, связывающие сопротивления ветвей многолучевой звезды и эквивалентного ей многоугольника.

2. (Р) Предложите способ преобразования соединения трехлучевой звезды в эквивалентный треугольник для случая, когда ветви звезды содержат источники.

3. (Р) Для некоторой схемы найден вектор узловых напряжений $\boldsymbol{U}_0$. Выразите через $\boldsymbol{U}_0$ вектор $\boldsymbol{U}_1$ напряжений на ветвях дерева при заданных матрицах соединений **A** и сечений **D**.

4. (Р) В одной из ветвей электрической цепи имеется только идеальный источник ЭДС, так что проводимость этой ветви обращается в бесконечность. Предложите способ решения задачи методом узловых напряжений.

5.3. Расчет электрических цепей при наличии взаимной индукции

ВОПРОСЫ

1. (О) Может ли напряжение на зажимах одной из двух индуктивно связанных катушек отставать по фазе от тока этой катушки?

2. (О) Может ли активная мощность в пассивной ветви, содержащей реактивную катушку, связанную индуктивно с какой-либо катушкой другой ветви, принимать отрицательные значения?

3. Две индуктивно связанные катушки соединены последовательно и подключены к источнику синусоидального напряжения. При каком включении этих катушек (согласном или встречном) действующее значение их тока I будет больше?

4. (О) Как изменятся показания приборов (увеличатся, уменьшатся, останутся неизменными) после замыкания ключа K при наличии взаимно индуктивной связи между идеальными катушками L_1 и L_2 ($M = \sqrt{L_1 L_2}$, $L_1 \neq L_2$) (рис. В5.24)?

5. (О) У какой из двух изображенных на рис. В5.25 схем входное сопротивление $Z_{вх}$ больше?

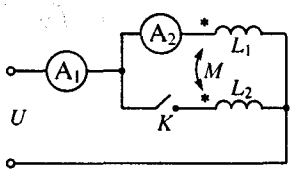


Рис. В5.24

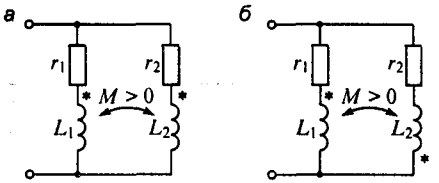


Рис. В5.25

6. Может ли входное активное сопротивление трансформатора быть меньше активного сопротивления первичной обмотки?

7. (О) Какова связь между реактивными сопротивлениями приемника и вторичной обмотки трансформатора: *а*) если входное реактивное сопротивление трансформатора превышает реактивное сопротивление первичной обмотки; *б*) входное реактивное сопротивление трансформатора меньше реактивного сопротивления первичной обмотки? Какому (емкостному или индуктивному) характеру сопротивления приемника соответствуют случаи *а*) и *б*)?

УПРАЖНЕНИЯ

1. (О) Проверьте правильность записи уравнений второго закона Кирхгофа для изображенной на рис. В5.26 цепи.

$$\dot{E} = j\omega L_1\dot{I}_1 + j\omega L_2\dot{I}_2 + j\omega M_{12}\dot{I}_2 - j\omega M_{13}\dot{I}_3 - j\omega M_{13}\dot{I}_1 - j\omega M_{23}\dot{I}_2,$$

$$0 = j\omega L_2\dot{I}_2 - j\omega L_3\dot{I}_3 + j\omega M_{12}\dot{I}_1 - j\omega M_{23}\dot{I}_3 - j\omega M_{13}\dot{I}_1 - j\omega M_{23}\dot{I}_2.$$

2. (Р) В результате эксперимента с двумя последовательно включенными индуктивно связанными катушками получено:

1) при встречном включении ток $I = 1$ А, активная мощность $P = 30$ Вт,

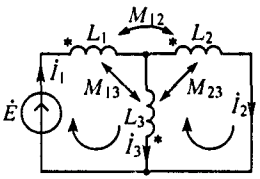


Рис. В5.26

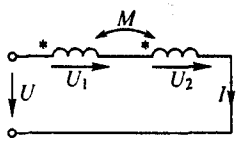


Рис. В5.27

2) при согласном включении ток $I = 0{,}6$ А.

Подведенное к катушкам напряжение $U = 100$ В, его частота $f = 400$ Гц. Рассчитайте взаимную индуктивность M.

3. (Р) Рассчитайте сопротивление цепи, а также напряжения U_1, U_2 и ток I при $U = 120$ В, $x_1 = 5$ Ом, $x_2 = 20$ Ом, коэффициенте связи $k = 0{,}5$, $r_1 = r_2 = 0$ (рис. В5.27), $\omega = 314$ с$^{-1}$.

4. (Р) Определите показания вольтметров в изображенных на рис. В5.28 схемах: *а*) при указанной маркировке катушек; *б*) перемене маркировки одной из катушек в каждой схеме. Параметры элементов схем имеют значения: $x_1 = 20$ Ом, $x_2 = 10$ Ом, $x_C = 10$ Ом, $r = 40$ Ом, $x_M = \omega M = 10$ Ом, $E = 200$ В.

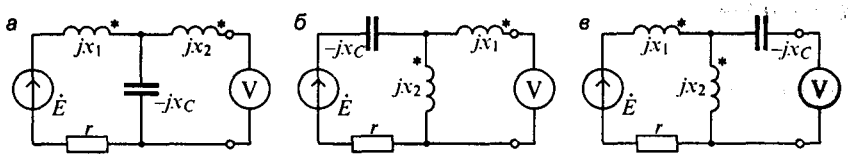


Рис. В5.28

5. Определите эквивалентные сопротивления $r_э$, $x_э$ двухполюсников (рис. В5.29).

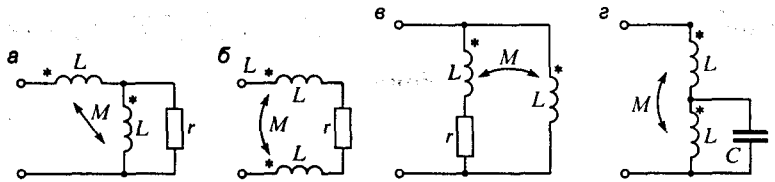


Рис. В5.29

6. (О) Предложите способ расположения двух катушек, при котором: *а*) $k \cong 0$; *б*) $k \cong 1$.

7. Изобразите качественную векторную диаграмму трансформатора при *а*) $z_{пр} = r$; *б*) $z_{пр} = \omega L$; *в*) $z_{пр} = 1/\omega C$.

8. (О) Запишите уравнения трехобмоточного трансформатора с линейными характеристиками (рис. В5.30).

9. (О) Воздушный трансформатор характеризуется параметрами: $\omega L_1 = 1$ кОм, $\omega L_2 = 4$ кОм, $r_1 = 200$ Ом, $r_2 = 800$ Ом, $k = 0{,}6$, $r_{пр} = 1$ кОм. Определите входное и вносимое комплексные сопротивления.

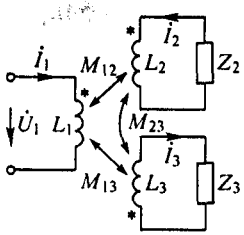


Рис. В5.30

10. (Р) С трансформатором, подключенным к источнику напряжением $U_1 = 200$ В, производят опыты холостого хода и короткого замыкания. В режиме короткого замыкания получен ток $\dot{I}_{1кз} = 60{,}6\, e^{-j55°}$ А, в режиме холостого хода — $\dot{I}_{1хх} = 20(1 - j3)$ А; $\dot{U}_{2хх} = 60(3 + 3j)$ В. Определите параметры r_1, x_1, r_2, x_2, x_M трансформатора.

11. (О) Для определения параметров трансформатора к первичным зажимам подведено синусоидальное напряжение $U = 200$ В частотой $f = 500$ кГц. Активное сопротивление первичной обмотки $r_1 = 2$ Ом. При разомкнутой вторичной обмотке индуцируемая в ней ЭДС равна $E_2 = 368$ В, а ток первичной обмотки $I_1 = 8$ А. Определите значения величин L_1, M.

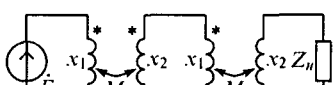


Рис. В5.31

12. Рассчитайте входное сопротивление цепи (рис. В5.31): $x_1 = 1$ Ом; $x_2 = 2$ Ом; $x_м = \omega M_{12} = 1$ Ом; $Z_н = 1 - j2$ Ом.

13. Трансформатор без потерь ($r_1 = r_2 = 0$) характеризуется параметрами: $L_1 = 1$ Гн, $L_2 = 2$ Гн, $k = 1$, $Z_н = r_н = 10$ Ом. Получите выражения модулей коэффициентов передачи по напряжению и току: $k_U = |\dot{U}_2/\dot{U}_1|$; $k_I = |\dot{I}_2/\dot{I}_1|$.

ЗАДАЧИ

1. Определите частоту напряжения на входе цепи, изображенной на рис. В5.32: *а*) при согласном; *б*) встречном включении катушек и заданных значениях параметров элементов $C = 2$ мкФ, $L_1 = 0{,}01$ Гн, $L_2 = 0{,}02$ Гн, $M = 0{,}01$ Гн, при которой входное реактивное сопротивление равно нулю.

2. Вблизи колебательного контура *1* расположена короткозамкнутая ветвь *2*, связанная с ним индуктивно (рис. В5.33). Вычислите частоту напряжения на входе цепи, при которой модуль входного сопротивления имеет наибольшее значение, для $C = 0{,}1$ мкФ, $M = 1$ мГн, $L_1 = 3$ мГн, $L_2 = 2$ мГн, пренебрегая активными сопротивлениями элементов.

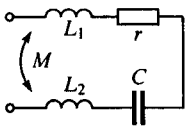


Рис. В5.32

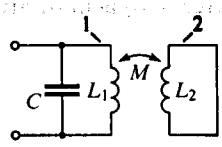


Рис. В5.33

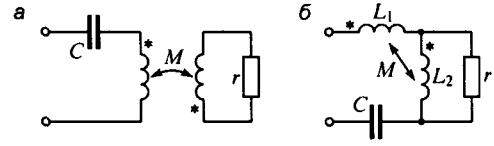


Рис. В5.34

3. Определите емкость C конденсатора, при которой входное сопротивление изображенных на рис. В5.34 двухполюсников является активным.

4. Определите показание I амперметра в изображенной на рис. В5.35 цепи при $x_{L_1} = 40$ Ом, $x_{L_2} = 10$ Ом, $x_C = 50$ Ом, $k = 1$, $\dot{E}_1 = 80 - j60$ В, $\dot{E}_2 = 40 + j30$ В.

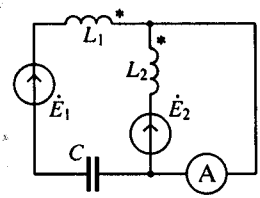


Рис. В5.35

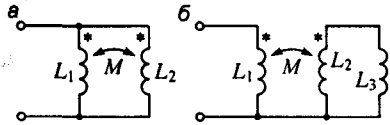


Рис. В5.36

5. Определите эквивалентную индуктивность изображенных на рис. В5.36 цепей.

6. Рассчитайте входное сопротивление цепи при заданных значениях величин $r = \omega L = 2$ кОм, $x_C = 1$ кОм, $k = 0{,}5$ (рис. В5.37).

7. (Р) n катушек индуктивностью L_0 каждая соединены параллельно. Взаимная индуктивность между любыми из них равна M. Определите эквивалентную индуктивность цепи при числе катушек $n \to \infty$ (рис. В5.38).

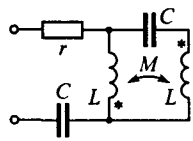


Рис. В5.37

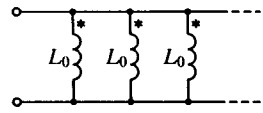


Рис. В5.38

Ответы на вопросы, решения упражнений и задач

1.1. Связь заряда частиц и тел с их электрическим полем. Теорема Гаусса

ВОПРОСЫ

1. Это условие необходимо, так как в противном случае одноименно заряженные тела могут притягиваться, если их размеры сильно различаются. Если, например, одно из тел является проводящей сферой малого радиуса r, а другое — значительно большего радиуса $R \gg r$, то взаимодействие индуцированного на поверхности большего тела заряда с зарядом тела малых размеров может привести к притяжению тел, хотя знаки зарядов тел одинаковы.

4. *а*) В точке A имеем $E \neq 0$. В точке B напряженность поля обращается в нуль, так как внутри проводника электростатическое поле отсутствует. В точке C имеем $E \neq 0$, так как оболочка *2* кабеля, будучи незаряженной и изолированной, не экранирует поля заряженной жилы *1*. *б*) В точках A и B имеем $E = 0$, так как эти точки расположены в полости заряженного проводящего тела. В точке C — $E \neq 0$. *в*) В точке A напряженность поля $E \neq 0$. В точке B имеем $E = 0$. В точке C получаем $E = 0$, так как жила и оболочка несут равные заряды противоположных знаков. *г*) В точках A и C имеем $E = 0$, так как эти точки находятся в проводящей среде. Поле в точке B определяется зарядом жилы и поэтому в ней $E \neq 0$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Записывая вектор магнитной индукции в прямоугольной системе координат $\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}$ и учитывая соотношение $\boldsymbol{f} = q\,[\boldsymbol{vB}]$, можем получить выражения $m = q(bB_z - cB_y)$, $n = q(cB_x - aB_z)$, $p = q(aB_y - bB_x)$, из которых несложно найти проекции вектора магнитной индукции.

3. Кривая изменения напряженности вдоль линии ab показана на рис. Р1.1.

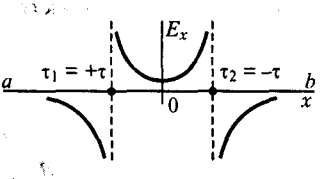


Рис. Р1.1

4. В соответствии с теоремой Гаусса поток вектора напряженности электрического поля равен

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon} 4\pi \int_0^r \rho(r) r^2 dr,$$

откуда находим функцию $\rho(r)$, обеспечивающую требуемый характер зависимости $E(r)$.

В случае *а* имеем $\dfrac{1}{r^2}\int_0^r \rho(r) r^2 dr = \text{const}$, что достигается при $\rho(r) \equiv r^{-1}$.

В случае *б* $\dfrac{1}{r^2}\int_0^r \rho(r) r^2 dr \equiv r^{-\alpha}$ $(\alpha > 0)$ получаем $\int_0^r \rho(r) r^2 dr \equiv r^{2-\alpha}$, откуда находим $\rho(r) \equiv r^{-1-\alpha}$.

В общем случае *в* при $E(r) \equiv f(r)$ имеем $\rho(r) \equiv r^{-2}[r^2 f(r)]' = \dfrac{2}{r} f(r) + f'(r)$.

6. *а*) Линии напряженности электрического поля не могут пересекаться. *б*) Электростатическое поле в проводящей среде отсутствует, здесь напряженность поля $E = 0$. *в*) Линии напряженности электростатического поля не могут иметь истока в точке, где отсутствует электрический заряд.

ЗАДАЧИ

1. Напряженность электрического поля, создаваемого зарядом плотностью σ, равномерно распределенным на безграничной плоскости, в соответствии с теоремой Гаусса равна $\sigma/2\varepsilon$, где ε — диэлектрическая проницаемость среды. Применяя метод наложения, находим напряженность поля в области между пластинами $E = \sigma/\varepsilon$ и вне их — $E = 0$.

5. Напряженность электрического поля при $r > R$ равна $E = \tau/ 2\pi\varepsilon_0 r$, откуда получаем $r = \tau/ 2\pi\varepsilon_0 E$. Подставляя численные значения, находим $r \approx 1{,}5$ см. Таким образом, в области 1,2 см $\le r \le$ 1,5 см воздух ионизирован.

6. Осевая составляющая dE_z напряженности поля в точке A (рис. Р1.2), создаваемая элементарным зарядом $\tau R\, d\varphi$, равна

$$dE_z = dE\cdot\cos\alpha = \frac{\tau R d\varphi}{4\pi\varepsilon r^2}\cdot\frac{z}{r}, \text{ так что } E_z = \int_0^{2\pi} dE_z = \frac{\tau R z}{2\varepsilon\sqrt{(z^2+R^2)^3}}.$$

Из условия $\frac{dE_z}{dz} = 0$ получаем $z = \frac{R}{\sqrt{2}}$, при этом $E_z = 2{,}18\cdot 10^3$ В/м.

7. Если принять, что полость заполнена зарядами объемной плотностью ρ и $\rho_1 = -\rho$, то поле внутри полости можно найти, считая, что оно получено при наложении поля объемно заряженного шара с зарядом плотностью ρ, а также объемно заряженного вкрапления с зарядом плотностью $\rho_1 = -\rho$. Горизонтальная составляющая напряженности поля в точке A вкрапления (рис. Р1.3, здесь O — центр шара из диэлектрика, O' — центр сферического вкрапления) равна

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon}\cos\alpha + \frac{\rho r'}{3\varepsilon}\cos\alpha = \frac{\rho}{3\varepsilon}(r\cos\alpha + r'\cos\alpha') = \frac{\rho d}{3\varepsilon} = \text{const}.$$

Так как вертикальная составляющая напряженности поля в точке A равна

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon}\sin\alpha - \frac{\rho r'}{3\varepsilon}\sin\alpha' = \frac{\rho}{3\varepsilon}(r\sin\alpha - r'\sin\alpha') = 0,$$

то, следовательно, во вкраплении однородное поле с напряженностью $E = \frac{\rho d}{3\varepsilon}$.

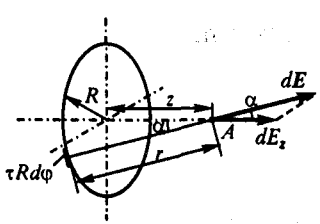


Рис. Р1.2

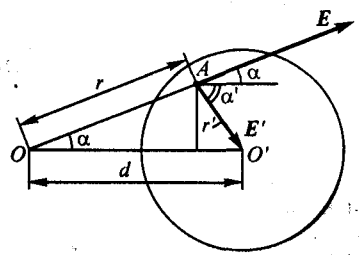


Рис. Р1.3

8. Составляющие напряженности электрического поля в точке A, принадлежащей обоим шарам (рис. Р1.4, *а*), равны:

- горизонтальная: $\frac{\rho}{3\varepsilon}(r\cos\alpha + r'\cos\alpha_1) = \frac{\rho d}{3\varepsilon} = \text{const}$,
- вертикальная: $\frac{\rho}{3\varepsilon}(r\sin\alpha - r'\sin\alpha_1) = 0$,

так как $r\sin\alpha = r'\sin\alpha_1$. Следовательно, поле в общем для шаров объеме однородное и $E = \frac{\rho d}{3\varepsilon}$.

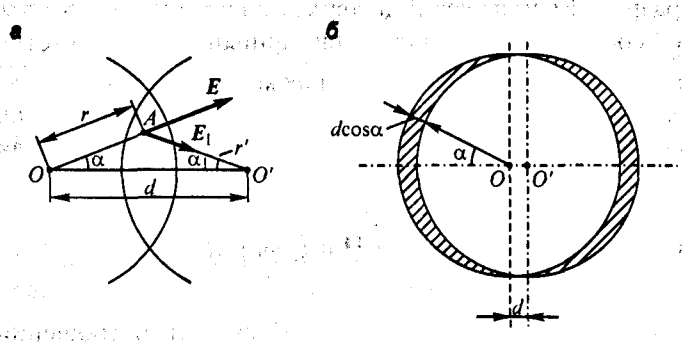


Рис. Р1.4

При малых d толщина заряженного слоя (рис. Р1.4, *б*) приближенно равна $d\cos\alpha$, так что при $d \to 0$ и $\rho \to \infty$ на поверхности шара размещается поверхностный заряд плотностью $\sigma = \rho d\cos\alpha = \sigma_m\cos\alpha$. При этом напряженность однородного поля равна $E = \frac{\sigma_m}{3\varepsilon}$.

1.2. Электрическое смещение. Постулат Максвелла

ВОПРОСЫ

1. На поверхности S_1 появляется связанный заряд, знак которого противоположен знаку заряда q. Среда с большей диэлектрической проницаемостью характеризуется большей поляризованностью, поэтому связанный заряд на поверхности S_2 является положительным, тогда как на поверхности S_3 он отрицательный. При изменении знака заряда тела знаки всех связанных зарядов также изменяются на противоположные.

3. Напряженность электрического поля больше в среде с меньшей диэлектрической проницаемостью, тогда как электрическое смещение одинаково в обеих средах. Поэтому плотность линий вектора $\boldsymbol{D}$ в обеих средах одинакова, а плотность линий напряженности электрического поля различна: она меньше в среде с большей диэлектрической проницаемостью. Другими словами, сечение трубок потока вектора напряженности электрического поля меньше в среде с меньшей диэлектрической проницаемостью.

4. Электрические заряды в проводящей среде являются свободными, поэтому справедливо равенство $\oint_{S_2} \boldsymbol{D} d\boldsymbol{s}_2 = 0$, так как индуцированный на внутренней поверхности проводящего тела заряд равен $q_1 = -q$, и полный свободный заряд внутри поверхности S_2 оказывается равным нулю. На внешней поверхности проводящего тела образуется заряд $q_2 = -q_1 = q$, так что получаем $\oint_{S_1} \boldsymbol{D} d\boldsymbol{s}_1 = q$.

5. В точке на границе двух диэлектриков связанный заряд возникает, если только нормальная к границе составляющая напряженности электрического поля претерпевает разрыв. Если на границе двух диэлектриков существует только касательная к ней составляющая поля, то связанный заряд отсутствует.

6. Линии вектора напряженности электрического поля подходят к поверхности проводника под прямым углом. Если одна из главных осей анизотропии вещества, окружающего проводящее тело, совпадает с направлением нормали к поверхности проводника, то векторы напряженности электрического поля и электрического смещения имеют в точках поверхности одно и то же направление. В противном случае угол между векторами $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$ не равен нулю.

УПРАЖНЕНИЯ

1. В этом случае составляющие векторов $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$ связаны соотношениями $D_x = \varepsilon_{xx} E_x$, $D_y = \varepsilon_{yy} E_y$, $D_z = \varepsilon_{zz} E_z$. Матрица диэлектрической проницаемости является диагональной.

При параллельном переносе осей координат тензор ε не изменяет своего вида, тогда как при повороте оси координат уже перестают совпадать с главными осями анизотропии; матрица тензора не будет диагональной: в общем случае все ее элементы не равны нулю.

2. Напряженность электрического поля, а также плотность линий напряженности электрического поля обратно пропорциональны диэлектрической проницаемости среды. В рассматриваемых задачах вектор $\boldsymbol{E}$ нормален к поверхности раздела сред, так что при переходе из одной среды в другую напряженность электрического поля изменяется скачком, принимая в среде с большей диэлектрической проницаемостью меньшие значения. Зависимости $D(r)$, $E(r)$, $P(r)$ для варианта *а* изображены на рис. Р1.5.

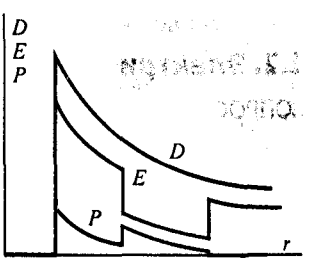


Рис. Р1.5

4. Напряженность электрического поля на внутренней обкладке конденсатора, не имеющего воздушного зазора, равна $E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon R}$. Появление зазора ведет к изменению напряженности поля до величины $E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R}$ и напряженность поля возрастает в ε_r раз.

6. Выделим малый участок границы раздела сред с диэлектрическими проницаемостями ε_1, ε_2 (рис. Р1.6) и охватим его замкнутой цилиндрической поверхностью, торцевые части которой параллельны участку S границы. Интеграл $\oint_S \boldsymbol{P}\,d\boldsymbol{s} = -q'$ по поверхности цилиндра записываем как сумму интегралов по его торцевым S_1, S_2 и боковой S_6 поверхностям. Учитывая, что $\oint_{S_6} \boldsymbol{P}\,d\boldsymbol{s} = 0$, получаем $-\int_{S_1} \boldsymbol{P}_1\,d\boldsymbol{s} + \int_{S_2} \boldsymbol{P}_2\,d\boldsymbol{s} = -q'$. В пределах площадок S_1 и S_2 вектор поляризованности сохраняется постоянным, поэтому имеем $(-P_1 + P_2)S = -q'$, или $P_1 - P_2 = q'/S = \sigma'$. Таким образом, поверхностная плотность связанного электрического заряда численно равна разности поляризованностей по обе стороны поверхности, разделяющей среды с различными диэлектрическими проницаемостями.

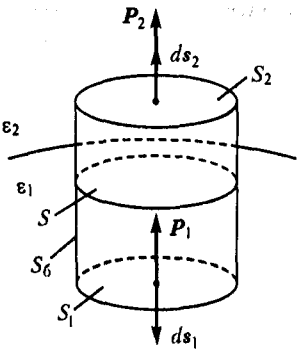


Рис. Р1.6

1.3. Виды электрического тока и принцип непрерывности электрического тока

ВОПРОСЫ

1. *а*) Это есть электрический ток проводимости, называемый током утечки. *б*) Движение заряженных частиц или тел в пустоте, жидкой или газообразной среде есть проявления тока переноса. В твердых телах протекает электрический ток проводимости (вариант *в*) либо ток электрического смещения (вариант *г*).

2. При перемещении проводящего тела в неоднородном электрическом поле изменяется плотность электрических зарядов, распределенных на его поверхности. Это происходит только тогда, когда заряды перемещаются в объеме тела, т. е. если в теле протекает ток проводимости. Вследствие изменения электрического поля в окружающем тело пространстве в нем должен протекать ток электрического смещения.

3. Внесение в пространство между обкладками конденсатора тела, выполненного из диэлектрика, приводит к поляризации последнего, при которой в нем возникает ток электрического смещения. При внесении проводящего тела в его объеме под действием электрического поля происходит перемещение электрических зарядов, что означает протекание электрического тока проводимости.

4. При изменении расстояния между обкладками конденсатора изменяется напряженность электрического поля, что свидетельствует о протекании тока электрического смещения в конденсаторе. С другой стороны, изменение расстояния между обкладками означает изменение емкости конденсатора и заряда на его обкладках, что говорит о протекании электрического тока проводимости в подсоединенных к обкладкам конденсатора проводах. Возникающий в проводах ток проводимости переходит в ток электрического смещения в области между обкладками конденсатора.

7. При перемещении электрического заряда вблизи незаряженного проводящего тела индуцированные на его поверхности заряды непрерывно изменяют свое распределение, что может происходить, если в теле протекает электрический ток проводимости.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Направление тока электрического смещения совпадает с направлением вектора электрического смещения в этой точке.

3. Записывая составляющие вектора электрического смещения в центре окружности $D_x = \frac{q}{4\pi R^2}\sin\omega t$, $D_y = \frac{q}{4\pi R^2}\cos\omega t$, получаем $J_x = \frac{dD_x}{dt} = \frac{q}{4\pi R^2}\omega\cos\omega t$, $J_x = -\frac{q}{4\pi R^2}\omega\sin\omega t$ и $J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = \frac{q}{4\pi R^2}\cdot\omega$. Вектор плотности тока в центре окружности вращается с угловой скоростью ω в том же направлении, что и заряд q.

4. Зависимость $J_{см}(t)$ находим с помощью соотношения $J_{см}(t) = \frac{dD}{dt}$. Для варианта *б* получаем на первом участке линейного изменения электрического смещения $J_{см}(t) = k = \text{const}$; на втором участке имеем $J_{см}(t) = -\alpha D_0 \exp(-\alpha t)$.

5. Вектор электрического смещения имеет единственную составляющую, равную $D_x = \int_0^t J_{см}(t)dt + D_x(0)$.

Для варианта *а* получаем $D(t) = -(J_m/\omega)\cos\omega t + D(0)$.

ЗАДАЧИ

1. В силу симметричного растекания тока плотность тока проводимости в точке на расстоянии r от оси жилы равна $J(r) = \gamma E(r) = i/2\pi rl$, где i — ток проводимости между жилой и оболочкой кабеля. Записывая напряжение между жилой и оболочкой

$$u = \int_{R_1}^{R_2} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{i}{2\pi\gamma l r}\,dr = \frac{i}{2\pi\gamma l}\ln\frac{R_2}{R_1},$$

находим ток проводимости (называемый также током утечки)

$$i = \frac{2\pi\gamma l u}{\ln(R_2/R_1)} \cong 2\sqrt{2}\cdot 10^{-2}\sin 100\pi t \text{ А}$$

и проводимость изоляции $G = \frac{i}{u} = \frac{2\pi\gamma l}{\ln(R_2/R_1)} \cong 9{,}1\cdot 10^{-5}$ См.

Плотности тока при $r = R_1$ и при $r = R_2$ равны соответственно

$J = i/(2\pi R_1 l) = 1{,}12\cdot 10^{-2}\sin 100\pi t$ А/м² и $J = i/(2\pi R_2 l) = 5{,}6\cdot 10^{-3}\sin 100\pi t$ А/м².

Мощность потерь в неидеальном диэлектрике составляет $P = U^2 G = 4{,}4$ Вт.

Для вычисления плотности тока смещения $J_{см}(t) = \varepsilon\dfrac{dE}{dt}$ выражаем напряженность поля через напряжение $E(r) = u/[r \ln (R_2/R_1)]$ и получаем

$$J_{см}(R_1,t) = \frac{\varepsilon}{R_1 \ln R_2/R_1}\frac{du}{dt} \cong 1{,}6\cdot 10^{-3}\cos 100\pi t \text{ А/м}^2$$

$$J_{см}(R_2, t) = \frac{\varepsilon}{R_2 \ln R_2/R_1}\frac{du}{dt} \cong 7{,}8\cdot 10^{-4}\cos 100\pi t \text{ А/м}^2.$$

Ток смещения равен $i_{см} = J_{см}(R_1, t)2\pi R_1 l \cong 3{,}92\cdot 10^{-3}\cos 100\pi t$ А.

2. Учитывая симметрию при растекании тока в земле, находим плотность тока проводимости $J(r) = i/(4\pi r^2)$. Принимаем потенциал равным нулю в бесконечно удаленной точке и рассчитываем подведенное к заземлителю напряжение

$$u = \int_R^\infty J(r)\,dr/\gamma = \frac{i}{4\pi\gamma R},$$

откуда находим сопротивление заземлителя $R_3 = \dfrac{u}{i} = 4\pi\gamma R = 6{,}28\cdot 10^{-2}$ Ом

и мощность потерь $P = I^2R_3 = 6{,}28\cdot 10^2$ Вт.

Плотность тока смещения $J_{см}(r) = \dfrac{\varepsilon}{4\pi\gamma r^2}\dfrac{di}{dt} = \dfrac{6{,}3\cdot 10^{-6}}{r^2}\cos 100\pi t$ А/м^2.

3. При изменении приложенного к конденсатору напряжения по закону $u = U_m \sin \omega t$ имеем $J_{см} = \dfrac{dD}{dt} = \varepsilon\dfrac{dE}{dt} = \varepsilon\omega E_m \cos \omega t$, $J_{пр} = \gamma E_m \sin \omega t$, откуда из условия $\varepsilon\omega = \gamma$ находим искомую частоту $f = \dfrac{\gamma}{2\pi\varepsilon} = \dfrac{10^{-6}\cdot 4\pi\cdot 9\cdot 10^9}{2\pi\cdot 8} = 2250$ Гц.

4. При заданной частоте тока током смещения в проводящей пластине можно пренебречь, так как амплитуда плотности тока смещения $J_{см\ max} = \varepsilon_0\omega E_{пл\ max}$ в ней значительно меньше амплитуды плотности тока проводимости $J_{max} = \gamma E_{пл\ max}$. Действительно, $J_{см\ max}/J_{max} = \varepsilon_0\omega/\gamma = 2{,}5\cdot 10^{-14}$. В силу принципа непрерывности электрического тока ток смещения в диэлектрике конденсатора переходит в ток проводимости проводящей пластины и $J_{max} = \gamma E_{пл\ max}$, откуда находим $E_{пл\ max} = I_{max}/\gamma S \cong 2{,}9\cdot 10^{-8}$ В/м. Напряженность электрического поля в диэлектрике, получаемая из соотношения $J = \varepsilon\dfrac{dE}{dt}$, равна $E_{д\ max} = \dfrac{J_{max}}{\varepsilon\omega} = \dfrac{I_{max}}{S\varepsilon\omega} = 1{,}4\cdot 10^4$ В/м. Таким образом, допущение $E_{пл} \ll E_д$ оправдано.

1.4. Электрическое напряжение и потенциал

ВОПРОСЫ

1. Если вектор dl выбрать так, что в любой точке пути он нормален к вектору E, то при перемещении вдоль такого пути интеграл $\int E\,dl$ не изменяется и, следовательно, работа не совершается. Поверхность, в каждой точке которой вектор напряженности поля направлен по нормали к ней, является поверхностью

постоянного потенциала. Таким образом, при перемещении заряда по поверхности постоянного потенциала работа не совершается.

6. На поверхности, в любой из точек которой потенциал постоянен, касательная к поверхности составляющая вектора напряженности электростатического поля обращается в нуль, однако в общем случае нормальная к поверхности составляющая вектора напряженности поля отлична от нуля и, следовательно, поле на поверхности существует.

7. При расчете поля заряженных тел, занимающих ограниченную область пространства, потенциал может быть принят равным нулю в бесконечно удаленной точке. Однако для тела бесконечной протяженности, например бесконечно длинного заряженного цилиндра с зарядом одного знака, потенциал в бесконечно удаленной точке не может быть принят равным нулю. Его задают равным нулю в точках, расположенных на конечном расстоянии от цилиндра.

11. *а*) Емкость бесконечно длинных проводов равна бесконечности, поэтому можно говорить о емкости проводов на единицу их длины. Емкость уединенного бесконечно длинного провода не имеет смысла, так как при заданной линейной плотности заряда потенциал в бесконечности не может быть принят равным нулю и, следовательно, потенциал на его поверхности не является единственным.

б) Так как потенциал в точке расположения заряда обращается в бесконечность, то емкость точечного тела не имеет смысла.

в) Если телу из диэлектрика сообщить некоторый заряд, то потенциал в различных точках тела примет различные значения и емкость такого тела определена быть не может.

г) Потенциал в полости проводящего тела сохраняется постоянным, равным потенциалу точек его поверхности. Поэтому понятие емкости такого тела имеет смысл.

д) Плотность заряда на ребрах листа может быть весьма большой, так как заряд распределен неравномерно по поверхности листа. Однако потенциал точек на поверхности листа остается постоянным и понятие емкости проводящего листа конечных размеров имеет смысл.

УПРАЖНЕНИЯ

2. Число слоев диэлектрика определяется количеством прямолинейных участков зависимости $U(x)$, так как на границе раздела сред потенциал имеет излом. В любом из слоев напряженность поля постоянна.

ЗАДАЧИ

1. Потенциал в точке A (рис. Р1.7) равен

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon r_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$ При $r_1 \gg d$, $r_2 \gg d$ имеем $r_1 \cong r - \frac{d}{2}\cos\varphi$, $r_2 \cong r + \frac{d}{2}\cos\varphi$,

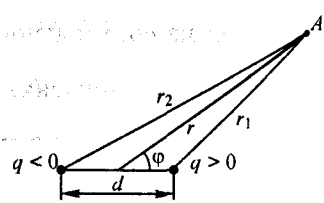


Рис. Р1.7

$r_1 r_2 = r^2 - \frac{d^2}{4}\cos^2\varphi \approx r^2$ и, учитывая, что $r_2 - r_1 \cong d\cos\varphi$, получаем $U = \frac{qd\cos\varphi}{4\pi\varepsilon r^2}$.

2. Так как $E_i = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ при $-\frac{d}{2} < y < +\frac{d}{2}$ (рис. Р1.8, *а*), то $U_i = \frac{\sigma}{\varepsilon} y$ и $U = \frac{\sigma d}{2\varepsilon}$ при $y \geq \frac{d}{2}$, $U = -\frac{\sigma d}{2\varepsilon}$ при $y \leq -\frac{d}{2}$ (рис. Р1.8, *б*).

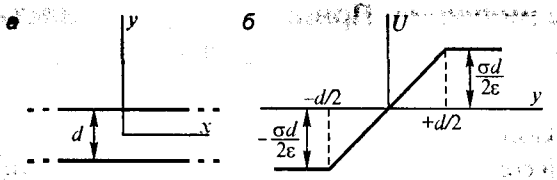


Рис. Р1.8

3. Для нахождения емкости линии выразим напряжение между проводами через линейные плотности τ и $-\tau$ заряда проводов:

$$U_1 - U_2 = \int_R^{D-R} \frac{\tau dr}{2\pi\varepsilon_0 r} - \int_{D-R}^{R} \frac{\tau dr}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\frac{D-R}{R} - \ln\frac{R}{D-R}\right) = \frac{\tau}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D-R}{R}.$$

Такой способ вычисления напряжения оправдан, так как принято допущение о равномерном распределении заряда проводов по окружностям их сечений. В этом случае при расчете потенциала можно рассматривать провода как линейные. Емкость отрезка линии длиной l суть $\frac{C}{l} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{D-R}{R}}$. Погрешность нахождения емкости на основе полученного выражения зависит от соотношения величин R и D: с ростом отношения D/R распределение заряда приближается к равномерному и погрешность нахождения емкости уменьшается. Для заданных значений величин R и D получаем $C \cong 10^{-11}$ Ф/м.

4. Напряженность электрического поля на поверхности внутренней обкладки конденсатора суть $E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon R_i}$. Так как линейная плотность τ заряда связана с напряжением U соотношением $U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{R_e}{R_i}$, то уравнение относительно радиуса R_i принимает вид $E_{\text{пр}} = U\Big/\left(R_i \ln\frac{R_e}{R_i}\right)$, или $R_i \ln\frac{R_e}{R_i} = \frac{U}{E_{\text{пр}}}$, решая которое, получаем $R_i \cong 8\cdot10^{-3}$ м.

6. При отсутствии воздушного зазора допустимое напряжение между обкладками $U = 200\cdot0{,}5 = 100$ кВ. Напряженность электрического поля в воздушном зазоре в ε_r раз превышает напряженность поля в диэлектрике. В этом случае допустимое напряжение оказывается равным $U_2 = 30d_0 + 7{,}5(d - d_0) \cong 4$ кВ, т. е. оно уменьшилось почти в 25 раз. Таким образом, появление дефектов при сборке может привести к значительному ухудшению технических показателей конденсаторов.

8. Наибольшие напряженности электрического поля, достигаемые в точках внутренних поверхностей слоев, равны

$$E_{1\max} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1 R_i},\quad E_{2\max} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2 R_1},\quad \ldots,\quad E_{n\max} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_n R_{n-1}}.$$

Искомые соотношения принимают вид $\varepsilon_1 R_i = \varepsilon_2 R_1 = \varepsilon_3 R_2 = \ldots = \varepsilon_n R_{n-1}$.

1.5. Магнитная индукция. Принцип непрерывности магнитного потока

ВОПРОСЫ

2. Если при движении вдоль некоторой линии магнитной индукции расстояние до соседних линий сохраняется неизменным, то на этой линии имеем $|\boldsymbol{B}| = \text{const}$. В частности, на линиях магнитной индукции прямолинейного весьма длинного провода круглого сечения с током, также как и на линиях магнитной индукции однородного поля, ее модуль сохраняет постоянное значение. В общем случае на линии магнитной индукции $|\boldsymbol{B}| \neq \text{const}$.

5. Магнитный поток сквозь безграничную плоскую поверхность, которую можно рассматривать как замыкающуюся в бесконечности, должен обращаться в нуль в соответствии с принципом непрерывности магнитного потока.

7. Магнитный поток сквозь безграничную плоскость, пересекающую магнит и нормальную к его оси, равен нулю, так что проходящий через сечение магнита поток равен потоку той части плоскости, которая расположена вне магнита.

10. Искомый магнитный поток можно найти из соотношения $\Phi_1 - \Phi_2 = \Phi$, выражающего в рассматриваемом случае принцип непрерывности магнитного потока.

УПРАЖНЕНИЯ

2. Эти потоки равны (см. ответ на вопрос 5).

3. Магнитный поток сквозь поверхность со следом AB превышает в 2 раза поток сквозь поверхность со следом BC.

5. Учитывая, что магнитное поле однородное, получаем $\Phi = \int_S \boldsymbol{B}\,d\mathbf{s} = \frac{\boldsymbol{B}\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|} S \cong 1$ Вб.

1.6. Закон электромагнитной индукции

ВОПРОСЫ

2. В результате действия силы $f = qvB$ на заряженные частицы, они перемещаются в направлении, нормальном векторам скорости и магнитной индукции. Напряженность электрического поля в теле обращается в нуль, ток проводимости в нем не протекает.

3. Электрический ток проводимости протекает при изменении вектора скорости движения тела, т. е. при изменении как значения скорости, так и ее направления, либо при движении тела в неоднородном магнитном поле.

4. Если виток выполнен из непроводящего вещества, то сцепленный с ним поток полностью определяется внешним магнитным полем. При $\gamma \neq 0$ в витке протекает индуцированный электрический ток, создающий собственный магнитный поток самоиндукции. Полный сцепленный с витком магнитный поток равен сумме

этих потоков. С ростом проводимости вещества провода витка доля потока самоиндукции в полном потоке возрастает.

5. Электродвижущая сила направлена по радиусу диска к его оси либо к периферии в зависимости от направления векторов скорости и магнитной индукции. При отсутствии внешней электрической цепи ток в диске не протекает.

7. Входящий в выражение $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ магнитный поток является суммой внешнего магнитного потока $\Phi_в$ и потока самоиндукции $\Phi_с = Li$, обусловленного протекающим в витке индуцированным током i. С учетом этого можем записать уравнение $ri = -\frac{d\Phi_в}{dt} - L\frac{di}{dt}$ в виде $L\frac{di}{dt} + ri = -\frac{d\Phi_в}{dt}$. Если величина $L\frac{di}{dt}$ невелика в сравнении с $\frac{d\Phi_в}{dt}$, то ею пренебрегают, записывая выражение $i(t) = -\frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dt}$, в котором под величиной Ф подразумевают внешний магнитный поток. Это допущение оправдано, если магнитный поток $\Phi_с = Li$ составляет незначительную часть от полного потока, когда, например, электрическая проводимость вещества витка невелика и его ток мал.

8. Магнитный поток самоиндукции, создаваемый индуцируемым током, может быть направлен навстречу внешнему магнитному потоку, но может быть направлен и в ту же сторону, что и внешний магнитный поток. Если внешний магнитный поток возрастает, то поток самоиндукции, препятствуя изменению сцепленного с контуром потока, направлен навстречу внешнему потоку. Если же внешний магнитный поток уменьшается, то поток самоиндукции направлен в ту же сторону, что и внешний магнитный поток.

11. В проводе витка действительно индуцируется электродвижущая сила. Можно, однако, убедиться в том, что в одной части провода витка она имеет направление, противоположное направлению электродвижущей силы в другой его части, так что полная ЭДС обращается в нуль.

УПРАЖНЕНИЯ

3. На движущиеся вместе с пластиной свободные электрические заряды действует со стороны магнитного поля сила, которая приводит к их смещению к сторонам *1*, *2* пластины. ЭДС между сторонами *1*, *2* равна $e = vBh$. Плотности зарядов на сторонах пластины $\sigma = \pm\varepsilon_0 vB$.

4. В диске возникает ЭДС между его осью и любой из точек, перемещающихся в магнитном поле с линейной скоростью $v(r) = \omega r$. ЭДС на элементе диска длиной dr равна $de = Bv\,dr = B\omega r\,dr$. ЭДС между осью диска и точками с радиусом $r = R$ равна $e = \int_0^R B\omega r dr = B\omega\frac{R^2}{2} = \frac{BvR}{2}$.

5. Индуцируемая между щетками ЭДС равна

$$e = \int_{R_1}^{R_2} v(r)B\,dr = \int_{R_1}^{R_2} \omega r B\,dr = \frac{\pi n}{60}B(R_2^2 - R_1^2),$$

ток в резисторе

$$i = \frac{e}{R + R_0} = \frac{\pi n B}{60(R + R_0)}(R_2^2 - R_1^2)$$

и искомая мощность

$$P = i^2 R = \frac{\pi^2 n^2 B^2}{3600(R + R_0)^2} \cdot R(R_2^2 - R_1^2)^2.$$

При подстановке численных значений получаем $P \approx 0{,}1$ Вт.

ЗАДАЧИ

1. При подсоединении измерительных проводов вольтметра к точкам *a*, *b* его показание будет зависеть от расположения проводов и вольтметра в пространстве, так как измерительный контур охватывает магнитный поток, зависящий от площади контура и от способа его размещения в магнитном поле линии (рис. Р1.9, *а*). Если разместить провода вдоль отрезка *ab* и подвести их бифиляром (т. е. свитыми) к вольтметру (положение *1*), то такой измерительный контур охватит магнитный поток сквозь заштрихованную на рисунке область. Это так называемый внутренний магнитный поток, замыкающийся внутри провода линии.

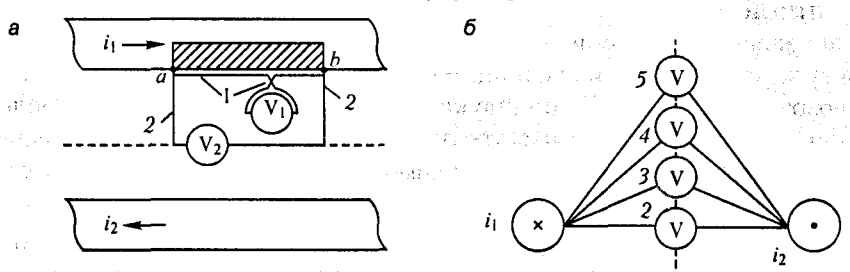


Рис. Р1.9

Однако измерительный контур должен охватить не только внутренний, но и весь внешний поток линии, что достигается при размещении измерительных проводов вдоль пути *2*. Их положение не является единственным, в чем можно убедиться, рассматривая сечение линии (рис. Р1.9, *б*). При любом из положений (*2*, *3*, *4*, *5*) измерительных проводов контур охватывает не только внутренний магнитный поток, но и весь внешний магнитный поток, сцепленный с каждым проводом линии.

3. Магнитная индукция в месте расположения провода изменяется по закону $B = B_m \sin \omega t$, так что индуцируемая в проводе ЭДС равна $e = Blv = \omega RlB_m \sin \omega t$. ЭДС, индуцируемая в проводе, смещенном к первому проводу на угол α, равна $e = \omega RlB_m \sin(\omega t + \alpha)$, так что ЭДС в контуре, образованном этими проводниками $e = \omega RlB_m [\sin(\omega t + \alpha) - \sin \omega t]$. В соответствии с формулировкой закона электромагнитной индукции, данной Максвеллом, ЭДС в контуре

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{\alpha}^{0} l \cdot B_m \sin(\omega t + \varphi) R d\varphi = \omega RlB_m [\sin(\omega t + \alpha) - \sin \omega t].$$

Индуцируемая в контуре ЭДС достигает наибольшей амплитуды, если его стороны сдвинуты на угол $\alpha = \pi$, т. е. когда провода контура опираются на диаметр статора. ЭДС минимальна при $\alpha = 0$. При размещении проводов контура в пазах статора индуцируемая в нем ЭДС сохраняется той же, так как сцепленный с ним магнитный поток, как и скорость его изменения, сохраняются теми же.

1.7. Индуктивность и взаимная индуктивность

ВОПРОСЫ

2. Если две катушки с индуктивностями L_1 и L_2 не связаны взаимноиндуктивно, то при их последовательном соединении получаем $L = L_1 + L_2$. При наличии взаимной индукции и последовательном соединении катушек значение L может быть как больше, так и меньше значения $L_1 + L_2$, что определяется знаком взаимной индуктивности.

3. Если катушка намотана проводом из немагнитного материала, то ее индуктивность не зависит от тока. При использовании провода из ферромагнитного материала индуктивность катушки зависит от протекающего по ней тока.

4. В условии ненасыщенного состояния материала сердечника его магнитная проницаемость велика, магнитный поток, сцепленный с катушкой, также велик и индуктивность катушки оказывается большей, чем при насыщении материала сердечника, когда его магнитная проницаемость уменьшается.

5. Чем плотнее уложены витки (шаг намотки при этом мал), тем больше индуктивность катушки, так как линии магнитной индукции тока любого витка сцепляются с большим числом витков при их плотной укладке.

7. Внесение сердечника из проводящего немагнитного материала в окно катушки с постоянным током не изменяет ее индуктивности, так как сцепленный с ней магнитный поток при этом не изменяется. Если ток катушки переменный, то ее индуктивность при внесении такого сердечника уменьшится, так как индуцируемые в нем токи ослабляют магнитное поле катушки. Этот эффект проявляется резче при увеличении частоты изменения тока и удельной электрической проводимости вещества сердечника.

9. Магнитный поток, сцепленный с отрезком соленоида длиной l, равен

$$\Psi = \frac{\mu_0 i w^2 s}{l} = \frac{\mu_0 i w^2 \pi R^2}{l},$$ где R — радиус соленоида.

Его индуктивность $L = \frac{\Psi}{i} = \frac{1}{l}\mu_0 w^2 \pi R^2$ пропорциональна квадрату радиуса.

11. При совмещении двух одинаковых контуров поток самоиндукции каждого контура равен потоку взаимной индукции, в связи с чем наибольшее значение взаимной индуктивности получается равным индуктивности каждого из контуров. В этом случае величина $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$, называемая коэффициентом связи, принимает наибольшее значение, равное 1.

УПРАЖНЕНИЯ

2. Величины $L_{\text{п}} = \dfrac{U_m}{\omega I_m}$, $L_{\text{т}} = \dfrac{\sqrt{U_m^2 - I_m^2 r^2}}{\omega I_m}$ определяют приближенное и точное значения индуктивности. Погрешность определения индуктивности $\chi = \dfrac{L_{\text{п}} - L_{\text{т}}}{L_{\text{т}}}$ принимает после подстановки величин $L_{\text{п}}$, $L_{\text{т}}$ вид: $\chi = \left[\left(\dfrac{\omega L_{\text{т}}}{r}\right)^{-2} + 1\right]^{0,5} - 1$. Как видно, она уменьшается с ростом величины $\dfrac{\omega L_{\text{т}}}{r}$.

6. Допущение о бесконечно малом сечении провода с конечным током приводит к бесконечно большой плотности тока провода и бесконечно большой напряженности магнитного поля на его оси. Действительно, вблизи бесконечно тонкого провода напряженность магнитного поля пропорциональна величине $1/r$, стремящейся к бесконечности при $r \to 0$. Магнитный поток, сцепленный с бесконечно тонким проводом с током i, обращается также в бесконечность, так как величина $\Psi = \mu_0 l \int_0^{R_0} \dfrac{i dr}{2\pi r} = \dfrac{\mu_0 l i}{2\pi} \ln r \Big|_0^{R_0}$ равна бесконечности при подстановке нижнего предела интеграла (здесь l — элемент длины провода). Поэтому индуктивность проводов либо контуров, составленных из проводов с бесконечно малым сечением, не имеет смысла.

Рассматривая уединенный прямолинейный провод конечного сечения радиусом R, также можем придти к заключению, что его индуктивность не имеет смысла, так как выражающий сцепленный с проводом магнитный поток интеграл $\Phi = \mu_0 l \int_R^{\infty} \dfrac{i dr}{2\pi r} = \dfrac{\mu_0 l i}{2\pi} \ln r \Big|_R^{\infty}$ обращается в бесконечность. Это связано с физически необоснованным допущением об отсутствии обратного тока и возможностью протекания тока только в одном направлении.

9. Ток в кольце будет изменяться так, чтобы сцепленный с кольцом в начальный момент времени магнитный поток сохранял свое значение постоянным. Например, при уменьшении внешнего магнитного поля по линейному закону $B(t) = B_0 - B_0 t/t_0$ (вариант *г*) ток в кольце будет нарастать по закону $i(t) = kt$ $(0 < t < t_0,\ k = \text{const})$.

11. При деформации кольца изменяется его индуктивность и, следовательно, должен изменяться ток i, так как сцепленный с кольцом магнитный поток $\Phi = Li$ сохраняет свое значение неизменным. Увеличению тока в 1,5 раза соответствует уменьшение индуктивности кольца также в 1,5 раза.

13. Так как виток сохраняет сцепленный первоначально с ним магнитный поток $\Phi = Li$ неизменным, то из уравнения $Li_1 = Li \pm B_0 S \cos\alpha$ находим $i_1 = i \pm L^{-1} B_0 S \cos\alpha$. При согласно направленных потоках Φ и $B_0 S \cos\alpha$ в последнем выражении сле-

дует принять знак «минус». Как видно, в этом случае ток может изменить свое направление, если выполнено соотношение $B_0 S \cos\alpha > Li$.

15. Магнитный поток сквозь сечение πR_i^2 соленоида, равный $\Phi = \frac{\mu_0 iw}{l}\pi R_i^2$, сохраняет свое значение неизменным после введения сверхпроводящего цилиндра и уменьшения вследствие этого сечения соленоида, через который проходит магнитный поток, до величины $\pi(R_i^2 - R_e^2)$. Искомый ток находим из соотношения $\mu_0 \frac{i_1 w}{l}\pi(R_i^2 - R_e^2) = \mu_0 \frac{iw}{l}\pi R_i^2$; $i_1 = i\frac{R_i^2}{R_i^2 - R_e^2}$.

Если в соленоид вместо сверхпроводящего цилиндра быстро вводить цилиндр, изготовленный из хорошо проводящего вещества, например, из меди, то ток, приняв в начальный момент времени значение i_1, в дальнейшем, по мере проникновения магнитного поля в цилиндр, уменьшится до значения i.

1.8. Потенциальное и вихревое электрические поля

ВОПРОСЫ

5. Индуцируемая в витке ЭДС определяется величиной $e = -\frac{d\Phi}{dt}$, где Φ — сцепленный с витком магнитный поток. Если заключенный в трубчатый ферромагнитный экран виток пронизан таким же, что и без экрана, магнитным потоком, то и индуцируемая в нем ЭДС и ток будут такими же, независимо от того, какова магнитная индукция в точках витка. Магнитная индукция в точках витка становится намного меньше после заключения его в ферромагнитный экран, однако ЭДС витка сохраняется неизменной. Если виток поместить полностью в трубчатый экран, а именно так, чтобы он весь находился в полости экрана, то сцепленный с ним магнитный поток существенно уменьшится и ЭДС также будет значительно меньше.

6. Потенциальная составляющая электрического поля существует как в диэлектрике, окружающем проводящее тело, так и в самом теле вследствие протекания в нем тока и появления напряжения между точками тела из-за конечной удельной электрической проводимости вещества. Так как потенциалы точек поверхности тела различны, то, следовательно, существует потенциальное электрическое поле и его потенциальная составляющая в окружающем тело диэлектрике.

1.9. Связь магнитного поля с электрическим током

УПРАЖНЕНИЯ

4. Вектор магнитной индукции имеет единственную составляющую $B = B_y$ при условии, что лист безграничен в направлениях осей y и z. Охватим лист в плоскости $z = 0$ замкнутым контуром $abcd$, две стороны которого (ab и cd) параллельны листу, а две другие (bc и da) нормальны к нему. Записывая интеграл $\oint \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{l}$, для контура $abcd$ можем получить

$$\oint_l \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{l} = \int_{ab} \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{l} + \int_{bc} \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{l} + \int_{cd} \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{l} + \int_{da} \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{l} = 2\int_{ab} \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{l} = 2B_y \cdot ab,$$

так как интегралы вдоль путей bc и ad равны нулю. Охватываемый контуром $abcd$ ток равен $j \cdot ab$ и поэтому получаем $B_y = \frac{\mu_0}{2} j$. Так как при $x < 0$ имеем $B = -B_y < 0$, а при $x > 0$ $B > B_y$, то при движении вдоль оси x и пересечении листа магнитная индукция претерпевает разрыв, причем ее изменение при $x = 0$ равно $\Delta B_y = \mu_0 j$. Лист с распределенным на нем током носит название поверхностного токового слоя или просто слоя тока.

8. Линейную плотность j тока находим из условия $iw = j2\pi R$, где w — число проводов: $j = \frac{iw}{2\pi R} = \frac{i}{2\pi R}\frac{2\pi R}{d} = \frac{i}{d}$. Поле при $r < R$ отсутствует и $B = 0$. При $r > R$ имеем $H = \frac{iw}{2\pi r}$ и $B = \mu_0 \frac{iw}{2\pi r}$. При $r = R$ магнитная индукция, имеющая единственную касательную к окружности составляющую, претерпевает скачок, равный $\Delta B = \mu_0 \frac{iw}{2\pi R} = \mu_0 j$.

9. Анализируя магнитное поле на линии $\alpha = 0$, можем убедиться в том, что вектор $\boldsymbol{B}$ магнитной индукции имеет единственную составляющую. Эта составляющая равна $B_e = \frac{\mu_0 j_m R^2}{2r^2}$ при $r > R$ и $B_i = -\frac{\mu_0 j_m}{2}$ при $r < R$.

Таким образом, при переходе через точку $r = R$ при $\alpha = 0$ касательная к окружности $r = R$ составляющая магнитной индукции имеет скачок $\Delta B = B_e - B_i = \mu_0 j_m$. Вычисления показывают, что магнитное поле при $r < R_i$ является однородным с индукцией $B = \frac{\mu_0 j_m}{2}$.

11. Ток провода $i_п$ создает в сердечнике магнитное поле напряженностью

$$H_i = \frac{i_п}{2\pi r} \quad (R_1 \le r \le R_2).$$

Поток, сцепленный с катушкой, равен

$$\Psi_{кп} = w\Phi = w\mu h \frac{i_п}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \mu w h \frac{i_п}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1} \text{ и } M_{кп} = \frac{\Psi_{кп}}{i_п} = \frac{\mu w h}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

Для расчета магнитного потока, сцепленного с проводом, задаем ток i катушки и находим магнитный поток, замыкающийся по сердечнику:

$$\Psi_п = \int_{R_1}^{R_2}\mu H h dr = \int_{R_1}^{R_2}\mu \frac{i_к w}{2\pi r} h dr = \mu w h \frac{i_к}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

Как видно, взаимная индуктивность

$$M_{пк} = \frac{\Psi_{пк}}{i_к} = \frac{\mu w h}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1} = M_{кп} \cong 3{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}.$$

1.10. Намагниченность вещества и закон полного тока

ВОПРОСЫ

1. Справедливы неравенства $B_i > B_0$, $H_i < H_0$.

5. Значения интеграла $\oint_l \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{l}$, вычисляемые вдоль этих путей, различны: вдоль контура, пересекающего тело, он равен $\mu_0 i + \mu_0 \oint_l \boldsymbol{M}\,d\boldsymbol{l}$, тогда как вдоль контура, не пересекающего тело — $\oint_l \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{l} = \mu_0 i$. В соответствии с законом полного тока значения интеграла $\oint_l \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l}$, вычисляемого вдоль двух контуров, одинаковы.

6. В точках $r > R$ напряженность магнитного поля $H = i/2\pi r$ сохраняется неизменной независимо от того, охвачен провод с током i ферромагнитной трубой или нет. Таким образом, изолированный ферромагнитный цилиндр, охватывающий провод, не может служить экраном для магнитного поля. Во всех точках, не принадлежащих ферромагнитному цилиндру, магнитное поле не изменится, если цилиндр удалить.

7. Напряженность магнитного поля в среде, магнитная проницаемость которой принята бесконечно большой, обращается в нуль. При этом магнитная индукция принимает конечное значение и магнитный поток, проходящий внутри тела с бесконечно большой магнитной проницаемостью, будет конечным.

Удобное во многих приложениях допущение о бесконечной магнитной проницаемости вещества, упрощающее расчет поля, можно принять не всегда. Так, например, нельзя принять допущение о бесконечно большой проницаемости вещества трубчатого ферромагнитного цилиндра, соосного с прямолинейным проводом с током (см. вопрос 6). В соответствии с законом полного тока напряженность магнитного поля в стенке трубы $H = i/2\pi R$ не равна нулю при любом значении магнитной проницаемости вещества трубы. Поэтому при допущении $\mu = \infty$ получаем бесконечно большими как магнитную индукцию в стенке трубы, так и магнитный поток в ней.

12. Нет, не следует. Это следует из закона электромагнитной индукции.

УПРАЖНЕНИЯ

3. Напряженность магнитного поля $H = iw/l$ сохраняется неизменной после введения сердечника, поэтому в сердечнике получаем магнитную индукцию $B_c = \mu H = \mu iw/l$ и намагниченность $M = B/\mu_0 - H = iw(\mu/\mu_0 - 1)/l$. Обозначив сечения соленоида и сердечника через s_0 и s_c, запишем индуктивность соленоида длиной l (см. ответ на вопрос 9, с. 383) $L_0 = \mu_0 w^2 s_0/l$, $L_1 = \mu_0 w^2 (s_0 - s_c)/l + \mu w^2 s_c/l$. Из соотношения $L_1/L_0 = n$ получаем $s_c/s_0 = (n-1)/(\mu/\mu_0 - 1)$.

4. Так как стержень намагничен однородно, то его магнитный момент равен $m = MV$, где $V = sl$ — объем стержня. Ток соленоида i_0, эквивалентный элементарным токам намагниченного стержня, и создающий такой же магнитный момент, равен $i_0 = \dfrac{MV}{s} = Ml$. Он распределен равномерно по длине l стержня так, что линейная плотность $j = \dfrac{i_0}{l}$ постоянна. Во всех точках вне стержня магнитная

индукция тока i_0 и намагниченного стержня совпадают. Также совпадают и напряженности их магнитных полей. В то же время в точках объема стержня и в соответствующих точках соленоида напряженность магнитного поля различна, тогда как магнитная индукция одинакова. Таким образом, поля вектора магнитной индукции намагниченного стержня и соленоида с током совпадают во всем пространстве, тогда как поля вектора напряженности магнитного поля совпадают только в точках вне стержня.

5. Представим намагниченный цилиндр в виде набора бесконечно длинных пластин прямоугольным сечением каждая (рис. Р1.10). Токи, эквивалентные каждой из однородно намагниченных пластин, протекают по линиям a_1b_1, c_1d_1, а также a_2b_2, c_2d_2, a_3b_3, c_3d_3 и т. д. в направлениях, параллельных оси z цилиндра. Токи и их линейные плотности связаны с намагниченностью M цилиндра соотношениями $i_1 = \pm M \cdot a_1b_1$, $i_2 = \pm M \cdot a_2b_2$, ..., $j_1 = \pm M$, $j_2 = \pm M$ и т. д. Уменьшая толщину каждой из пластин и переходя к пределу при $a_nb_n \to 0$, получим, что линейная плотность поверхностного тока, распределенного по контуру сечения цилиндра, равна $j = \pm M_t$, где M_t — касательная к контуру составляющая вектора намагниченности вещества цилиндра. При $x > 0$ имеем $j = +M_t > 0$, а при $x < 0$: $j = -M_t < 0$.

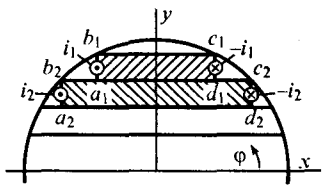


Рис. Р1.10

При $r > R$ поля векторов магнитной индукции (а также напряженности магнитного поля) намагниченного цилиндра и токов плотностью $j = \pm M_t$ совпадают, однако, при $r < R$ совпадают только поля вектора магнитной индукции, тогда как поля вектора напряженности магнитного поля различны.

6. Подобно решению предыдущей задачи разбиваем намагниченный шар на совокупность дисков толщинами a_1b_1, a_2b_2 и т. д., каждому из которых ставим в соответствие эквивалентный контур с током линейной плотностью $j(\varphi) = M_\varphi(\varphi)$, не зависящей от угла θ сферической системы координат ρ, θ, φ. Так как $M_\varphi(\varphi) = M\cos\varphi$, то $j(\varphi) = M\cos\varphi$, если принять $\varphi = \pi/2$ при $y = R$.

10. С учетом заданных условий можем утверждать, что линии напряженности магнитного поля внутри и вне пластины параллельны ее длинным сторонам и в принятой системе координат имеют единственную составляющую H_x. Для нахождения поля внутри пластины вычисляем интеграл $\oint \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l}$ по контуру $abcd$ (рис. Р1.11): $\oint \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = \int_{bc} \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} + \int_{da} \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = 2H(y)bc$. Здесь интегралы по отрезкам ab и cd обращаются в нуль, так как в точках этих отрезков векторы $\boldsymbol{H}$ и $d\boldsymbol{l}$ взаимно перпендикулярны. Учитывая, что ток сквозь сечение, ограниченное контуром $abcd$, равен $J2ybc$, находим: $H(y) = Jy = iy/\Delta h$, где J — плотность тока в пластине. Для нахождения напряженности магнитного поля в точках вне пластины выбираем контур $ABCD$ и, выполняя аналогичные преобразования, получаем выражение $H = J\Delta/2 = i/2h$. Таким образом, магнитное поле изменяется по линейному закону внутри пластины и сохраняется постоянным вне ее.

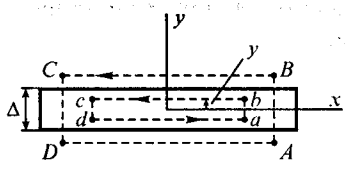


Рис. Р1.11

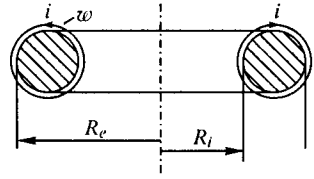


Рис. Р1.12

16. Напряженность магнитного поля принимает наибольшие значения в точках окружности $r = R_i$, а наименьшие — в точках окружности $r = R_e$ (рис. Р1.12). Учитывая, что на каждой из окружностей в силу симметрии напряженность магнитного поля постоянна, из уравнения $\oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = iw$ получаем: $H_i = iw/2\pi R_i$, $H_e = iw/2\pi R_e$.

2.1. Энергия системы заряженных тел. Энергия контуров с токами

ВОПРОСЫ

3. При сближении тел возрастает емкость между ними, в связи с чем при постоянстве разности их потенциалов энергия электрического поля, равная $0{,}5Cu^2$, также возрастает.

4. Энергия электрического поля, равная $0{,}5q_1U_1 + 0{,}5q_2U_2$ возрастает, так как потенциалы тел при их сближении увеличиваются.

6. Емкость между проводами увеличивается, в связи с чем увеличивается и энергия электрического поля линии.

9. Электрические поля вне шаров совпадают, однако внутри их они различны: внутри проводящего шара оно отсутствует, тогда как внутри шара с распределенным зарядом оно отлично от нуля. Поэтому энергия электрического поля объемно заряженного шара превышает энергию электрического поля проводящего шара на величину, равную

$$\Delta W_э = 0{,}5\varepsilon\int_0^R E^2(r)4\pi r^2 dr = 0{,}5\,\varepsilon\int_0^R \frac{4\pi\rho^2 r^4}{9\varepsilon^2}\,dr = \frac{2}{45\varepsilon}\rho^2 R^5\pi.$$

15. Одна из причин более широкого распространения машин, использующих магнитные, а не электрические поля, заключается в том, что плотность энергии $W'_м$ магнитного поля значительно превышает достижимую на практике плотность энергии $W'_э$ электрического поля. Отношение $W'_м / W'_э$ оказывается равным $\left(\frac{B}{E}\right)^2 \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$ и, например, при $B = 1$ Тл, $E = 3\cdot10^6$ В/ м составляет 10^4.

УПРАЖНЕНИЯ

5. Энергия магнитного поля катушек равна $W_м = \sum_{k=1}^{3}\frac{\Psi_k i_k}{2}$. Подставляя численные значения, получаем $\Psi_1 = L_1 i_1 + M_{12} i_2 + M_{13} i_3 = 2\cdot10^{-3}$ Вб; $\Psi_2 = 2{,}36\cdot10^{-3}$ Вб; $\Psi_3 = 1{,}26\cdot10^{-3}$ Вб; $W_м = 2{,}81\cdot10^{-3}$ Дж.

9. Средние значения магнитной индукции в продольном $B_{||}$ и поперечном $B_{\perp}$ направлениях равны

$$B_{||\,\mathrm{ср}} = \frac{\Phi_{||}}{S_{||}} = \frac{F_{||}}{S_{||}R_{\mathrm{м}||}} = \frac{1}{(d+\Delta)}\left(\frac{F_{||}}{(d+\Delta)/\mu d} + \frac{F_{||}}{(d+\Delta)/\mu_0\Delta}\right) = \frac{F_{||}}{(d+\Delta)^2}(\mu d + \mu_0\Delta),$$

$$B_{\perp\mathrm{ср}} = \frac{\Phi_{\perp}}{S_{\perp}} = \frac{F_{\perp}}{S_{\perp}R_{\mathrm{м}\perp}} = \frac{F_{\perp}}{(d+\Delta)\left[\dfrac{d}{\mu(d+\Delta)} + \dfrac{\Delta}{\mu_0(d+\Delta)}\right]} = \frac{F_{\perp}\mu\mu_0}{\mu_0 d + \mu\Delta},$$

так что $\dfrac{B_{||\mathrm{ср}}}{B_{\perp\mathrm{ср}}} = \dfrac{(\mu d + \mu_0\Delta)(\mu_0 d + \mu\Delta)}{\mu\mu_0(d+\Delta)^2}$. Это отношение равно 1 при $d = 0$ либо при $\Delta = 0$. При $d \neq 0$, $\Delta \neq 0$ имеем $\dfrac{B_{||\mathrm{ср}}}{B_{\perp\mathrm{ср}}} > 1$.

11. Тепловая энергия, выделяемая в резисторе, выражается интегралом $\int_0^\infty i^2(t)r dt = \dfrac{U^2}{r}\int_0^\infty \exp\left(-\dfrac{2t}{rC}\right)dt = 0{,}5CU^2$. Учитывая, что запасенная энергия электрического поля в конденсаторе равна $0{,}5CU^2$, получаем искомое отношение, которое оказывается равным 1 и сохраняется постоянным при изменении величин C или r. Это отношение показывает, что коэффициент полезного действия работы источника при зарядке конденсатора равен 0,5, так как ровно половина поступающей от источника энергии преобразуется в тепловую и безвозвратно теряется в резисторе.

12. Магнитное поле при $r < R$ однородное с индукцией $B = \dfrac{\mu_0 j_m}{2}$ (см. упр. 9, с. 386). Трубка магнитной индукции, имеющая координату x (рис. Р2.1), охватывает не весь ток обмотки $i = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} j_m R\cos\alpha\, d\alpha = 2j_m R$, а лишь его часть $i_1 = \int_{-\alpha}^{\alpha} j_m R\cos\alpha\, d\alpha = 2j_m R\sin\alpha = 2j_m\sqrt{R^2 - x^2}$.

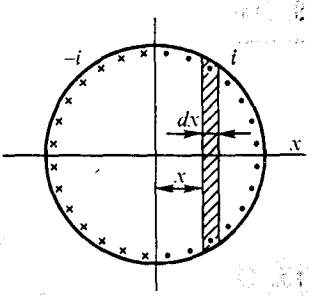


Рис. Р2.1

Магнитный поток трубки $d\Phi = BdS = \dfrac{\mu_0 j_m l}{2}dx$, сцепленный с током i_1, образует часть потокосцепления обмотки, равную $d\Psi = \dfrac{i_1}{i}d\Phi = \dfrac{\mu_0 j_m l}{2R}\sqrt{R^2 - x^2}\,dx$. Полное потокосцепление с обмоткой получаем равным $\Psi = 2\int_0^R d\Psi = \dfrac{\mu_0 l j_m \pi R}{4}$ и искомая индуктивность обмотки $L = \dfrac{\Psi}{i} = \dfrac{\mu_0\pi l}{8}$.

Энергия магнитного поля равна $W_{\mathrm{м}} = \dfrac{Li^2}{2} = \dfrac{\mu_0\pi R^2 l}{4}j_m^2$.

13. Отсчитывая координату y влево от дна паза (рис. Р2.2) и используя закон полного тока, находим $H = H(y)$:

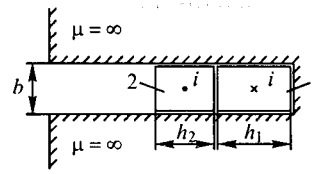


Рис. Р2.2

$$H = \frac{i}{bh_1} \cdot y \quad \text{при} \quad 0 \le y \le h_1,$$

$$H = \frac{i}{bh_2}(h_1 + h_2 - y) \quad \text{при} \quad h_1 \le y \le h_1 + h_2.$$

Подставляя в выражение $W_м = \int\limits_V \frac{BH}{2} dV = \mu_0 lb \frac{1}{2} \int\limits_0^{h_1+h_2} H^2 dy$, где l — длина паза в направлении, нормальном плоскости рисунка, найденные величины $H(y)$, находим:

$$W_м = \frac{\mu_0 i^2}{6b}(h_1 + h_2)l, \qquad L = \frac{2W_м}{i^2} = \frac{\mu_0(h_1 + h_2)}{3b} l.$$

2.2. Силы, действующие на заряженные тела. Электромагнитная сила

ВОПРОСЫ

2. На поверхности незаряженного проводящего тела возникает индуцированный заряд, знак которого противоположен знаку заряда тела, в результате чего на тела действует сила взаимного притяжения.

3. Внесение проводящей незаряженной частицы в электрическое поле приводит к уменьшению энергии последнего, так как наводимые на поверхности частицы электрические заряды создают внутри ее поле, компенсирующее внешнее электрическое поле. Так как механическая сила стремится уменьшить энергию электрического поля, то она действует на частицу в направлении более сильного внешнего поля.

4. При внесении проводящей частицы в область между обкладками конденсатора однородность поля нарушается, причем более сильное электрическое поле образуется с той стороны частицы, которая расположена ближе к пластине. В сторону этой пластины и будет направлена механическая сила, действующая на частицу. Если сферическую частицу поместить на одинаковом расстоянии от пластин, то равнодействующая на нее механическая сила равна нулю. Частица находится в состоянии неустойчивого равновесия, так что при малом смещении в направлении одной или другой пластины результирующая сила будет действовать в направлении смещения.

5. Частицы пыли перемещаются в сторону более сильного поля, т. е. к нити, напряженность поля вблизи которой превышает напряженность поля на внутренней поверхности трубы, имеющей больший радиус.

6. Так как конденсатор отключен от источника, то энергия его электрического поля уменьшается при малом перемещении границы раздела слоев под действием силы. Энергия электрического поля $W_э = 0{,}5q^2/C$ конденсатора уменьшается при

увеличении емкости, что происходит при малом перемещении границы раздела слоев в сторону слоя с меньшей диэлектрической проницаемостью. Таким образом, сила направлена в сторону слоя с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$.

7. Направление действия силы при подключенном к конденсатору источнике сохранится тем же.

10. Под действием электромагнитной силы виток деформируется так, что увеличивается охватываемая им площадь. Таким образом, контур стремится принять форму круга.

14. Электромагнитная сила на виток со стороны тока провода не действует, так как в любой точке витка направления векторов магнитной индукции, созданной током провода, и плотности тока витка совпадают.

15. При расположении частиц вдоль линии напряженности поля (рис. Р2.3) вид поля между частицами и с их внешних сторон различен: поле имеет большую напряженность в области между частицами, в этой же области неоднородность поля увеличивается. Поэтому действующие на частицы механические силы притягивают частицы друг к другу. При произвольном относительно линии напряженности поля начальном расположении частиц они будут стремиться занять положение, указанное на рисунке.

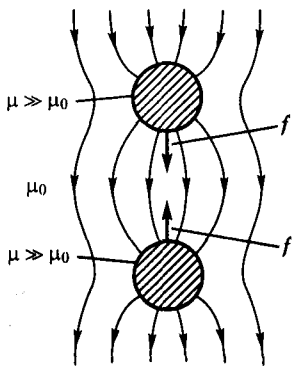


Рис. Р2.3

17. Токи i_1, i_2 соленоидов должны создавать внутри соленоида с меньшим радиусом магнитные поля противоположных направлений. Тогда при $i_1 w_1 - i_2 w_2 = i_2 w_2$ магнитные индукции при $0 < r < R_1$ и $R_1 < r < R_2$ равны и направлены в противоположные стороны, так что соленоид радиусом R_1 не испытывает действие электромагнитной силы.

УПРАЖНЕНИЯ

5. При малом перемещении dg поверхности S, происходящем под действием силы f, энергия электрического поля изменяется на величину

$$dW_э = \frac{D_1^2}{2\varepsilon_1} S dg - \frac{D_2^2}{2\varepsilon_2} S dg = \frac{D^2 S}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) dg,$$

где $D_1 = D_2 = D$, при условии, что электрическое поле создается электрическими зарядами, сохраняющими постоянное значение при перемещении dg поверхности S.

Таким образом,

$$f = -\frac{dW_э}{dg} = \frac{D^2 S}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)$$

и сила f', действующая на единицу поверхности, равна

$$f' = \frac{f}{S} = \frac{D^2}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right).$$

При $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ сила направлена в сторону перемещения поверхности, т. е. в направлении среды с меньшим значением диэлектрической проницаемости. Как видно, сила f' численно равна разности объемных плотностей энергии электрического поля по обе стороны поверхности S раздела сред с различными диэлектрическими проницаемостями.

6. Так как емкость двухслойного конденсатора выражается формулой

$$C = \frac{S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}},$$

то силы, действующие на единицы площади пластин, примыкающих к диэлектрику с проницаемостью ε_1, ε_2, равны:

$$f_1' = \frac{f_1}{S} = \frac{C^2u^2}{2S^2}\frac{1}{\varepsilon_1},\quad f_2' = \frac{f_2}{S} = \frac{C^2u^2}{2S^2}\frac{1}{\varepsilon_2}.$$

Давление на границу раздела находим, используя решение предыдущей задачи:

$$f_г' = \frac{D^2}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) = \frac{C^2u^2}{2S^2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right).$$

Сопоставление выражений для f_1', f_2' и $f_г'$ позволяет записать соотношение между ними: $f_2' - f_1' = f_г'$.

7. Так как емкость конденсатора определяется выражением

$$C = \frac{\varepsilon_1 S_1}{d} + \frac{\varepsilon_2 S_2}{d} = \frac{l_0}{d}[\varepsilon_1 l_1 + \varepsilon_2(l - l_1)],$$

где l_0 —длина конденсатора в направлении, нормальном плоскости рисунка (см. рис. В2.4), то искомое давление

$$f' = \frac{f}{dl_0} = \frac{u^2}{2dl_0}\frac{dC}{dl_1} = \frac{E^2}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \left(\frac{ED}{2}\right)_1 - \left(\frac{ED}{2}\right)_2.$$

13. Электромагнитную силу рассчитаем двумя способами. Сила, действующая на ближнюю к проводу параллельную ему сторону $f_1 = Bai_1 = \mu_0 a i i_1/2\pi d$, так что полная сила, стремящаяся переместить рамку, равна

$$f = \frac{\mu_0 a i i_1}{2\pi d} - \frac{\mu_0 a i i_1}{2\pi(d+b)} = \frac{\mu_0 a i i_1 b}{2\pi d(d+b)}.$$

Полную силу определим также другим способом:

$$f = \left(\frac{\partial W_м}{\partial g}\right)_{i,\, i_1 = \text{const}} = \left(i_1\frac{\partial \Psi_м}{\partial g}\right)_{i,\, i_1 = \text{const}},$$

что приводит к полученному выше выражению. Подставляя численные значения, получаем $f \cong 1{,}3 \cdot 10^{-4}$ Н.

14. Используя для расчета сил выражение $f = \frac{i^2}{2}\cdot\frac{dL}{dg}$, находим

$$f_r = -\frac{\mu_0 i^2 R}{2r},\ f_R = \frac{i^2}{2}\left[\mu_0\left(\ln\frac{8R}{r} - 2\right) + \mu_0 + \frac{\mu}{4}\right].$$

Для заданных численных значений получаем: *а*) при магнитной проницаемости вещества провода, равной μ_0, $f_r = -8\cdot10^{-3}$ Н, $f_R = 1{,}2\cdot10^{-3}$ Н, *б*) при магнитной проницаемости вещества провода, равной $500\mu_0$, $f_r = -8\cdot10^{-3}$ Н, $f_R = 3{,}26\cdot10^{-2}$ Н.

Так как сила f_R положительна, то под ее действием виток стремится увеличить радиус R. Обобщенная сила f_r отрицательна, поэтому на провод витка действуют также сжимающие его силы.

16. Сжимающую проводник электромагнитную силу, действующую на единицу его поверхности, рассчитываем, используя выражение $f' = W'_м = 0{,}5\mu_0 H^2$, где H — напряженность магнитного поля на поверхности проводника, равная $i/2\pi R$. Из соотношения $\mu_0 i^2/8\pi^2R^2 = \sigma$ находим искомый ток: $i = 2\sqrt{2}\pi R\sqrt{\frac{\sigma}{\mu_0}}$. Подставляя заданные численные значения, получаем $i \cong 1{,}2\cdot10^5$ А.

17. Магнитное поле внутри бесконечно длинного соленоида является однородным напряженностью $H = \frac{iw}{l} = iw'$. Магнитный поток, проходящий через сечение $S = \pi R^2$ соленоида, равен $\Phi = \mu_0 iw'\cdot\pi R^2$, так что индуктивность соленоида на единицу длины суть $L = \frac{\Psi}{i} = \frac{w'\mu_0 iw'\pi R^2}{i} = \mu_0 w'^2\pi R^2$. Электромагнитную силу, стремящуюся изменить радиус R соленоида, находим по формуле

$$f = \frac{dW_м}{dR},\ \text{где}\ W_м = \frac{Li^2}{2} = \frac{1}{2}\mu_0\pi w'^2R^2i^2;\ f = \mu_0\pi w'^2Ri^2.$$

21. Действующие на поверхности сердечника в зазоре электромагнитные силы можно рассчитать с помощью выражения $f'_s = 0{,}5\mu_0 H_\Delta^2$, где H_Δ — напряженность магнитного поля, являющаяся функцией положения точки в зазоре. Учитывая малость зазора ($\Delta \ll 2\pi R_{ср}$), считаем, что напряженность магнитного поля зависит только от радиальной координаты r точки. Так как по условию следует найти электромагнитную силу при $r = R_{ср}$, то рассчитаем напряженность магнитного поля в зазоре при $r = R_{ср}$. Учитывая, что напряженность магнитного поля H_Δ в зазоре и в сердечнике $H_с$ связаны соотношением $H_с = \mu_r^{-1}H_\Delta$, и записывая уравнение $\oint \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = iw$ для кругового контура радиусом R, охватывающего обмотку, получаем: $H_с(2\pi R_{ср} - \Delta) + H_\Delta\Delta = iw$, откуда находим величины

$$H_\Delta = \frac{iw\mu_r}{2\pi R_{ср} - \Delta + \Delta\cdot\mu_r}\ \text{и}\ f'_s = 0{,}5\mu_0\left(\frac{iw\mu_r}{2\pi R_{ср} - \Delta + \Delta\cdot\mu_r}\right)^2.$$

Подставляя заданные численные значения, получаем $f = 1{,}1\cdot10^4$ Н/м^2.

ЗАДАЧИ

1. Магнитное поле в воздухе сохранится тем же при замене ферромагнитного тела на среду с магнитной проницаемостью μ_0 и размещении воображаемого прямолинейного весьма длинного немагнитного провода с током того же направления и величины, что и заданный, в точке A (рис. Р2.4)

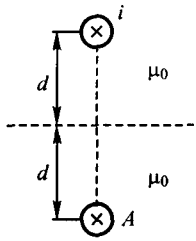


Рис. Р2.4

Искомая электромагнитная сила, действующая на единицу длины провода, равна $f = B \cdot i = \dfrac{\mu_0 i^2}{4\pi d} = 2$ Н/м.

3. Разместим начало прямоугольной системы координат в центре пластины, направив оси x, y, z как указано на рис. Р2.5.

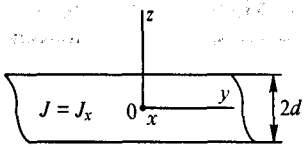


Рис. Р2.5

Магнитное поле тока пластины характеризуется единственной составляющей $H_y(z)$ напряженности, равной, в соответствии с законом полного тока,

$$H_y = -J{\cdot}z \text{ при } |z| \le d,$$

$$H_y = -J{\cdot}d \text{ при } z \ge d,$$

$$H_y = J{\cdot}d \text{ при } z \le -d.$$

Электромагнитная сила, действующая на единичный объем пластины, суть $f_z = J{\cdot}B_y = -\mu_0 J^2 z$. Полная сила, сжимающая объем $\Delta V = 2d{\cdot}\Delta x \Delta y$ пластины, равна $F_z = 2\int_0^d |f_z|\, dz = \mu_0 J^2{\cdot}d^2$. При переходе к бесконечно тонкой пластине имеем $\lim\limits_{\substack{d\to 0\\ J\to\infty}} J \cdot d = j$, так что сжимающая пластину электромагнитная сила, приходящаяся на единицу ее поверхности $\Delta x \Delta y$, равна $F_z = \mu_0 j^2$.

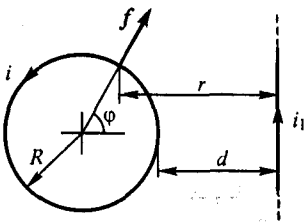


Рис. Р2.6

4. Магнитная индукция в точках контура, обусловленная током провода (рис. Р2.6), равна

$$B = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi(R + d - R\cos\varphi)}.$$

Электромагнитная сила, действующая на единицу длины $Rd\varphi$ контура, направлена при указанных направлениях токов i и i_1 по радиусу от центра контура и равна

$$dF_r = \frac{\mu_0 i i_1 R\, d\varphi}{2\pi(R + d - R\cos\varphi)}.$$

5. Однородное магнитное поле с индукцией $B = \dfrac{\mu_0 j_{cm}}{2}$, созданное током статора, имеет в области $0 < r < R_c$ радиальную составляющую $B_r = -\dfrac{\mu_0 j_{cm}}{2} \sin\alpha$. Каса-

тельная к поверхности ротора составляющая электромагнитной силы $f_t = j_{pz}B_r = -j_{pm}\cos(\alpha + \varphi)\frac{\mu_0 j_{cm}}{2}\sin\alpha$ создает вращающий момент

$$M_{вр} = 2\int_0^{\pi} f_t R_p d\alpha = \mu_0 R_p j_{pm} j_{cm} \pi \sin\varphi.$$

Как видно, наибольший вращающий момент достигается при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, наименьший при $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

При $\varphi = 0, \pi$ вращающий момент обращается в нуль.

6. Магнитное поле в воздухе не изменится, если, устранив идеальную ферромагнитную среду, перейти к однородной с магнитной проницаемостью $\mu = \mu_0$, разместив дополнительно к заданному три провода с токами, направления которых указаны на рис. Р2.7. Действующая на провод электромагнитная сила $f = Bli$, с учетом того, что магнитная индукция в месте расположения заданного провода

$$B = \sqrt{\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi\cdot 2h}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi\cdot 2h}\right)^2} + \frac{\mu_0 i}{2\pi\cdot 2h\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}\,\mu_0 i}{8\pi h},$$

равна

$$f = \frac{3\sqrt{2}}{8\pi h}\mu_0 i^2 l \cong 4{,}24 l \text{ Н}.$$

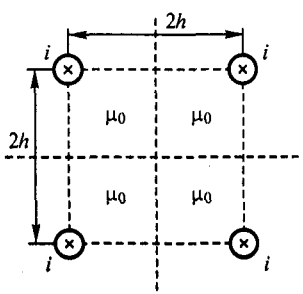


Рис. Р2.7

3.1. Элементы электрических цепей

ВОПРОСЫ

2. При допущении о том, что можно пренебречь ЭДС, индуцированной в контурах измерительной цепи переменным магнитным потоком, создаваемым переменным током цепи, в которой производят измерения.

3. Конденсаторы не содержат, как известно, ферромагнитных элементов, служащих для усиления магнитного поля. Конденсаторы не являются также многовитковыми устройствами. В рабочей зоне конденсатора, т. е. там, где концентрируется электрическое поле, ток протекает между его пластинами. Поэтому влияние индуктивности конденсаторов как элементов электрической цепи на их свойства незначительно.

Принципиальным является наличие индуктивности у любого конденсатора вследствие существования между обкладками магнитного поля, связанного с электрическим током. При некоторых условиях индуктивность конденсаторов оказывает влияние на свойства содержащих их цепей. В этих случаях применяют специально разработанные малоиндуктивные конденсаторы.

4. В линейных элементах цепи магнитный поток всегда изменяется пропорционально изменению вызывающего его тока, поэтому их отношение, определяющее индуктивность, не зависит от времени.

5. Да, можно.

7. При уменьшении тока катушки действительное направление напряжения на ней должно быть направлено в сторону, противоположную току катушки. Этот результат мы и получаем при формальном нахождении напряжения на катушке, равного $u_L = L\frac{di}{dt}$. Так как $\frac{di}{dt} < 0$, то и $u_L < 0$, т. е. действительное направление величины противоположно условно принятому.

УПРАЖНЕНИЯ

2. При низких частотах протекающего по катушке индуктивности тока сопротивление провода, а также межвитковая емкость не оказывают большого влияния на ее параметры. С увеличением частоты тока возрастает как сопротивление провода (вследствие явления поверхностного эффекта), так и влияние межвитковой емкости, так что схема эквивалентной катушке электрической цепи должна содержать резистор и конденсатор (рис. Р3.1).

4. Если контур представляет собой окружность, то он охватывает наибольший магнитный поток и, следовательно, имеет наибольшую индуктивность. Индуктивность минимальна, если площадь образованного проводом контура наименьшая, как показано, например, на рис. Р3.2.

5. Индуктивность резистора значительно уменьшится, если выполнить намотку двойным проводом, для чего необходимо сложить провод вдвое и обмотать вокруг каркаса как показано на рис Р3.3. В этом случае в соседних точках провода ток течет в противоположных направлениях. В соответствии с законом полного тока магнитный поток, создаваемый током двойного провода, весьма мал и резистор с такой намоткой характеризуется малой индуктивностью.

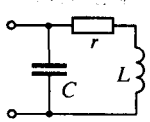


Рис. Р3.1

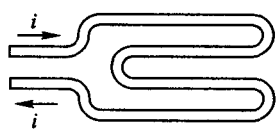


Рис. Р3.2

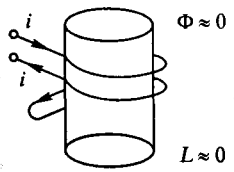


Рис. Р3.3

7. Используя выражение $W_м = 0{,}5\,Li^2$, можем найти индуктивность L отрезка кабеля длиной l: $L = 2W_м/i^2$, для чего рассчитаем энергию магнитного поля отрезка кабеля.

Так как магнитное поле вне кабеля отсутствует, то искомую энергию поля получаем, вычисляя интеграл (см. рис. Р3.4)

$$W_м = l\int_0^{r_2} \frac{\mu}{2} H^2 \cdot 2\pi r dr$$

и учитывая, что напряженность H магнитного поля описывается различными выражениями при $0 < r < r_1$ и при $r_1 < r < r_2$:

$$W_м = \mu\pi l\int_0^{r_1}\frac{i^2}{(2\pi r_1^2)^2}r^3\,dr + \mu_0\pi l\int_{r_1}^{r_2}\frac{i^2}{(2\pi r)^2}r\,dr =$$

$$= \frac{\mu i^2 l}{16\pi} + \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

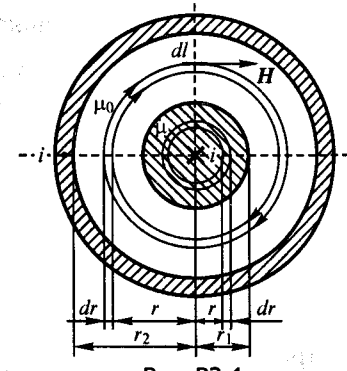


Рис. Р3.4

Первое слагаемое определяет энергию магнитного поля, заключенного в отрезке внутреннего провода длиной l, а второе — в отрезке изолирующего слоя, расположенного между внутренним и внешним проводами. Искомая индуктивность $L = \frac{\mu l}{8\pi} + \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$.

Как видно, оба способа расчета индуктивности (сравните с результатом, полученным в § 3.5), приводят к одинаковому выражению для расчета индуктивности L.

3.2. Источники в электрических цепях

ВОПРОСЫ

4. Пересечение с осью ординат соответствует режиму холостого хода, а с осью абсцисс — режиму короткого замыкания.

5. Рассмотрим простейший из способов определения внутреннего сопротивления источника.

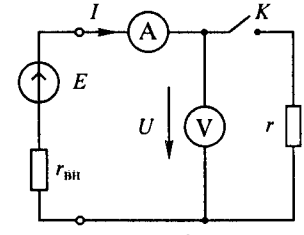


Рис. Р3.5

В электрической цепи, представленной на рис. Р3.5, выполняем два измерения тока и напряжения, соответственно, I_1, U_1, и I_2, U_2 при разомкнутом и замкнутом ключе K. При разомкнутом ключе $I_1 = 0$ и измеряем только $E = U_1$. При замкнутом ключе имеем $I_2 = \frac{E}{r_{вн} + r} = \frac{E}{r_{вн} + U_2/I_2}$, откуда находим $r_{вн} = \frac{E - U_2}{I_2}$.

Таким образом можно выполнить измерения в режиме холостого хода источника (ключ K разомкнут) и в режиме короткого замыкания (ключ K замкнут и $r = 0$).

7. Алгебраическая сумма ЭДС e_k, входящая в левую часть уравнения второго закона Кирхгофа, записанного для контура, состоящего только из идеальных источников ЭДС, равна сумме падений напряжений на пассивных элементах контура, то есть нулю в рассматриваемом случае. Таким образом, величина одного из источников ЭДС может быть выражена через величины остальных источников.

8. Рассуждение, аналогичное приведенному в ответе на предыдущий вопрос, справедливо и в рассматриваемом случае для уравнения первого закона Кирхгофа, записанного для узла, к которому подходят только ветви, содержащие источ-

ники тока. Следовательно, алгебраическая сумма величин источников тока должна быть равной нулю.

УПРАЖНЕНИЯ

2. Мощность в приемнике равна $P_{пр} = i^2 \cdot r_{пр} = \dfrac{e^2}{(r_{вн} + r_{пр})^2} r_{пр}$. Из уравнения $\dfrac{dP_{пр}}{dr_{пр}} = 0$ следует, что она будет наибольшей при $r_{пр} = r_{вн}$, при этом величина η принимает значение 0,5. При $r_{пр} \to \infty$ величина η стремится к своему наибольшему значению 1.

3.3. Топологические понятия схемы электрической цепи

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть граф имеет N узлов, тогда к каждому из них подходит по $N - 1$ ветви, следовательно общее число ветвей равно $m = N(N - 1)/2$.

3.4. Законы Кирхгофа

ВОПРОСЫ

3. Необходимо определить напряжения на всех ветвях кроме ветви с идеальным источники тока и далее найти напряжение на ветви источника тока из уравнения второго закона Кирхгофа, записанного для любого контура, проходящего по этому источнику и ветвям, напряжения на которых известны.

УПРАЖНЕНИЯ

3. Система уравнений $\Sigma \tilde{i}_k = 0$, $\Sigma \tilde{u}_k = 0$ состоит из p уравнений (p — число ветвей схемы) относительно $2p$ неизвестных. Поэтому для определения $\tilde{i}_k$ и $\tilde{u}_k$ этих уравнений недостаточно, в связи с чем утверждение $\tilde{i}_k = 0$ и $\tilde{u}_k = 0$ неверно.

3.5. Топологические матрицы

УПРАЖНЕНИЯ

3. Элементы матрицы **A** могут быть равны либо нулю, либо ±1. Кроме того, в каждом столбце матрицы **A** должны быть один или два ненулевых элемента. Если в столбце два ненулевых элемента, то они должны иметь противоположные знаки. Таким образом, в матрице **A**, представленной в упражнении 3, содержится не менее шести ошибок.

3.6. Уравнения электрических цепей

УПРАЖНЕНИЯ

1. Преимущества включения в граф цепи последовательно включенных ветвей заключается в том, что в результате решения системы уравнений Кирхгофа, составленной по этому графу, будут определены напряжения этих ветвей. В случае, если последовательно соединенные ветви рассматриваются как одна ветвь графа, то результатом решения будет напряжение на этой ветви графа. Напряже-

ния ветвей цепи, которые эквивалентировались данной ветвью, придется рассчитывать дополнительно. Существенным недостатком включения в граф цепи последовательно включенных ветвей является увеличение размерности уравнений Кирхгофа.

2. Представим вектор $\mathfrak{I}$, входящий в уравнение $\mathbf{Ai} = -\mathbf{A}\mathfrak{I}$, в виде суммы двух слагаемых $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_0 + \mathfrak{I}_y$, где в вектор $\mathfrak{I}_y$ входит управляемый источник, а в $\mathfrak{I}_0$ — неуправляемые источники схемы. Вектор $\mathfrak{I}_y$ может быть представлен в виде: $\mathfrak{I}_y = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{i}$, где матрица $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_{ij}\}$ имеет только один ненулевой элемент α_{pq}. Далее имеем $\mathbf{Ai} = -\mathbf{A}(\mathfrak{I}_0 + \mathfrak{I}_y) = -\mathbf{A}\mathfrak{I}_0 - \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{i}$, откуда $\mathbf{A}(\mathbf{1} + \boldsymbol{\alpha})\mathbf{i} = -\mathbf{A}\mathfrak{I}_0$.

4.1. Характеристики синусоидальных ЭДС, напряжений и токов

ВОПРОСЫ

4. Совпадают кривые варианта *в*, так как $\psi_{u1} - \psi_{u2} = -5° - 355° = -360°$, а также кривые варианта *г*.

5. Нет, не справедливо, так как число пар полюсов у генераторов различного исполнения неодинаково.

УПРАЖНЕНИЯ

5. Для варианта *а* имеем:

$$U = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^2(\omega t)\, d(\omega t)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} 1 \cdot d(\omega t) + \int_{\pi}^{2\pi} 0 \cdot d(\omega t)\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

6. Вариант *а*. Период изменения $\Psi(t)$ равен π/ω. Пользуясь соотношением $E_{ср} = 2f\,(\Psi_{max} - \Psi_{min})$, получаем: $E_{ср} = 2\frac{\omega}{\pi}(\Psi_0 - 0) = \frac{2\omega\Psi_0}{\pi}$.

8. Функция $u(t)$ изменяется по периодическому закону с периодом T, если выполнено равенство

$$U_{m1}(\sin\omega_1 t + \psi_1) + U_{m2}(\sin\omega_2 t + \psi_2) = \\ = U_{m1}\sin[\omega_1(t+T) + \psi_1] + U_{m2}\sin[\omega_2(t+T) + \psi_2].$$

Оно справедливо при $\omega_1 T = 2k\pi$, $\omega_2 T = 2n\pi$, где $k, n = 1, 2, 3, \ldots$. Поэтому, если значение ω_1/ω_2 равно отношению целых чисел, то напряжение $u(t)$ — периодическое.

4.2. Векторные диаграммы

ВОПРОСЫ

1. Да, можно.

2. Вариант *а* — да, *б* — да, *в* — нет, так как изображаемые синусоидальные функции имеют различные частоты, *г* — да.

3. Синусоидальный ток в контуре и обусловленный им магнитный поток находятся в фазе. ЭДС самоиндукции отстает от вызвавшего ее магнитного потока на 90°.

6. Периодическая несинусоидальная функция может быть представлена с помощью ряда Фурье в виде суммы синусоидальных функций-гармоник. Каждая из полученных таким образом гармоник может быть изображена на отдельной векторной диаграмме.

УПРАЖНЕНИЯ

6 и 7. *ЭДС, индуцируемая в контуре переменным магнитным потоком Ф, определяется на основании закона электромагнитной индукции* $e_{инд} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$. ЭДС самоиндукции e_L связана с потоком сквозь контур таким же соотношением. Поэтому на векторной диаграмме они имеют одинаковое направление по отношению к вектору $\overline{\Phi}$. Соответствующие векторные диаграммы приведены на рис. Р4.1.

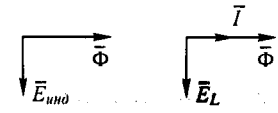


Рис. Р4.1

9. Два варианта решения этой задачи представлены на рис. Р4.2 для векторов $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, и $\bar{I}_3$.

10. При $\omega > 0$ принято, что векторы диаграммы вращаются против часовой стрелки, тогда при $\omega < 0$ можно принять, что положительное направление вращения векторов по часовой стрелке. Если при $\omega > 0$ имеем $\varphi > 0$, то при $\omega < 0$ получим $\varphi < 0$, т. е. напряжение будет отставать от тока.

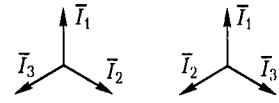


Рис. Р4.2

11. Варианты: *а* — катушка индуктивности, *б* — резистор, *в* — катушка индуктивности, *г* — конденсатор, *д* — катушка индуктивности.

12. Вариант *е*. Выберем произвольно направление вектора тока $\bar{I}$. Тогда векторы напряжений $\bar{U}_r, \bar{U}_L, \bar{U}_C$ будут направлены так, как показано на рис. Р4.3.

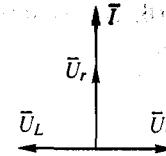


Рис. Р4.3

Уравнение второго закона Кирхгофа для рассматриваемой цепи имеет вид: $\bar{U} = \bar{U}_r + \bar{U}_L + \bar{U}_C$. Выполняя сложение векторов, получаем: $U = 5$ В.

13. Изобразим на одной и той же векторной диаграмме векторы токов и напряжений на участках цепи. Учитывая, что параметры цепей можно принять произвольными, длины изображаемых векторов токов (а также и напряжений) можно принимать также произвольными. Обычно при построении векторных диаграмм за начальный вектор принимают вектор тока, протекающего по последовательно соединенным элементам цепи, либо вектор напряжения на параллельно соединенных элементах цепи. Так, последовательность изображения векторов при решении упражнения варианта *б*) может быть принята следующей. За начальный принимаем вектор тока $\bar{I}_2$, протекающего по элементам L_2, r_2, направление которого может быть выбрано произвольно. На рис. Р4.4 вектор тока $\bar{I}_2$ изображен в виде вертикального век-

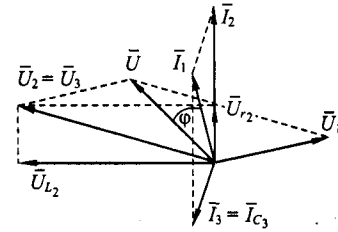


Рис. Р4.4

тора. Далее строим векторы $\overline{U}_{L2}$, $\overline{U}_{r2}$, $\overline{U}_2 = \overline{U}_3$, $\overline{I}_{C3}$, $\overline{I}_1 = \overline{I}_2 + \overline{I}_3$, $\overline{U}_{C1}$, $\overline{U} = \overline{U}_1 + \overline{U}_2$. На векторной диаграмме показан угол сдвига по фазе напряжения на входе цепи и тока в неразветвленном участке. При принятых параметрах элементов цепи (длинах векторов) угол оказался положительным, однако при других соотношениях длин векторов он может быть и другим. Векторную диаграмму, при построении которой параметры элементов цепи могут выбираться произвольными, называют качественной.

14. Задача имеет несколько решений. Цепь не может содержать только резисторы, но если они и есть в цепи, то их количество не может быть больше одного. Напряжение на четырех реактивных элементах равно нулю (рис. Р4.5) при $\omega L_1 = \omega L_2 = 1/\omega C_1 = 1/\omega C_2$.

15. Схема одной из таких цепей и ее векторная диаграмма изображены на рис. Р4.6. Угол между векторами $\overline{U}_{rC}$ и $\overline{U}_L$ составляет 120°.

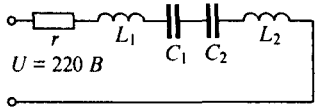


Рис. Р4.5

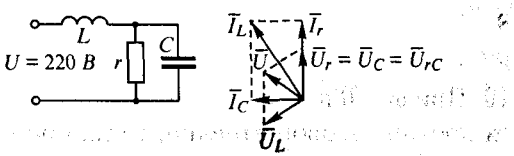


Рис. Р4.6

16. Приведем решение варианта *г*. Примем за начальный вектор напряжения $\overline{U}_2$ и направим его вертикально (рис. Р4.7). Вектор тока $\overline{I}_2$ имеет то же направление, что и вектор $\overline{U}_2$, тогда как вектор тока $\overline{I}_3$ отстает на угол 90° от вектора $\overline{U}_2$. Сумма векторов $\overline{I}_2$ и $\overline{I}_3$ дает вектор тока $\overline{I}$, модуль которого равен $\dfrac{U_1}{1/\omega C} = \dfrac{200}{50} = 4$ А.

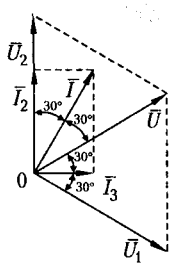


Рис. Р4.7

Отстающий от вектора $\overline{I}$ на 90° вектор напряжения $\overline{U}_1$ должен быть таким, чтобы угол между векторами $\overline{U}_1$ и $\overline{U}_2$ составлял 120°. В этом случае угол между векторами $\overline{U}$ и $\overline{U}_1$, как и между векторами $\overline{U}$ и $\overline{U}_2$, равен 60° и модули векторов $\overline{U}$, $\overline{U}_1$ и $\overline{U}_2$ будут равными. Как видно из векторной диаграммы, углы между векторами $\overline{I}_2$ и $\overline{I}$, $\overline{I}$ и $\overline{U}$, $\overline{U}$ и $\overline{I}_3$ равны 30°, так что получаем

$$I_2 = I\cos 30° = 2\sqrt{3} \cong 3{,}46 \text{ А}; \; I_3 = \sin 30° = 2 \text{ А}; \; P = UI\cos 30° = 400\sqrt{3} \cong 693 \text{ Вт}.$$

4.3. Ток в цепи с последовательным и параллельным соединением элементов *r*, *L*, *C*

ВОПРОСЫ

1. Варианты: *а* — нет; *б* — да, при $U_L = U_C$; *в* — нет; *г* — да, при этом также $U_L = U_C$.

4. Если умножить обе части равенства $z = r + x$ на ток I, то получаем $Iz = Ir + Ix = U_а + U_р$, где $U_а$, $U_р$ — активная и реактивная составляющие действующего значения напряжения $U = Iz$. Так как напряжения $u_а$, $u_р$ сдвинуты по фазе на 90°,

то арифметическое сложение величин $U_а$, $U_р$ невозможно, их можно складывать геометрически с учетом их фазового сдвига.

5. Так как напряжения на катушке индуктивности и конденсаторе сдвинуты по фазе на угол 180°, т. е. в любой момент времени имеют противоположные знаки (если только они не обращаются в нуль), то в выражение $U_x = U_L - U_C$ они должны входить с различными знаками. Разделив обе части последнего выражения на ток I, получим $x = x_L - x_C$, т. е. знаки входящих в выражение для расчета x величин x_L и x_C должны быть различными.

7. Варианты: *а* — нет; *б* — да; *в* — да; *г* — да.

9. Если сопротивление двухполюсника носит индуктивный характер, то от $\pi/2$ до нуля, если емкостной — то от $-\pi/2$ до нуля.

УПРАЖНЕНИЯ

3. Реактивное сопротивление катушки $x_L = \omega L$ пропорционально частоте. Из условия задачи известно, что $r = 0{,}5\omega_0 L$, следовательно, для выполнения условия $r = 2\,x_L$ необходимо увеличить частоту в четыре раза: $\omega_1 = 4\omega_0$.

4. Рассмотрим решение упражнения для схемы *г* и строки *2* таблицы. Изобразим на векторной диаграмме произвольный вектор тока $\bar{I}$ и вектор $\bar{U}_r$, совпадающий с ним по фазе. Значение вектора $\bar{U}_C$ неизвестно, но известно его направление (рис. Р4.8). Так как направление и значение вектора $\bar{U}_L$ известны, то в силу равенства $\bar{U} = \bar{U}_r + \bar{U}_L + \bar{U}_C$, выражающего второй закон Кирхгофа, можем определить соотношение $\bar{U}_L + \bar{U}_C = 0$, так как $U = U_r$. Действительно, при $\bar{U}_L + \bar{U}_C \neq 0$ получаем $U > U_r$, тогда как по условию задачи имеем $U = U_r$. Таким образом, находим $U_C = 40$ В.

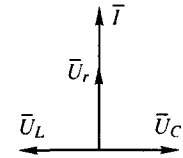


Рис. Р4.8

6. Схемы, удовлетворяющие заданным условиям, изображены на рис. Р4.9.

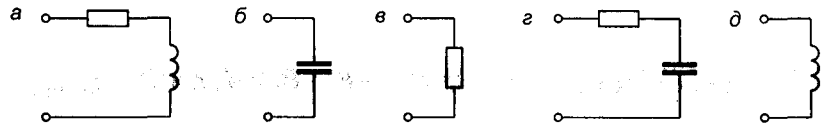


Рис. Р4.9

ЗАДАЧИ

1. Активная мощность P, рассеиваемая в двухполюснике, может быть вычислена по формуле $P = UI\cos\varphi$, где U — действующее значение напряжения на зажимах двухполюсника, I — действующее значение тока на входе двухполюсника; φ — угол сдвига между векторами $\bar{U}$ и $\bar{I}$. Поскольку $U > 0$, $I > 0$ и $P \geq 0$, то $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$.

2. $I(\omega) = E\Big/\sqrt{r^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$; $U_r(\omega) = I(\omega)r$; $U_L(\omega) = I(\omega)\omega L$.

Величина $I(\omega)$ достигает максимума при $\omega L = 1/\omega C$; следовательно, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

4.4. Мощность в цепи синусоидального тока

ВОПРОСЫ

1. Да, может. Например, таким свойством обладает цепь с последовательным соединением участков r, L, C при $\omega L = 1/\omega C$.

3. Варианты: *а* — нет; *б* — нет; *в* — да, если сопротивление цепи носит емкостный характер.

7. Да.

10. Нет.

УПРАЖНЕНИЯ

4. Активная мощность P в рассматриваемой цепи может быть рассчитана следующим образом: $P = rI^2 = r\left(\dfrac{E_m/\sqrt{2}}{\sqrt{r^2+\omega^2L^2}}\right)^2$. При внесении ферромагнитного сердечника внутрь катушки ее индуктивность возрастет, следовательно, активная мощность уменьшится.

5. Если коэффициент мощности нагрузки равен некоторому значению ν, то для сохранения неизменной активной мощности напряжение U_0 следует повышать в $1/\nu$ раз.

7. По условию задачи $2r = \omega_0 L$, что соответствует коэффициенту мощности $\cos\varphi = r/\sqrt{r^2+\omega_0^2L^2} = 1/\sqrt{5}$. Чтобы повысить коэффициент мощности в два раза, изменим частоту тока в ν раз. Тогда для определения ν имеем соотношение: $\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{r}{\sqrt{r^2+\nu^2(\omega_0 L)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+4\nu^2}}$, откуда находим $\nu = 0{,}25$. Таким образом, частота должна быть уменьшена в 4 раза.

8. Для варианта *а* имеем $r_1 = U_2/I_1 = 50/2 = 25$ Ом. Для определения значения величины r_2 воспользуемся выражением

$$r_2 = P_2/I_1^2 = 12{,}5 \text{ Ом, тогда } \cos\varphi = \frac{P_1+P_2}{U_1I_1} = \frac{I_1^2r_1+P_2}{U_1I_1} = 0{,}625.$$

9. В варианте *а* значение тока I резистора r равно 4 А и может быть найдено с помощью векторной диаграммы. Показания ваттметра P могут быть вычислены из соотношения $P = rI^2 = 160$ Вт. Для варианта *б* получаем $P = 200$ Вт; *в*) 10 Вт; *г*) 48 Вт.

ЗАДАЧИ

1. Мощность P может быть определена из выражения $P = I^2r$, где $I = U/\sqrt{r^2+\omega^2L^2}$: $P = U^2r/(r^2 + \omega^2L^2)$. Сопротивление r, при котором активная мощность достигнет максимального значения, находим из условия $\dfrac{\partial P}{\partial r} = 0$, т. е. $\dfrac{\partial P}{\partial r} = \dfrac{U^2(r^2+\omega^2L^2) - 2r^2U^2}{(r^2+\omega^2L^2)^2} = 0$, откуда получаем соотношение $r = \omega L$.

2. При $L = 0$. Решение аналогично решению предыдущей задачи.

3. По условию задачи сопротивление двухполюсника имеет индуктивный характер. Как видно из векторной диаграммы (рис. Р4.10), всегда можно подобрать емкость C конденсатора таким образом, чтобы оказалось выполненным условие, при котором коэффициент мощности всей нагрузки возрастает.

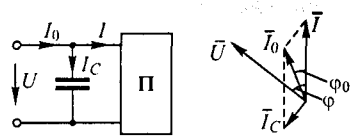


Рис. Р4.10

4.5. Эквивалентные параметры цепи, рассматриваемой как двухполюсник

ВОПРОСЫ

2. Активная проводимость цепи $g = r/(r^2 + x^2)$, где r и x — соответственно активное и реактивное сопротивления цепи. Изменить g, не меняя r можно, если менять x.

3. Используя ответ на предыдущий вопрос, получим, что для уменьшения вдвое активной проводимости последовательно с резистором следует включить двухполюсник с реактивным сопротивлением, равным r (например, конденсатор или катушку индуктивности).

4. Для определения знака реактивного сопротивления этих данных недостаточно.

7. Да. Эффект независимости входного сопротивления и проводимости от частоты наблюдается только при специально подобранных параметрах элементов двухполюсников. Например, этим свойством обладает двухполюсник, представленный на рис. Р4.11 при $r_1 = r_2 = \sqrt{L/C}$.

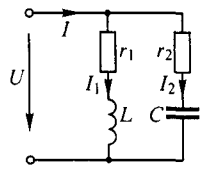


Рис. Р4.11

9. Возрастет. Переменный магнитный поток, создаваемый током, протекающим в катушке, индуцирует токи в медной болванке, что приведет к дополнительным потерям энергии.

УПРАЖНЕНИЯ

2. Один из возможных видов измерительной цепи изображен на рис. Р4.12. Полное z, активное r и реактивное x сопротивления могут быть вычислены следующим образом: $z = U/I$, $r = P/I^2$, $x = \pm\sqrt{z^2 - r^2}$, где U, I и P — показания соответствующих приборов. Для определения знака x необходим дополнительный опыт. Последовательно с двухполюсником следует включить, например, катушку индуктивности с реактивным сопротивлением $x_L < |x|$ и по показаниям вольтметра и амперметра определить z_1. Если $z_1 < z$, то подключенная дополнительно индуктивность скомпенсировала частично сопротивление двухполюсника, следовательно, реактивное сопротивление последнего емкостное ($x < 0$). В противном случае реактивное сопротивление двухполюсника носит индуктивный характер ($x > 0$).

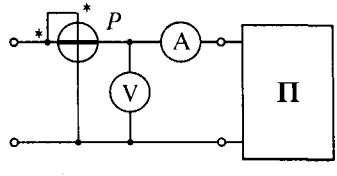


Рис. Р4.12

3. Вариант *а*. Предварительно отметим, что между эквивалентными параметрами $r_э$, $x_э$ и $g_э$, $b_э$ схем двухполюсников существует взаимно однозначная связь (см. § 4.8). С помощью этих соотношений преобразуем параллельную rC цепь в исходной задаче к последовательной r_1C_1 цепи (рис. Р4.13).

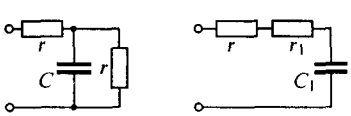


Рис. Р4.13

Таким образом, для рассматриваемой цепи $r_э = r + r_1 = 1{,}5$ Ом, $x_э = x_{C1} = 0{,}5$ Ом, $z_э = \sqrt{r_э^2 + x_э^2} \cong 1{,}58$ Ом, $g_э = 0{,}6$ См, $b_э = 0{,}2$ См и $y_э = 0{,}63$ См.

Ответы для других вариантов даны в таблице:

Вариант	$r_э$	$x_э$	$z_э$	$g_э$	$b_э$	$y_э$
б	0	∞	∞	0	0	0
в	0,5	0	0,5	2	0	2

4. Эквивалентное реактивное сопротивление схемы *а* равно

$$x_э = \frac{x_L x_C^2 - r^2 x_C + r^2 x_L}{r^2 + x_C^2}.$$

Требуемое условие выполняется при $x_э = 0$, или при $x_C = \dfrac{r^2 \pm \sqrt{r^4 - 4x_L^2 r^2}}{2x_L}$.

Для схемы *б* имеем $x_э = \dfrac{r^2 x_L - x_C(r^2 + x_L^2)}{r^2 + x_L^2}$, откуда находим $x_C = \dfrac{r^2 x_L}{r^2 + x_L^2}$.

В схемах *в*, *г* входной ток совпадает по фазе с приложенным к цепи напряжением при $b_э = 0$. Для схемы *г* получаем $b_э = \dfrac{1}{x_L} - \dfrac{x_C}{r^2 + x_C^2}$, откуда $x_C = \dfrac{x_L \pm \sqrt{x_L^2 + 4r^2}}{2}$.

Для схемы *в* находим $b_э = -\dfrac{1}{x_C} + \dfrac{x_L}{r^2 + x_L^2}$ и $x_C = \dfrac{x_L^2 + r^2}{x_L}$.

5. Вариант *а*. При $\omega \gg \omega_0$ сопротивление x_L катушки индуктивности будет весьма велико, а сопротивление x_C конденсатора, напротив, мало. Поэтому ветвь, содержащая катушку, может приближенно рассматриваться как разомкнутая, а ветвь, содержащая конденсатор, как замкнутая накоротко. Следовательно, при $\omega \gg \omega_0$ схема замещения будет состоять из одного резистора r. При $\omega \ll \omega_0$ имеем обратную ситуацию: сопротивление x_L катушки индуктивности будет мало, а сопротивление x_C конденсатора весьма велико, соответственно ветвь, содержащая катушку, может приближенно рассматриваться как замкнутая накоротко, а ветвь, содержащая конденсатор, как разомкнутая. При этом схема замещения также будет состоять из одного резистора r.

ЗАДАЧИ

1. Вариант *а*. Реактивное сопротивление цепи $x = \omega L - 1/\omega C$ положительно при $\omega > 1/\sqrt{LC}$. При выполнении последнего условия сопротивление цепи носит ин-

дуктивный характер и она может рассматриваться как rL цепь. Вариант *б*. Найдем эквивалентное реактивное сопротивление x_{rC} цепи rC: $x_{rC} = \dfrac{\omega C}{(1/r)^2 + (\omega C)^2}$.

Эквивалентное реактивное сопротивление цепи $x_э = \omega L - x_{rC}$ положительно при $\omega > \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{1}{r^2C^2}}$, и в этом диапазоне частот исходная цепь может рассматриваться как rL цепь. Отметим, что когда параметры цепи таковы, что подкоренное выражение в последнем неравенстве отрицательно, исходная цепь не может быть замещена цепью rL.

3. Полное сопротивление цепи переменному току $z_э = \sqrt{r_э^2 + x_э^2}$, коэффициент мощности цепи $\cos\varphi = r_э/z_э$, действующее значение тока $I = E/z_э$, его активная составляющая $I_а = I\cos\varphi$, реактивная составляющая $I_р = I\sin\varphi$.

5.1. Комплексный метод

ВОПРОСЫ

2. Нет. Например, для изображенного на рис. Р5.1 двухполюсника при $r = 1$ Ом, $x_L = 3$ Ом, $x_C = 1$ Ом получаем $Z = 1 + j(x_L - x_C) = 1 + j2$ Ом.

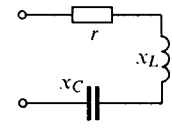


Рис. Р5.1

3. Нельзя.

4. Указываемые на схемах электрических цепей условные положительные направления токов и напряжений ветвей определяют эти величины для некоторого момента времени. Если в результате расчета найденный в ветви ток положителен, то для этого момента времени его условное положительное направление выбрано правильно. Если же найденное в ветви значение тока отрицательно, то его направление в заданный момент времени противоположно условно положительно принятому в начале расчета.

5. Варианты: *а* — нет; *б* — да; *в* — нет; *г* — да.

8. Справедливы утверждения *а*, *б*, *д*.

11. Да, могут. Параметры двухполюсников следует выбрать так, чтобы $r_э \neq 0$, $x_э = 0$. Тогда ЭДС e и ток i совпадают по фазе.

УПРАЖНЕНИЯ

1.

Вариант	Синусоидальная функция	Комплексная величина
а	$i = 3\sin\omega t$ А	$\dot{I} = 3/\sqrt{2}$ А
б	$i = \sqrt{2}\cos\omega t$ А	$\dot{I} = j$ А
в	$i = 3\sin 3\omega t$ А	$\dot{I} = 3/\sqrt{2}$ А
г	$i = \sqrt{2}\sin(\omega t + 1)$ А	$\dot{I} = \cos 1 + j\sin 1$ А
д	$u = 5\sin(\omega t - \pi)$ В	$\dot{U} = -5/\sqrt{2}$ В

Вариант	Синусоидальная функция	Комплексная величина
е	$u = 2\sin(\omega t + \pi)$ В	$\dot{U} = -2/\sqrt{2}$ В
ж	$u = 2\sin(3\omega t - 30^\circ)$ В	$\dot{U} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - j/\sqrt{2} = (\sqrt{3} - j)/\sqrt{2}$ В
з	$u = 10\sin(\omega t + 2\pi/3)$ В	$\dot{U} = 5(-1 + j\sqrt{3})/\sqrt{2}$ В

2.

Вариант	Комплексная величина	Синусоидальная функция
а	$\dot{I} = 1 + j2$ А	$i = \sqrt{2}\sqrt{5}\sin(314t + 63^\circ)$ А
б	$\dot{I} = 1 - j2$ А	$i = \sqrt{10}\sin(314t - 63^\circ)$А
в	$\dot{I} = -1 + j2$ А	$i = -\sqrt{10}\sin(314t + 117^\circ)$А
г	$\dot{I} = -1 - j2$ А	$i = -\sqrt{10}\sin(314t - 117^\circ)$ А
д	$\dot{U}_m = a + jb$ В	$u = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(314t + \operatorname{arctg} b/a)$ В
е	$\dot{U} = \sqrt{2}$ В	$u = 2\sin 314t$ В
ж	$\dot{U} = -j$ В	$u = \sqrt{2}\sin(314t - \pi/2)$ В
з	$\dot{U}_m = -3$ В	$u = 3\sin(314t + \pi)$В
и	$\dot{I} = -j\sqrt{2}$ А	$i = 2\sin(314t - \pi/2)$ А

5. Вариант *д*. Представим в показательной форме комплексное число $(1/\sqrt{2} + j\sqrt{2}/2) = e^{j\frac{\pi}{4}}$). Выберем направление вектора, соответствующего $\dot{I}_1$, произвольно (рис. Р5.2), тогда $\dot{I}_2 = 0{,}7\dot{I}_1 e^{j\frac{\pi}{4}} = 0{,}7\dot{I}_1 e^{j\varphi_{i_1}} e^{j\frac{\pi}{4}} = 0{,}7I_1 e^{j\left(\varphi_{i_1} + \frac{\pi}{4}\right)}$, т. е. вектор, соответствующий $\dot{I}_2$, будет иметь большую на угол $\frac{\pi}{4}$ начальную фазу и в 0,7 раз большую амплитуду.

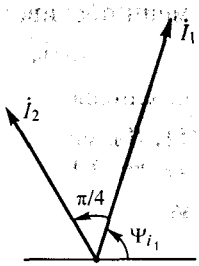


Рис. Р5.2

9. Вариант *д*.

$$Y_э = \frac{1}{r} + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{r} - j\frac{1}{\omega L} = g_э - jb_э; \quad y_э = \sqrt{g_э^2 + b_э^2};$$

$$Z_э = \frac{1}{Y_э} = \frac{jr\omega L}{r + j\omega L} = \frac{r\omega^2 L^2}{r^2 + \omega^2 L^2} + j\frac{r^2\omega L}{r^2 + \omega^2 L^2} = r_э + jx_э; \quad z_э = \sqrt{r_э^2 + x_э^2}.$$

10. $Z = \dfrac{\dot{E}}{\dot{I}} = \dfrac{50(2+j)}{2(4+3j)} = (11-2j)$ Ом; $z = \sqrt{11^2+2^2} = 5\sqrt{5}$ Ом;

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{11-2j} = \frac{1}{125}(11+j2) \text{ См}; \quad y = \frac{1}{z} = \frac{1}{5\sqrt{5}} \text{ См}.$$

12. Для решения задачи следует использовать соотношения:

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = r + jx; \ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{x}{r}.$$

Вариант 1. $Z = \dfrac{\dot{U}}{\dot{I}} = \dfrac{5+j}{5-j} = \dfrac{12}{13} + j\dfrac{5}{13} = r + jx; \ \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{5}{12} \cong 23°.$

13. Вариант *в*. Уравнения законов Кирхгофа в комплексной форме для цепи, представленной на рис. Р5.3, имеют вид:

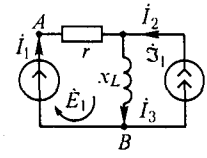


Рис. Р5.3

$$\begin{cases} \dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2; \\ \dot{I}_2 = \dot{\mathfrak{I}}_1; \\ r\dot{I}_1 + jx_L\dot{I}_3 = \dot{E}_3. \end{cases}$$

Решая эти уравнения, находим

$$\dot{I}_1 = (\dot{E}_1 - jx_L\dot{\mathfrak{I}}_1)/(r + jx_L); \ \dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{\mathfrak{I}}_1.$$

Для определения напряжения $\dot{U}_{AB}$ запишем уравнение второго закона Кирхгофа для контура, указанного на рисунке: $\dot{U}_{AB} = \dot{E}_1$.

14. Вариант *в*. $P = \operatorname{Re}\dot{U}\dot{I}^* = \operatorname{Re} Z\dot{I}\dot{I}^* = \operatorname{Re} ZI^2 = I^2 \operatorname{Re} Z$

Для рассматриваемой задачи $\operatorname{Re} Z = r$, поэтому $P = rI^2$. Определим далее действующее значение тока I:

$$I = \frac{U}{z} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{r^2+(\omega L - 1/\omega C)^2}}, \text{ тогда } P = \frac{r(a^2+b^2)}{r^2+(\omega L - 1/\omega C)^2}.$$

15. Варианты *а*, *б*, *в*, *г*.

16. Вариант *б*.

$$Z = 2r + \frac{r \cdot 1/j\omega C}{r + 1/j\omega C} = 2r + \frac{r}{1+j\omega rC} = r\left(2 + \frac{1}{1+\omega^2 r^2 C^2}\right) - j\omega\frac{r^2 C}{1+\omega^2 r^2 C^2}.$$

17. Учитывая, что элементы цепи соединены последовательно-параллельно, получаем для варианта *а*

$$Z_{rL} = \frac{1 \cdot j}{1+j} = \frac{1}{2}j(1-j) = \frac{1}{2}(1+j) \text{ Ом}; \ Z_{rLC} = -j + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}j = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j \text{ Ом}.$$

Эквивалентное сопротивление всей цепи между входными зажимами равно

$$Z_э = 1 + \frac{j \cdot 0{,}5(1-j)}{j + 0{,}5 - 0{,}5j} = 1 + \frac{0{,}5(1+j)}{0{,}5 + 0{,}5j} = 1 + \frac{(1+j)}{(1+j)} = 2 \text{ Ом}; \ z_э = 2 \text{ Ом}.$$

Искомые значения напряжений и токов

Искомые значения напряжений и токов

$$U = Iz_э = 10\cdot 2 = 20 \text{ В};\ \dot{I}_2 = 10(1+j) \text{ А};$$

$$\dot{U}_{rL} = \dot{I}_2 \frac{1}{2}(1+j) = 10(1+j)0{,}5(1+j) = 10j \text{ В};\ I_1 = \frac{U_{rL}}{x_L} = 10 \text{ А}.$$

При расчете токов и напряжений в цепи варианта *б* следует учесть, что в связи с идеальностью приборов (напряжения на амперметрах и токи вольтметров равны нулю) ток катушки индуктивности L, включенной последовательно с вольтметром V, равен нулю и показание вольтметра суть напряжение на конденсаторе C. Эквивалентное сопротивление всей цепи между входными зажимами $Z_э = 1 - j$ Ом. Далее находим значения искомых величин

$$I_1 = \frac{10}{1} = 10 \text{ А};\ \dot{I}_2 = \frac{10}{1-j} = 5(1+j) \text{ А};\ I_2 = 5\sqrt{2} \cong 7 \text{ А};\ U_C = I_2\cdot 1 = 5\sqrt{2}\cdot 1 \cong 7 \text{ В}.$$

18. Вариант *б*. Активная мощность в цепи может быть определена из соотношения $P = r_э I^2$, где $r_э$ — эквивалентное активное сопротивление рассматриваемого двухполюсника (рис. Р5.4).

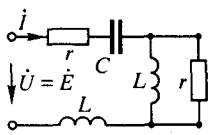


Рис. Р5.4

$$Z = r_э + jx_э = \left(r - \frac{r\omega^2 L^2}{r^2+\omega^2 L^2}\right) + j\left(\omega L + \frac{\omega L r^2}{r^2+\omega^2 L^2} - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Величина $r_э$ не зависит от емкости C конденсатора, поэтому для получения максимальной активной мощности необходимо выбрать C таким образом, чтобы действующее значение I тока $I = \frac{U}{z} = \frac{U}{\sqrt{r_э^2 + x_э^2}}$ было максимальным. Так как действующее значение U напряжения по условию задачи постоянно, то максимальное значение тока будет достигнуто при $x_э = 0$, откуда

$$\frac{1}{\omega C} = \omega L\left(1 + \frac{r^2}{r^2+\omega^2 L^2}\right).$$

19. Активная мощность нагрузки равна: $P = r_н I^2 = \frac{E^2 r_н}{(r_г + r_н)^2 + (x_г + x_н)^2}$. Очевидно, что для получения наибольшей мощности P реактивное сопротивление нагрузки должно быть равным $x_н = -x_г$. Тогда максимальную мощность в нагрузке можно определить из условия $\frac{dP_н}{dr_н} = 0$, откуда следует, что $r_н = r_г$. Таким образом, условия согласования нагрузки и источника, обеспечивающие максимальную мощность приемника, имеют вид: $r_н = r_г$, $x_н = -x_г$. При этом потери $P_{н\,max} = E^2/4r_н$ на активном сопротивлении нагрузки будут равны потерям $I^2 r_г$ на внутреннем сопротивлении источника, составляя половину отдаваемой источником активной мощности. Поэтому КПД, определяемый как отношение мощности нагрузки к мощности источника, будет равен 0,5, а напряжение на нагрузке составит половину напряжения источника.

В электроэнергетических установках режим передачи максимальной мощности невыгоден вследствие значительных потерь энергии в проводах линии, соеди-

няющих генераторы и потребителей. На практике силовые установки проектируют так, чтобы КПД составлял 0,9–0,95, а напряжение на нагрузке отличалось бы от напряжения в режиме холостого хода не более, чем на 5–10 %.

В устройствах автоматики, связи, в электронных приборах мощности сигналов могут быть весьма малыми, поэтому зачастую приходится создавать условия передачи приемнику максимальной мощности. Снижение КПД при этом не имеет существенного значения, так как передаваемая мощность невелика.

20. Вариант *в*. Схема электрической цепи изображена на рис. Р5.5. Здесь $Z_1 = r - jx_C$, $Z_2 = jx_L$.

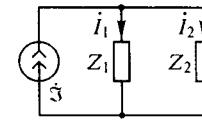


Рис. Р5.5

Решая систему уравнений законов Кирхгофа $\dot{\mathfrak{I}} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$, $Z_1\dot{I}_1 - Z_2\dot{I}_2 = 0$, получаем:

$\dot{I}_1 = \dot{\mathfrak{I}}(1 + Z_1/Z_2)^{-1}$, $\dot{I}_2 = \dot{\mathfrak{I}}(1 + Z_2/Z_1)^{-1}$.

21. При заданном напряжении $\dot{U}$ на входных зажимах цепи может быть принята следующая последовательность расчета искомых величин: 1) $Z_{45} = \dfrac{Z_4 Z_5}{Z_4 + Z_5}$, $Z_{345} = Z_3 + Z_{45}$, $Z_{2345} = \dfrac{Z_2 Z_{345}}{Z_2 + Z_{345}}$, $Z_э = Z_1 + Z_{2345}$; 2) $\dot{I}_1 = \dfrac{\dot{U}}{Z_э}$; 3) $\dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_1$; 4) Из уравнения $\dot{U}_1 + \dot{U}_2 - \dot{U} = 0$ второго закона Кирхгофа находим $\dot{U}_2 = \dot{U} - \dot{U}_1$; 5) $\dot{I}_2 = \dfrac{\dot{U}_2}{Z_2}$; 6) Из уравнения $-\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0$ первого закона Кирхгофа находим $\dot{I}_3 = \dot{I}_1 - \dot{I}_2$; 7) $\dot{U}_3 = \dot{I}_3 Z_3$; 8) Из уравнения $-\dot{U}_2 + \dot{U}_3 + \dot{U}_4 = 0$ получаем $\dot{U}_4 = \dot{U}_2 - \dot{U}_3$; 9) $\dot{I}_4 = \dfrac{\dot{U}_4}{Z_4}$; 10) $\dot{I}_5 = \dfrac{\dot{U}_4}{Z_5}$.

При заданном токе, например, токе $\dot{I}_2$, последовательно рассчитываем 1) $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_2$; 2) $Z_{345} = Z_3 + \dfrac{Z_4 Z_5}{Z_4 + Z_5}$; 3) $\dot{I}_3 = \dfrac{\dot{U}_2}{Z_{345}}$; 4) $\dot{U}_3 = \dot{I}_3 Z_3$; 5) Из уравнения $-\dot{U}_2 + \dot{U}_3 + \dot{U}_4 = 0$ второго закона Кирхгофа находим $\dot{U}_4 = \dot{U}_2 - \dot{U}_3$; 6) $\dot{I}_4 = \dfrac{\dot{U}_4}{Z_4}$; 7) $\dot{I}_5 = \dfrac{\dot{U}_4}{Z_5}$; 8) $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$; 9) $\dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_1$; 10) Из уравнения $-\dot{U} + \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 0$ второго закона Кирхгофа находим $\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$.

Рассмотрим решение варианта 6 при $I_3 = 6$ А. Примем начальную фазу тока I_3 равной нулю, тогда $\dot{I}_3 = 6$ А. Имеем

$$Z_{4,5} = \frac{10(10 - 10j)}{10 + 10 - 10j} = 6 - 2j \text{ Ом}; \quad \dot{I}_4 = \frac{\dot{U}_{4,5}}{Z_4} = \frac{36 - 12j}{10} = 3{,}6 - 1{,}2j \text{ А};$$

$$\dot{I}_5 = 2{,}4 + 1{,}2j \text{ А}; \quad \dot{U}_{4,5} = \dot{I}_3 Z_{4,5} = 36 - 12j \text{ В}; \quad \dot{U}_3 = \dot{I}_3 Z_3 = 6 \cdot 2j = 12j \text{ В};$$

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_3 + \dot{U}_{4,5} = 12j + 36 - 12j = 36 \text{ В}; \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_2} = \frac{36}{3} = 12 \text{ А};$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 12 + 6 = 18 \text{ А}; \quad \dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_1 = 18(2 + 4j) = 36(1 + 2j) \text{ В};$$

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 36 + 72j + 36 = 72(1 + j) \text{ В}.$$

Комплексная мощность

$$\dot{S} = \dot{U}\dot{I}_1^* = 18 \cdot 72(1+j) = 1296(1+j)\,\text{В} \cdot \text{А}.$$

Мгновенные значения токов равны

$$i_1 = 18\sqrt{2}\sin\omega t\,\text{А}; \quad i_2 = 12\sqrt{2}\sin\omega t\,\text{А}; \quad i_3 = 6\sqrt{2}\sin\omega t\,\text{А};$$

$$i_4 \cong 3{,}8\sqrt{2}\sin(\omega t - 18{,}4°)\,\text{А}; \quad i_5 \cong 2{,}68\sqrt{2}\sin(\omega t + 26{,}5°)\,\text{А}.$$

ЗАДАЧИ

1. Пусть действующее значение напряжения U на входе цепи равно одному вольту, тогда ток I может быть определен из соотношения:

$$I = \frac{1}{z} = \sqrt{\frac{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 r^2}{r^2 + \omega^2 L^2}}.$$

Для того, чтобы ток I не зависел от величины r, необходимо выполнение условия $\dfrac{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 r^2}{r^2 + \omega^2 L^2} = \text{const} = A$, или $1 - 2\omega^2 LC + \omega^4 L^2 C^2 + \omega^2 C^2 r^2 = A\omega^2 L^2 + Ar^2$.

Следовательно, должны выполняться соотношения:

$$\begin{cases} \omega^2 C^2 r^2 = Ar^2, \\ \omega^4 C^2 L^2 = A\omega^2 L^2, \\ 1 - 2\omega^2 LC = 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} \omega^2 C^2 = A, \\ 1 = 2\omega^2 LC. \end{cases}$$

Решение последней системы уравнений относительно A и C дает $A = \dfrac{1}{2}\dfrac{C}{L}$, $C = \dfrac{1}{2\omega^2 L}$.

Таким образом, при $C = 1/2\omega^2 L$ ток I в цепи при $U = 1$ В будет равным $\sqrt{C/2L}$ и не будет зависеть от величины r.

2. Из уравнений второго закона Кирхгофа $\dot{U}_{AB} - \dot{I}_{2r} r + \dot{I}_{rC} r_1 = 0$, где $\dot{I}_{rC} = \dot{U}/(r_1 - jx_C)$, $\dot{I}_{2r} = \dot{U}/2r$ — токи ветвей, находим

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}\left(\frac{1}{2} - \frac{r_1}{r_1 - jx_C}\right),$$

откуда

$$\frac{\dot{U}_{AB}}{\dot{U}} = \frac{U_{AB}}{U} e^{j(\psi_{u_{AB}} - \psi_u)} = \frac{1}{2} - \frac{r_1}{r_1 - jx_C},$$

$$\psi_{u_{AB}} - \psi_u = \varphi = \arg\left(\frac{1}{2} - \frac{r_1}{r_1 - jx_C}\right).$$

Переходя к численным значениям, получаем:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2r_1}{r_1^2 - 1} = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{r_1}.$$

Следовательно, при изменении r_1 величина φ может меняться от нуля до π.

5.2. Методы расчета сложных электрических цепей

ВОПРОСЫ

1. Для цепей, состоящих только из двухполюсных элементов, матрицы $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Y}$ — диагональные. В этом случае для существования матрицы $\mathbf{Z}^{-1}$ необходимо, чтобы ни одна из ветвей цепи не имела нулевого сопротивления. Для существования матрицы $\mathbf{Y}^{-1}$ необходимо, чтобы в цепи не было ветвей с нулевыми проводимостями. В общем случае матрицы $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Y}$ — блочно-диагональные. Для существования обратных к ним матриц необходимо, чтобы матрицы, образующие диагональные блоки, были невырожденными.

2. Для определения всех токов достаточно измерить токи в связях, а для определения всех напряжений — напряжения на ветвях дерева.

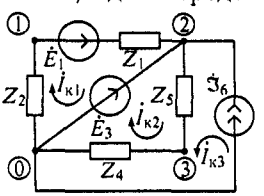


Рис. P5.6

3. Нет.

4. *а*) Да, возможно. *б*) Возможно при выполнении дополнительных преобразований. Рассмотрим пример (рис. P5.6): ветвь, содержащая идеальный источник тока, имеет равную нулю проводимость Y_6. Система уравнений метода контурных токов имеет вид:

$$\begin{cases} (Z_1+Z_2)\dot{I}_{к1}+0\cdot\dot{I}_{к2}+0\cdot\dot{I}_{к3}=\dot{E}_1-\dot{E}_3 \\ 0\cdot\dot{I}_{к1}+(Z_4+Z_5)\dot{I}_{к2}+(Z_4+Z_5)\dot{I}_{к3}=\dot{E}_3 \\ 0\cdot\dot{I}_{к1}+(Z_4+Z_5)\dot{I}_{к2}+(Z_4+Z_5)\dot{I}_{к3}+\dfrac{1}{Y_6}\dot{I}_{к3}=\dfrac{1}{Y_6}\mathfrak{Z}_6 \end{cases}$$

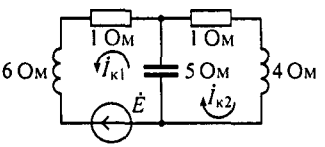


Рис. P5.7

В последнем уравнении слагаемые $(Z_4+Z_5)\dot{I}_{к2}$, $(Z_4+Z_5)\dot{I}_{к3}$, имеющие конечное значение, могут быть отброшены, так как другие члены этого уравнения бесконечно велики. Тогда из последнего уравнения получаем $\dot{I}_{к3}=\mathfrak{Z}_6$ и, следовательно, система уравнений может быть преобразована к виду:

$$\begin{cases} (Z_1+Z_2)\dot{I}_{к1}=\dot{E}_1-\dot{E}_3 \\ (Z_4+Z_5)\dot{I}_{к2}=\dot{E}_3-(Z_4+Z_5)\mathfrak{Z}_6, \end{cases}$$

откуда могут быть найдены контурные токи $\dot{I}_{к1}$ и $\dot{I}_{к2}$.

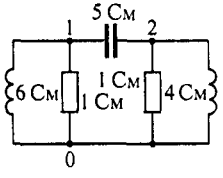


Рис. P5.8

8. Да, например, для приведенной на рис. P5.7 схемы имеем

$$\mathbf{Z}=\begin{Vmatrix} 1+j & -j5 \\ -j5 & 1-j \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad |1-j|<|j5|$$

9. Источники напряжения, управляемые током.

10. Это объясняется тем, что для всех узловых напряжений выбраны одинаковые условные положительные направления — от произвольного узла к нулевому узлу.

11. Да, например, для приведенной на рис. P5.8 схемы имеем

$$\mathbf{Y}=\begin{Vmatrix} 1-j & -j5 \\ -j5 & 1+j \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad |1-j|<|j5|.$$

12. В схеме, представленной на рис. Р5.9, токи обобщенных ветвей равны нулю, однако, внутри обобщенных ветвей могут протекать ненулевые токи. Рассмотрим пример. При выполнении условия $\dot{E} = -Z\dot{\mathfrak{I}}$ узловое напряжение $\dot{U}_{10} = \dot{E} + Z\dot{\mathfrak{I}} = 0$. При этом ток I, протекающий по обеим обобщенным ветвям, равен нулю, а токи $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ равны $\dot{\mathfrak{I}}$.

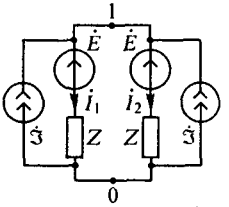


Рис. Р5.9

13. Источники тока, управляемые напряжением.

14. Возможно в том случае, если граф схемы допускает выбор дерева типа «куст». Пример такого графа представлен на рис. Р5.10.

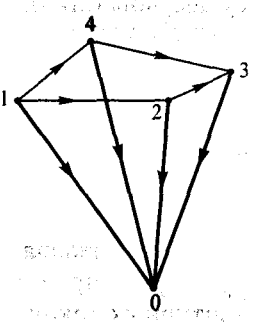


Рис. Р5.10

15. Метод узловых напряжений не требует построения дерева графа схемы и топологических матриц. Это обстоятельство делает формирование уравнений метода узловых напряжений более простым в сравнении с формированием уравнений методом сечений.

16. Расчет цепей с идеальными источниками ЭДС методом узловых напряжений изложен ниже в решении задачи 4 настоящего раздела. Рассмотренный подход справедлив и для метода сечений, однако, при применении последнего существенное ограничение, связанное с тем, что идеальный источник ЭДС должен подходить к нулевому узлу, снимается. (См. также ответ на вопрос 19).

19. Да, при этом идеальные источники ЭДС следует включать в ветви дерева графа схемы. Рассмотрим в качестве примера определение напряжений на ветвях дерева в схеме, представленной на рис. Р5.11. Ветви 1 и 3 схемы содержат идеальные источники ЭДС и, соответственно, проводимости Y_1 и Y_3 этих ветвей бесконечно велики. Система уравнений, составленная по методу сечений (см. граф схемы) имеет вид:

$$\begin{cases} (Y_1 + Y_4)\dot{U}_1 + Y_4\dot{U}_2 - Y_4\dot{U}_3 = -\dot{\mathfrak{I}}_4 - Y_1\dot{E}_1, \\ Y_4\dot{U}_1 + (Y_2 + Y_4)\dot{U}_2 - Y_4\dot{U}_3 = \dot{\mathfrak{I}}_2 - \dot{\mathfrak{I}}_4, \\ -Y_4\dot{U}_1 - Y_4\dot{U}_2 + (Y_3 + Y_4 + Y_5)\dot{U}_3 = \dot{\mathfrak{I}}_4 - Y_3\dot{E}_3. \end{cases}$$

Пренебрегая слагаемыми, имеющими конечные значения в уравнениях 1 и 3, получаем $\dot{U}_1 = -\dot{E}_1, \dot{U}_3 = -\dot{E}_3$, тогда для определения $\dot{U}_2$ имеем из второго уравнения:

$$(Y_2 + Y_4)\,\dot{U}_2 = \dot{\mathfrak{I}}_2 - \dot{\mathfrak{I}}_4 + Y_4(\dot{E}_1 - \dot{E}_3).$$

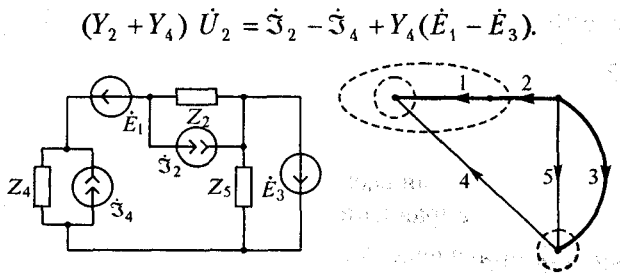


Рис. Р5.11

21. Граф такой схемы представлен на рис. Р5.12.

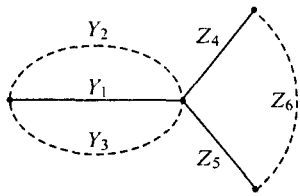


Рис. Р5.12

При расчете соответствующей схемы методами контурных токов, узловых напряжений и сечений приходится решать систему уравнений третьего порядка. Метод смешанных величин позволяет свести решение к системе уравнений второго порядка относительно тока связи 6 и напряжения на ветви 1 дерева.

22. Нет. Они могут быть разными.

УПРАЖНЕНИЯ

5. Рассчитывая токи в ветвях цепи варианта 4 методом контурных токов, выбираем условные положительные направления токов в ветвях и направления контурных токов $\dot{I}_{к1}, \dot{I}_{к2}$ как указано на рис. Р5.13, *а* и записываем уравнения

$$\dot{I}_{к1}(Z_1 + Z_3) - \dot{I}_{к2}Z_3 = \dot{E}_1,$$
$$-\dot{I}_{к1}Z_3 + \dot{I}_{к2}(Z_2 + Z_3) = -\dot{E}_2.$$

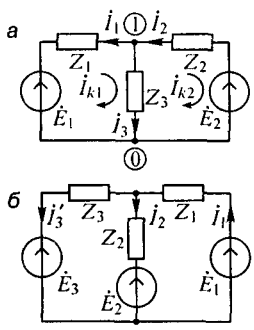


Рис. Р5.13

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 20\dot{I}_{к1} - (10 - j10)\dot{I}_{к2} = -100, \\ -(10 - j10)\dot{I}_{к1} + (20 - j10)\dot{I}_{к2} = -250 + j50, \end{cases}$$

получаем $\dot{I}_{к1} = -10 + j10$ А, $\dot{I}_{к2} = -15 + j5$ А. Токи в ветвях цепи равны $\dot{I}_1 = 10 - j10$ А, $\dot{I}_2 = 15 - j5$ А, $\dot{I}_3 = 5 + j5$ А.

Решая задачу методом узловых напряжений, нумеруем узлы цепи как указано на рис. Р5.13, *а* и записываем уравнение

$$\dot{U}_{10}Y_{11} = \dot{\Im}_1,$$

где $Y_{11} = \dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2} + \dfrac{1}{Z_3} = \dfrac{1}{10 + j10} + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10 - j10} = 0{,}2$ См,

$$\dot{\Im}_{11} = \dot{E}_1\frac{1}{Z_1} + \dot{E}_2\frac{1}{Z_2} = -\frac{100}{10 + j10} + \frac{250 - j50}{10} = 20 \text{ А}.$$

Получаем: $\dot{U}_{10} = 100$ В, и из уравнений второго закона Кирхгофа

$$-\dot{I}_1Z_1 + \dot{U}_{10} = \dot{E}_1, \quad -\dot{I}_2Z_2 - \dot{U}_{10} = -\dot{E}_2, \quad -\dot{I}_3Z_3 + \dot{U}_{10} = 0$$

находим токи $\dot{I}_1 = 10 - j10$ А, $\dot{I}_2 = 15 - j5$ А, $\dot{I}_3 = 5 + j5$ А.

В рассмотренной задаче число уравнений метода контурных токов составляет два, тогда как при решении методом узловых напряжений лишь одно. Таким образом, эту задачу целесообразно решать методом узловых напряжений.

Особенность решения задачи варианта 2 заключается в том, что узловое напряжение $\dot{U}_{10}$ (верхнему узлу присвоен номер 1) можно выразить через ЭДС $\dot{E}_1$: $\dot{U}_{10} = \dot{E}_1$ и рассчитать далее токи ветвей из уравнений: $\dot{U}_{10} - \dot{I}_3Z_3 = 0$, $\dot{U}_{10} + \dot{I}_2Z_2 = \dot{E}_2$, $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$.

Преобразование источника тока $\dot{\Im}_1$ (вариант 1) в эквивалентный ему источник ЭДС позволяет изобразить схему полученной цепи в виде (см. рис. Р5.13, *б*),

где $\dot{E}_3 = \dot{\mathfrak{I}}_1 Z_3$ и, записав далее уравнения метода контурных токов (подобно рассмотренному выше при решении задачи варианта 4), рассчитать искомые токи. При расчете токов в этой цепи методом узловых напряжений объединяем узлы, соединенные ветвью, не содержащей элементов, в один узел, записываем одно уравнение метода узловых напряжений (так как в цепи всего два узла) и, рассчитав ток $\dot{I}'_3$, находим ток в исключенной ветви $\dot{I}_3 = \dot{\mathfrak{I}}_1 - \dot{I}'_3$.

Для решения задачи варианта 5 методом контурных токов выбираем направления контурных токов в соответствующих контурах так, что $\dot{I}_{к1} = \dot{\mathfrak{I}}_1$, $\dot{I}_{к2} = \dot{\mathfrak{I}}_2$. Тогда получаем

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_{к1} + \dot{I}_{к2} = \dot{\mathfrak{I}}_1 + \dot{\mathfrak{I}}_2 = 3 - j \text{ А}.$$

Уравнение метода узловых напряжений имеет вид (верхнему узлу присвоен номер 1):

$$\dot{U}_{10}\left(\frac{1}{Z_3}\right) = \dot{\mathfrak{I}}_1 + \dot{\mathfrak{I}}_2.$$

Решая его, находим $\dot{U}_{10} = 5(3 - j)$ В и $\dot{I}_3 = 3 - j$ А.

6. Для электрической цепи варианта *а* входящую в уравнение метода узловых напряжений

$$\dot{U}_{10}\left(\frac{1}{Z_1 + Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4 + Z_5}\right) = \dot{E}_1 \frac{1}{Z_1 + Z_2} + \frac{\beta\dot{U}}{Z_4 + Z_5}$$

величину $\dot{U}$ выразим через искомое напряжение $\dot{U}_{10}$:

$$\dot{U} - \dot{I}_5 Z_4 - \dot{I}_1 Z_2 = 0, \dot{U}_{10} + \dot{I}_1(Z_1 + Z_2) = \dot{E}_1, -\dot{U}_{10} + \dot{I}_5(Z_4 + Z_5) = -\beta\dot{U}.$$

Находим:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1 - \dot{U}_{10}}{Z_1 + Z_2}, \dot{I}_5 = \frac{-\beta\dot{U} + \dot{U}_{10}}{Z_4 + Z_5} \text{ и } \dot{U} - \frac{-\beta\dot{U} + \dot{U}_{10}}{Z_4 + Z_5} Z_4 - \frac{\dot{E}_1 - \dot{U}_{10}}{Z_1 + Z_2} Z_2 = 0.$$

$$\dot{U}\left(\frac{\beta Z_4}{Z_4 + Z_5} + 1\right) = \frac{\dot{U}_{10} Z_4}{Z_4 + Z_5} + \frac{\dot{E}_1 - \dot{U}_{10}}{Z_1 + Z_2} Z_2 = \dot{U}_{10}\left(\frac{Z_4}{Z_4 + Z_5} - \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}\right) + \frac{\dot{E}_1 Z_2}{Z_1 + Z_2},$$

$$\dot{U} = \left(\frac{\beta Z_4}{Z_4 + Z_5} + 1\right)^{-1}\left[\dot{U}_{10}\left(\frac{Z_4}{Z_4 + Z_5} - \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}\right) + \frac{\dot{E}_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}\right].$$

Подставляя величину $\dot{U}$ в уравнение метода узловых напряжений и выполняя численные расчеты, получаем: $\dot{U}_{10} = 3 + j1{,}4$ В, $\dot{I}_1 = 0{,}94 - j3{,}1$ А, $\dot{I}_3 = 1{,}21 - j3$ А, $\dot{I}_5 = -0{,}27 - j0{,}1$ А.

Входящее в уравнения метода контурных токов

$$\begin{cases} \dot{I}_{к1}(Z_1 + Z_2 + Z_3) - \dot{I}_{к2} Z_3 = \dot{E}_1, \\ -\dot{I}_{к1} Z_3 + \dot{I}_{к2}(Z_3 + Z_4 + Z_5) = -\beta\dot{U}. \end{cases}$$

напряжение $\dot{U}$ выразим через контурные токи:

$$\dot{U} = \dot{I}_{к1} Z_2 + \dot{I}_{к2} Z_4$$

и получим систему уравнений

$$\begin{cases}\dot{I}_{к1}(Z_1+Z_2+Z_3)-\dot{I}_{к2}Z_3=\dot{E}_1,\\ -\dot{I}_{к1}(Z_3-\beta Z_2)+\dot{I}_{к2}(Z_3+\beta Z_4+Z_4+Z_5)=0,\end{cases}$$

характеризуемую несимметричностью матрицы коэффициентов. При подстановке численных значений и решении уравнений находим

$\dot{I}_{к1}=\dot{I}_1=0{,}94-j3{,}1$ А, $\dot{I}_{к2}=\dot{I}_5=-0{,}27-j0{,}1$ А, $\dot{I}_3=\dot{I}_{к1}-\dot{I}_{к2}=1{,}21-j3$ А.

Уравнения метода узловых напряжений для цепи варианта *в*

$$\dot{U}_{10}\left(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}\right)-\dot{U}_{20}\frac{1}{Z_3}=\dot{E}_1\frac{1}{Z_1}-\alpha\dot{I}_1,$$

$$-\dot{U}_{10}\frac{1}{Z_3}+\dot{U}_{20}\left(\frac{1}{Z_3}+\frac{1}{Z_4}\right)=\alpha\dot{I}_1$$

перепишем с учетом соотношения $\dot{U}_{10}+\dot{I}_1Z_1=\dot{E}_1$, из которого следует $\dot{I}_1=\dfrac{\dot{E}_1-\dot{U}_{10}}{Z_1}$, в виде

$$\dot{U}_{10}\left(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}-\frac{\alpha}{Z_1}\right)-\dot{U}_{20}\frac{1}{Z_3}=(1-\alpha)\frac{\dot{E}_1}{Z_1},$$

$$\dot{U}_{10}\left(\frac{\alpha}{Z_1}-\frac{1}{Z_3}\right)+\dot{U}_{20}\left(\frac{1}{Z_3}+\frac{1}{Z_4}\right)=\frac{\alpha\dot{E}_1}{Z_1}.$$

Решая его, получаем

$\dot{U}_{10}=\dot{U}_{20}=4-j12$ В, $\dot{I}_1=4(2-j)$ А, $\dot{I}_2=2(2-j)$ А, $\dot{I}_3=0$ А, $\dot{I}_4=2(2-j)$ А.

В уравнениях метода контурных токов

$$\dot{I}_{к1}(Z_1+Z_2)-\dot{I}_{к2}Z_2=\dot{E}_1,$$

$$-\dot{I}_{к1}Z_2+\dot{I}_{к2}(Z_2+Z_3+Z_4)=\alpha\dot{I}_1Z_3$$

выражаем ток $\dot{I}_1$ через контурный ($\dot{I}_1=\dot{I}_{к1}$) и получаем

$$\begin{cases}\dot{I}_{к1}(Z_1+Z_2)-\dot{I}_{к2}Z_2=\dot{E}_1,\\ -\dot{I}_{к1}(Z_2+\alpha Z_3)+\dot{I}_{к2}(Z_2+Z_3+Z_4)=0.\end{cases}$$

Решение уравнений дает значения $\dot{I}_1=\dot{I}_{к1}=4(2-j)$ А, $\dot{I}_4=\dot{I}_{к2}=2(2-j)$ А, $\dot{I}_2=2(2-j)$ А, $\dot{I}_3=0$ А.

7. Схема электрической цепи (после преобразования источников тока в источники ЭДС) принимает изображенный на рис. Р5.14 вид.

Решая задачу для условий варианта 1 методом узловых напряжений, можем, используя соотношение $\dot{U}_{10}=-\dot{E}_3=-3$ В, записать уравнения

$$\dot{U}_{20}\left(\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_4}+\frac{1}{Z_5}\right)-\dot{U}_{30}\frac{1}{Z_4}=-\dot{E}'_5\frac{1}{Z_5}+\dot{U}_{10}\frac{1}{Z_2},$$

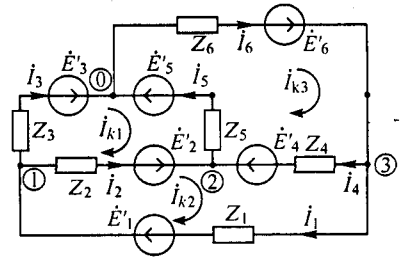


Рис. Р5.14

$$-\dot{U}_{20}\frac{1}{Z_4}+\dot{U}_{30}\left(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_4}+\frac{1}{Z_6}\right)=\dot{E}'_6\frac{1}{Z_6}+\dot{U}_{10}\frac{1}{Z_1},$$

решение которых $\dot{U}_{20}=2+j$ В, $\dot{U}_{30}=-3+6j$ В. Искомые токи равны: $\dot{I}_1=6$ А, $\dot{I}_2=+1-5j$ А, $\dot{I}_3=5(1+j)$ А, $\dot{I}_4=5j$ А, $\dot{I}_5=1$ А, $\dot{I}_6=6+5j$ А.

Решая уравнения метода контурных токов

$$\dot{I}_{к1}\cdot 1+\dot{I}_{к2}\cdot j-\dot{I}_{к3}(1+j)=4,$$

$$\dot{I}_{к1}\cdot j+\dot{I}_{к2}(1+j)-\dot{I}_{к3}(1+j)=0,$$

$$-\dot{I}_{к1}(1+j)-\dot{I}_{к2}(1+j)+\dot{I}_{к3}(2+j)=1,$$

находим контурные токи $\dot{I}_{к1}=5(1+j)$ А, $\dot{I}_{к2}=6$ А, $\dot{I}_{к3}=6+5j$ А и далее токи ветвей.

8. Граф схемы изображен на рис. Р5.15.

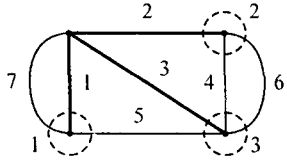


Рис. Р5.15

Решая уравнения метода сечений

$$(Y_1+Y_5+Y_7)\dot{U}_1+0\cdot\dot{U}_2+(-Y_5)\dot{U}_3=Y_7\dot{E}_7,$$

$$0\cdot\dot{U}_1+(Y_2+Y_4+Y_6)\dot{U}_2+(-Y_4-Y_6)\dot{U}_3=-Y_6\dot{E}_6,$$

$$-Y_5\dot{U}_1+(-Y_4-Y_6)\dot{U}_2+(Y_3+Y_4+Y_5+Y_6)\dot{U}_3=Y_6\dot{E}_6,$$

и учитывая, что $Y_6=Y_7=\infty$, находим: $\dot{U}_1=\dot{E}_7=10$ В, $\dot{U}_2=Y_4\dot{E}_6/Y_2=-5+j15$ В, $\dot{U}_3=\dot{U}_2+\dot{E}_6=-10+j20$ В, $\dot{I}_1=5-j5$ А, $\dot{I}_2=-5+j5$ А, $\dot{I}_3=j10$ А, $\dot{I}_4=-5+j5$ А, $\dot{I}_5=5-j15$ А, $\dot{I}_6=0$ А, $\dot{I}_7=j10$ А.

9. Граф схемы, дерево (ветвь *2*) и связи (ветви *1*, *3*) изображены на рис. Р5.16.

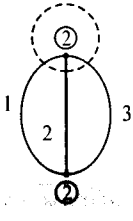


Рис. Р5.16

Принимая в качестве искомых величин напряжение $\dot{U}_2$ и токи $\dot{I}_1$, $\dot{I}_3$, записываем уравнения метода смешанных величин

$$\dot{U}_2\left(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}\right)=\dot{E}\cdot\frac{1}{Z_1},$$

$$\dot{I}_1(Z_1+Z_2)-\dot{I}_3Z_2=\dot{E}$$

$$-\dot{I}_1Z_2+\dot{I}_3(Z_2+Z_3)=0.$$

10. Если источник тока $\dot{\mathfrak{I}}_{ab}=\dot{\mathfrak{I}}$, действуя в ветви *ab* сколь угодно сложной цепи, при отсутствии в цепи прочих источников тока вызывает в другой ветви *cd* этой цепи напряжение $\dot{U}_{cd}=\dot{U}$, то такой же источник тока $\dot{\mathfrak{I}}_{cd}=\dot{\mathfrak{I}}$, действуя в ветви *cd*, при отсутствии прочих источников тока вызовет в ветви *ab* такое же напряжение $\dot{U}_{cd}=\dot{U}$.

11. Найдем методом наложения токи в электрической цепи варианта *в*. При действии источника $\dot{E}_1$ токи в ветвях цепи равны (рис. Р5.17, *а*).

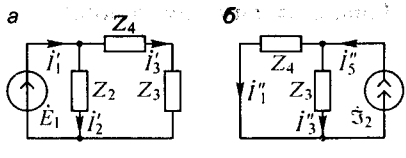


Рис. Р5.17

$$\dot{I}'_2=\frac{\dot{E}_1}{Z_2},\ \dot{I}'_3=\dot{I}'_4=\frac{\dot{E}_1}{Z_3+Z_4},\ \dot{I}'_1=\dot{I}'_2+\dot{I}'_4,\ \dot{I}'_5=0.$$

Токи в ветвях электрической цепи во втором режиме, когда действует лишь источник тока $\dot{J}_2$, равны (рис. Р5.17, *б*)

$$\dot{I}_5'' = \dot{J}_2,\ \dot{I}_3'' = \dot{J}_2 \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4},\ \dot{I}_4'' = \dot{J}_2 \frac{Z_3}{Z_3 + Z_4},\ \dot{I}_1'' = \dot{I}_4'',\ \dot{I}_2'' = 0.$$

Таким образом, $\dot{I}_1 = \dot{I}_1' - \dot{I}_1''$, $\dot{I}_2 = \dot{I}_2'$, $\dot{I}_3 = \dot{I}_3' + \dot{I}_3''$, $\dot{I}_4 = \dot{I}_4' - \dot{I}_4''$, $\dot{I}_5 = \dot{I}_5'$.

12. Ток $\dot{I}_k$ k-й ветви цепи, рассчитываемой с помощью принципа взаимности определяется из соотношения:

$$\dot{I}_k = \sum_m \dot{I}_m^{(k)} \dot{E}_m \Big/ \dot{E}_k,$$

где $\dot{I}_m^{(k)}$ — однократно рассчитываемые токи во всех m ветвях схемы при действии в k-ой ветви ЭДС $\dot{E}_k$, $\dot{E}_m$ — ЭДС, действующая в m-й ветви. Таким образом, наибольший эффект применения метода расчета, основанного на принципе взаимности, будет достигаться при расчете цепей с относительно большим числом источников ЭДС.

13. На основании теоремы об эквивалентном генераторе заменим цепь относительно выделенных зажимов A и B эквивалентным генератором с внутренним сопротивлением $R_г$ и ЭДС $E_г$. Тогда $R_г = \dfrac{U_{AB0}}{I_{AB\,кз}} = 2$ Ом. Таким образом, ток в резисторе $R_{AB} = 6$ Ом равен $I = \dfrac{U_{AB0}}{R_г + R_{AB}} = 0{,}5$ А.

14. При разрыве ветви AB напряжение U_0 находим, учитывая уравнение второго закона Кирхгофа для контура, показанного на рис. Р5.18:

$$\dot{I}_1 Z_1 + \dot{U}_0 + \dot{I}_4 Z_4 = \dot{E}.$$

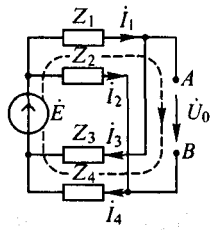


Рис. Р5.18

Так как

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{Z_1 + Z_3} = \frac{24}{8} = 3\text{ А},\ \dot{I}_4 = \frac{\dot{E}}{Z_2 + Z_4} = \frac{24}{16} = 1{,}5\text{ А},$$

то $\dot{U}_0 = \dot{E} - \dot{I}_1 Z_1 - \dot{I}_4 Z_4 = 24 - 12 - 12 = 0$.

Учитывая, что $Z_г + Z_{ab} \neq 0$, находим искомый ток $\dot{I}_{ab} = 0$.

15. Преобразуя источник тока $\dot{J}_2$ в схеме *а* в эквивалентный ему источник ЭДС $\dot{E} = \dot{J}_2 \cdot j\omega L_3$, получаем: $\dot{I} = \dfrac{\dot{E}_1 - \dot{J}_2 \cdot j\omega L_3}{r_1 + j\omega L_3}$. Записывая уравнение метода узловых напряжений $\dot{U}_{10}\left(\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{j\omega L_3} + j\omega C_2\right) = \dot{E}_1 \dfrac{1}{r_1} + \dot{E}_2 j\omega C_3$ в схеме *б* и рассчитывая $\dot{U}_{10}$, находим далее искомый ток $\dot{I} = \dfrac{\dot{E}_1 - \dot{U}_{10}}{r_1}$ (узел 1 — верхний узел схемы).

ЗАДАЧИ

1. Рассмотрим преобразование соединения n-лучевой звездой в эквивалентный n-угольник ($n > 3$). Пронумеруем узлы схемы, в которой выделена рассматриваемая многолучевая звезда, как показано на рис. Р5.19.

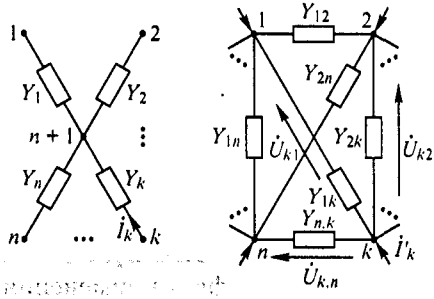


Рис. Р5.19

Для тока k-го «луча» звезды имеем

$$\dot{I}_k = (\dot{U}_{k0} - \dot{U}_{n+1,0})Y_k, \quad k = 1, \ldots n, \qquad (*)$$

где $\dot{U}_{k0}$ — напряжение между k-м и нулевым узлами. Записывая уравнение первого закона Кирхгофа для узла $n + 1$, получаем

$$\sum_{k=1}^{k=n} \dot{I}_k = \sum_{k=1}^{k=n} (\dot{U}_{k0} - \dot{U}_{n+1,0})Y_k = 0,$$

откуда

$$\dot{U}_{n+1,0} = \sum_{k=1}^{k=n} \dot{U}_{k0}Y_k \Big/ \sum_{k=1}^{k=n} Y_k .$$

Подставляя выражение для $\dot{U}_{n+1,0}$ в соотношение (*), получим

$$\dot{I}_k = \left(\dot{U}_{k,0} - \sum_{k=1}^{k=n} \dot{U}_{k,0}Y_k \Big/ \sum_{k=1}^{k=n} Y_k \right) Y_k =$$

$$= \left[(\dot{U}_{k,0} - \dot{U}_{10})Y_1 + (\dot{U}_{k,0} - \dot{U}_{20})Y_2 + (\dot{U}_{k,0} - \dot{U}_{k-1,0})Y_{k-1} + \right.$$

$$\left. + (\dot{U}_{k,0} - \dot{U}_{k+1,0})Y_{k+1} + \ldots + (\dot{U}_{k,0} - \dot{U}_{n,0})Y_n \right] \left(Y_k \Big/ \sum_{k=1}^{k=n} Y_k \right) =$$

$$= (\dot{U}_{k,1}Y_1 + \dot{U}_{k,2}Y_2 + \ldots + \dot{U}_{k,k-1}Y_{k-1} + \dot{U}_{k,k+1}Y_{k+1} + \dot{U}_{k,n} \cdot Y_n)(Y_k / Y_\Sigma) =$$

$$= \frac{Y_k}{Y_\Sigma} \sum_{p=1}^{p=n} \dot{U}_{k,p}Y_p, \quad k = 1, \ldots n, \quad Y_\Sigma = \sum_{k=1}^{k=n} Y_k .$$

Таким образом, ток, входящий в k-й узел многолучевой звезды, можем представить в виде:

$$\dot{I}_k = \dot{U}_{k,1} \frac{Y_1 Y_k}{Y_\Sigma} + \dot{U}_{k,2} \frac{Y_2 Y_k}{Y_\Sigma} + \ldots + \dot{U}_{k,k-1} \frac{Y_{k-1} Y_k}{Y_\Sigma} + \dot{U}_{k,k+1} \frac{Y_{k+1} Y_k}{Y_\Sigma} + \ldots + \dot{U}_{k,n} \frac{Y_n Y_k}{Y_\Sigma} .$$

Ток $\dot{I}'_k$, входящий в k-й узел многоугольника (рис. Р5.19), можем определить из соотношения

$$\dot{I}'_k = \dot{U}_{k,1}Y_{k,1} + \dot{U}_{k,2}Y_{k,2} + \ldots + \dot{U}_{k,k-1}Y_{k,k-1} + \dot{U}_{k,k+1}Y_{k,k+1} + \ldots + \dot{U}_{k,n}Y_{k,n} .$$

Для эквивалентности схем, представленных на рис. Р5.19, необходимо, чтобы при равных напряжениях $\dot{U}_{kp}(k, p = 1, \ldots n,\ k \neq p)$, были равны токи $\dot{I}_k = \dot{I}'_k$, $k = 1, \ldots n$. Сопоставляя выражения для токов, получаем $Y_{kp} = \dfrac{Y_p Y_k}{Y_\Sigma}$.

Отметим, что обратная задача эквивалентного преобразования n-угольника в n-лучевую звезду ($n > 3$) в общем случае неразрешима.

2. Способ преобразования показан на примере (рис. Р5.20).

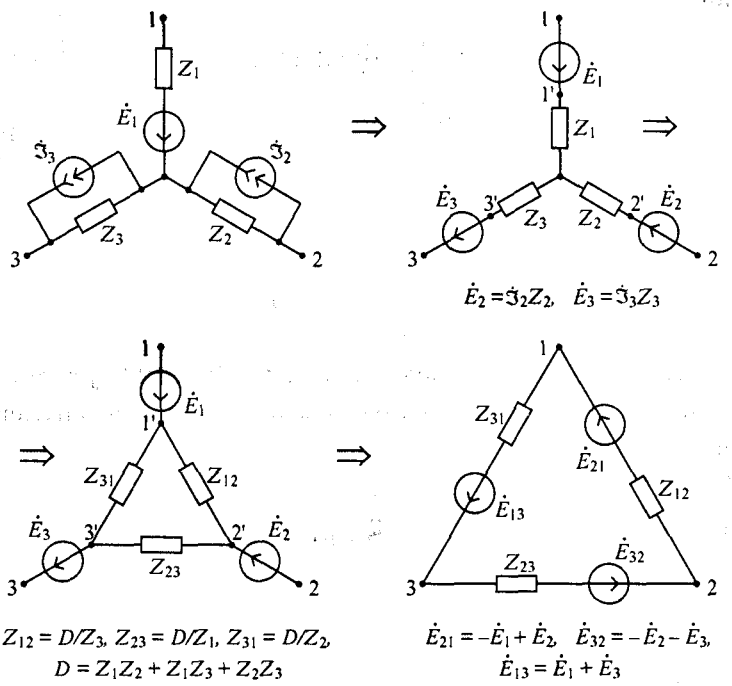


Рис. Р5.20

3. Вектор напряжений $\mathbf{U}_в$ всех ветвей схемы может быть вычислен по формуле $\mathbf{U}_в = \mathbf{A}^t\,\mathbf{U}_0$. Если ветви графа пронумерованы таким образом, что ветви дерева имеют меньшие номера, то первые q (где q — число строк матрицы $\mathbf{A}$) элементов вектора $\mathbf{U}_в$ составляют вектор $\mathbf{U}_1$. В противном случае воспользуемся тем, что $\mathbf{U}_в = \mathbf{D}^t\mathbf{U}_1 = \mathbf{A}^t\mathbf{U}_0$, откуда получим

$$\mathbf{DA}^t\mathbf{U}_0 = \mathbf{DD}^t\mathbf{U}_1 \quad \text{и} \quad \mathbf{U}_1 = (\mathbf{DD}^t)^{-1}\mathbf{U}_0.$$

Матрица $\mathbf{DD}^t = \mathbf{D1D}^t$ не особенная, так как представляет собой матрицу узловых проводимостей цепи, в каждой ветви которой находится проводимость, значение которой равно единице.

4. Рассмотрим схему из ответа на вопрос 4. Ветвь 3 схемы содержит идеальный источник ЭДС. Система уравнений метода узловых напряжений имеет вид:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{Z_1}+\dfrac{1}{Z_2}\right)\dot{U}_{10} - \dfrac{1}{Z_1}\dot{U}_{20} - 0\cdot\dot{U}_{30} = -\dfrac{\dot{E}_1}{Z_1}, \\ -\dfrac{1}{Z_1}\dot{U}_{10} + \left(\dfrac{1}{Z_3}+\dfrac{1}{Z_1}+\dfrac{1}{Z_5}\right)\dot{U}_{20} - \dfrac{1}{Z_5}\dot{U}_{30} = \dfrac{\dot{E}_3}{Z_3}+\dfrac{\dot{E}_1}{Z_1}+\dot{J}_6, \\ 0\cdot\dot{U}_{10} - \dfrac{1}{Z_5}\dot{U}_{20} + \left(\dfrac{1}{Z_4}+\dfrac{1}{Z_5}\right)\dot{U}_{30} = 0. \end{cases}$$

Во втором уравнении все слагаемые, не содержащие $1/Z_3$, имеющие конечное значение, могут быть отброшены. Тогда второе уравнение примет вид:

$$\frac{1}{Z_3}\dot{U}_{20} = \frac{\dot{E}_3}{Z_3}, \text{ откуда } \dot{U}_{20} = \dot{E}_3.$$

Учитывая это соотношение, исходную систему уравнений можем преобразовать к виду:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right)\dot{U}_{10} = \frac{1}{Z_1}(\dot{E}_3 - \dot{E}_1), \\ \left(\frac{1}{Z_4} + \frac{1}{Z_5}\right)\dot{U}_{30} = \frac{1}{Z_5}\dot{E}_3, \end{cases}$$

откуда могут быть определены узловые напряжения $\dot{U}_{10}$ и $\dot{U}_{30}$. Отметим, что для использования рассмотренного приема необходимо так перенумеровать узлы схемы, чтобы идеальный источник ЭДС подходил к нулевому узлу, что не всегда возможно, если схема содержит несколько идеальных источников ЭДС.

5.3. Расчет электрических цепей при наличии взаимной индукции

ВОПРОСЫ

1. Это возможно, если напряжение взаимной индукции на катушке направлено навстречу напряжению самоиндукции и превышает его по модулю. Катушки в этом случае должны быть включены встречно и значение $|M_{12}I_2|$ должно быть больше значения L_1I_1 (I_1, I_2 — токи катушек 1 и 2).

2. При любом способе включения индуктивно связанных катушек пассивной цепи активная мощность не может быть отрицательной.

4. Обозначив $\dot{I}_{1-}$ — ток катушки L_1 до замыкания ключа, $\dot{I}_{1+}$, $\dot{I}_{2+}$ — токи катушек после замыкания ключа, можем после преобразования уравнений законов Кирхгофа $\dot{I}_{1-}j\omega L_1 = \dot{I}_{1+}j\omega L_1 + \dot{I}_{2+}j\omega M = \dot{I}_{2+}j\omega L_2 + \dot{I}_{1+}j\omega M$ получить соотношения

$$\dot{I}_{1+} = \dot{I}_{1-}\frac{L_1L_2 - L_1M}{L_1L_2 - M^2}, \dot{I}_{2+} = \dot{I}_{1-}\frac{L_1^2 - L_1M}{L_1L_2 - M^2}, \dot{I}_{1+} + \dot{I}_{2+} = \dot{I}_{1-}\frac{L_1L_2 - 2L_1M + L_1^2}{L_1L_2 - M^2} = \dot{I}_{+}.$$

Показание амперметра A_1 определяется действующим значением тока I_+, а амперметра A_2 — тока I_{1+}.

Как видно, ток катушки L_1 после замыкания ключа не изменится при $L_1 = M$ (либо при $M = 0$), уменьшится при $L_1 > M$ и увеличится при $L_1 < M$.

Ток I_+ не изменится при $M = L_1$, возрастет при $M > L_1$ и уменьшится при $M < L_1$.

5. Входное сопротивление цепи *а*, изображенной на рисунке слева цепи больше, так как напряжения взаимной индукции на катушках этой цепи совпадают с напряжениями самоиндукции, что и ведет к увеличению их сопротивления.

7. При условии *а* имеем $\Delta x > 0$ и, следовательно, величина $\omega L_2 + x_{\text{пр}} < 0$, так что приемник должен характеризоваться эквивалентным емкостным сопротивлением. При условии *б* приемник имеет эквивалентное индуктивное сопротивление.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Слагаемое $j\omega L_2\dot{I}_2$ в первом уравнении следует заменить на $j\omega L_3\dot{I}_3$. Знаки перед последними двумя слагаемыми во втором уравнении неправильны.

2. Активное сопротивление катушек равно $r_1 + r_2 = \dfrac{P}{I^2} = 30$ Ом. Из соотношений

$$100 = \sqrt{(1\cdot 30)^2 + [\omega(L_1 + L_2 - 2M)]^2 \cdot 1},$$

$$100 = \sqrt{(0{,}6\cdot 30)^2 + [\omega(L_1 + L_2 + 2M)]^2 \cdot 0{,}36}$$

находим: $L_1 + L_2 + 2M = \dfrac{163{,}9}{\omega}$, $L_1 + L_2 - 2M = \dfrac{95{,}4}{\omega}$, $M \cong 6{,}8\cdot 10^{-3}$ Гн.

3. Имеем: $L_1 = \dfrac{5}{314} \cong 1{,}6\cdot 10^{-2}$ Гн, $L_2 = \dfrac{20}{314} \cong 6{,}4\cdot 10^{-2}$ Гн, $M = k\sqrt{L_1 L_2} \cong 1{,}6\cdot 10^{-2}$ Гн, $x_э = 5 + 20 + 2\cdot 314\cdot 1{,}6\cdot 10^{-2} \cong 35$ Ом, $I = \dfrac{120}{35} \cong 3{,}4$ А, $U_1 = (5 + 314\cdot 1{,}6\cdot 10^{-2})\cdot 3{,}4 \cong$ $\cong 34{,}1$ В, $U_2 = (20 + 314\cdot 1{,}6\cdot 10^{-2})\cdot 3{,}4 \cong 85{,}1$ В.

4. Для условий варианта *а* получаем:

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{jx_1 - jx_C + r} = \frac{200}{40 + j(20 - 10)} = \frac{20(4 - j)}{17} \text{ А.}$$

Из уравнения $\dot{I}jx_M + \dot{I}jx_C + \dot{U} = 0$ находим: $\dot{U} = -j\dot{I}20 = -\dfrac{400}{17}(1 + 4j)$ В, $U \cong 97$ В.

При изменении маркировки одной из катушек получим уравнение $-\dot{I}\cdot jx_M + \dot{I}\cdot jx_C + \dot{U} = 0$, из которого следует: $U = 0$.

6. Коэффициент связи получаем равным нулю при размещении катушек во взаимно перпендикулярных плоскостях таким образом, что поток взаимной индукции обращается в нуль. Коэффициент связи равен своему наибольшему значению при размещении катушек в одной и той же плоскости таким образом, что поток взаимной индукции принимает наибольшее значение.

8. Уравнения трехобмоточного трансформатора имеют вид:

$$\dot{I}_1(r_1 + j\omega L_1) + \dot{I}_2 j\omega M_{12} + \dot{I}_3 j\omega M_{13} = \dot{U}_1,$$

$$\dot{I}_1 j\omega M_{21} + \dot{I}_2(r_2 + j\omega L_2 + Z_2) + \dot{I}_3 j\omega M_{23} = 0,$$

$$\dot{I}_1 j\omega M_{31} + \dot{I}_2 j\omega M_{32} + \dot{I}_3(r_3 + j\omega L_3 + Z_3) = 0.$$

9. Вносимые сопротивления равны:

$$\Delta r = \frac{\omega^2 M^2}{r_{II}^2 + x_{II}^2} r_{II} = 135 \text{ Ом } (\omega M = = k\sqrt{\omega L_1 \cdot \omega L_2} = 1{,}2\cdot 10^3 \text{ Ом}),$$

$$\Delta x = -\frac{\omega^2 M^2}{r_{II}^2 + x_{II}^2} x_{II} = -300 \text{ Ом.}$$

Комплексное входное сопротивление

$$Z_{вх} = r_1 + \Delta r + j(x_1 + \Delta x) = (3{,}35 + j7)\cdot 10^2 \text{ Ом.}$$

10. Используя опыты холостого хода, получаем: $Z_{вх} = r_1 + jx_1 = \dfrac{\dot U_1}{\dot I_{1xx}} = \dfrac{200}{20(1-j3)} =$

$= 1 + j3$ Ом, так что $r_1 = 1$ Ом, $x_1 = 3$ Ом, $x_M = \dfrac{U_{2xx}}{I_{1xx}} = \dfrac{60\sqrt{10}}{20\sqrt{10}} = 3$ Ом. Из уравнения

$\dot U_1 = \left(r_1 + jx_1 + \dfrac{x_м^2}{r_2 + jx_2} \right) \dot I_{1кз}$ получаем $r_2 + jx_2 = \dfrac{x_м^2}{(\dot U_1 / \dot I_{1кз}) - r_1 - jx_1} \cong 9{,}1 + j3{,}1$ Ом.

11. Значение величины $L_1 = \dfrac{x_1}{\omega}$ находим из выражения $z_{вх} = \sqrt{r_1^2 + x_1^2} = \dfrac{U}{I_1}$;

$$L_1 = \frac{1}{2\pi \cdot 500 \cdot 10^3} \sqrt{\left(\frac{200}{8}\right)^2 - 4} \cong 8 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}, \quad M = \frac{E_2}{\omega I_1} = \frac{368}{2\pi \cdot 500 \cdot 10^3 \cdot 8} \cong 1{,}5 \cdot 10^{-5} \text{ Гн}.$$

ЗАДАЧИ

7. Ток в неразветвленном участке цепи равен сумме токов n катушек $I = n\dfrac{U}{\omega[L_0 + (n-1)M]}$. Эквивалентная индуктивность цепи $L_{экв} = \dfrac{L_0 + (n-1)M}{n}$.

При $n \to \infty$ получаем $L_{экв} \to M$.

6.1. Резонанс при последовательном соединении элементов *r, L, C*

ВОПРОСЫ

5. Полоса пропускания пропорциональна затуханию d цепи, представленной на рис. Р6.1. Затухание связано с параметрами r, L, C цепи и резонансной частотой ω_0 соотношениями

$$d = \frac{r}{\sqrt{L/C}} = \frac{r}{\omega_0 L} = \frac{r}{1/\omega_0 C}.$$

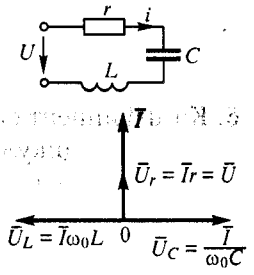


Рис. Р6.1

Приведенные соотношения позволяют определить влияние тех или иных параметров на ширину полосы пропускания. Полоса пропускания для варианта *а*) уменьшится; *б*) увеличится; *в*) уменьшится; *г*) увеличится; *д*) увеличится.

6. *а*) да; *б*) нет.

УПРАЖНЕНИЯ

2. Зависимость тока I от частоты определяется соотношением:

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\eta - \dfrac{1}{\eta}\right)^2}},$$

где $\eta = \omega/\omega_0$ — относительная частота, а $I_0 = \dfrac{1}{r} U = \dfrac{Q}{\rho} U = 44$ А — ток в цепи при резонансе. Неравенство $I > 31$ А выполняется при $\eta_1 < \eta < \eta_2$, $\eta_1 \cong 0{,}975$, $\eta_2 \cong 1{,}025$,

так что диапазон изменения частоты ω, при котором ток в контуре больше 31 А, будет $0{,}05\omega_0$.

Отметим, что, так как значение тока $I_0 = 44$ А при резонансе отличается от тока 31 А на границах диапазона приблизительно в $\sqrt{2}$ раз (так были заданы числовые данные этого упражнения), то разность относительных частот составляет $\eta_2 - \eta_1 = 1/Q$. Это свойство последовательного колебательного контура дает возможность легко оценить ширину полосы пропускания контура по его добротности.

3. При резонансе имеем $U_{C0} = I_0 \dfrac{1}{\omega_0 C}$, $U_0 = I_0 r$, где U_0, U_{C0}, I_0 — соответственно, напряжение на входе, напряжение на конденсаторе и ток в цепи, представленной на рис. Р6.1. Тогда $U_{C0} = \dfrac{1}{C}\dfrac{U_0}{\omega_0 r}$, следовательно, для уменьшения напряжения U_{C0} на 10 % емкость C конденсатора необходимо увеличить приблизительно в 1,11 раза.

4. В соответствии с условием задачи необходимо выполнение равенства $\omega_1 L - \dfrac{1}{\omega_1 C} = \dfrac{1}{\omega_2 C} - \omega_2 L$. Отсюда получаем искомое отношение $\omega_1\omega_2 = 1/LC$.

5. Из равенства коэффициентов мощности при различных частотах ω_1 и ω_2 изменения тока:

$$\cos\varphi_1 = \frac{r}{\sqrt{r^2 + (\omega_1 L - 1/\omega_1 C)^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + (\omega_2 L - 1/\omega_2 C)^2}} = \cos\varphi_2$$

следует, что реактивные сопротивления при этих частотах одинаковы по модулю и противоположны по знаку. Пусть $\omega_2 > \omega_1$, тогда $-(\omega_1 L - 1/\omega_1 C) = \omega_2 L - 1/\omega_2 C$, откуда и определяем резонансную частоту ω_0

$$(\omega_1 + \omega_2)LC = \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\omega_1\omega_2}.$$

6. На рис. Р6.2 изображена схема с измерительными приборами.

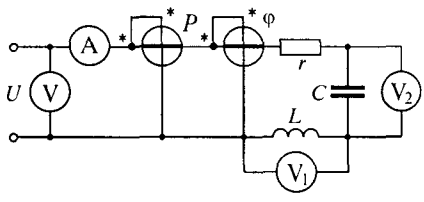


Рис. Р6.2

Если имеется возможность изменения частоты подводимого к цепи напряжения, то для нахождения резонансной частоты достаточно подключения одного из приборов (амперметра А, ваттметра Р либо фазометра φ). При $\omega = \omega_{рез}$ показания амперметра и ваттметра — максимальные, фазометра — нуль.

Если частота ω источника напряжения постоянна, то для нахождения $\omega_{рез}$ следует выполнить измерения для определения параметров L, C, после чего рассчитать частоту $\omega_{рез}$.

8. Так как при $\omega \to \infty$ и действии на входе цепи источника синусоидального напряжения $U = \text{const}$ имеем $U_L \to U$, то зависимость $U_L(\omega)$ имеет экстремум

только в том случае, если при некоторой частоте выполняется условие $U_L > U$. Учитывая, что $\frac{\dot{U}_L}{U} = \frac{-\omega^2 LC}{1-\omega^2 LC + jr\omega C}$, можем получить $\frac{U_L}{U} = \frac{\omega^2 LC}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + r^2\omega^2 C^2}}$, откуда после несложных преобразований получаем условие $1 - 2\omega^2 LC + (r\omega C)^2 < 0$, при выполнении которого справедливо соотношение $U_L > U$. Используя обозначения $(\omega/\omega_0) = \eta$, $r\omega C = d$, находим искомое условие $\eta > (2 - d^2)^{-0,5}$, из которого следует, что соотношение $U_L > U$ выполняется при $d < 1,41$.

10. См. решение упражнения 8.

6.2. Резонанс при параллельном соединении элементов *g, L, C*

ВОПРОСЫ

3. Добротность Q может быть определена как кратность превышения тока в катушке или конденсаторе тока I_0 в неразветвленном участке цепи при резонансе $Q = I_{C0}/I_0$.

Таким образом, $I_{C0} = QI_0 = 8$ А, следовательно, для измерения тока конденсатора необходим амперметр с верхним пределом измерения не менее 8 А.

6. Эквивалентная активная проводимость $g_э$ цепи равна g и не зависит от частоты, однако эквивалентное активное сопротивление $r_э = \frac{g}{g^2 + (1/\omega L - \omega C)^2}$, как видно, есть функция частоты.

УПРАЖНЕНИЯ

1. *а*) Учитывая, что добротность контура равна $(I_{C0}/I_{вх0}) = \gamma/g$, где $\gamma = (C/L)^{0,5}$, из соотношения $\gamma = 2g$ получаем $g = 0,5(C/L)^{0,5} = 5\cdot10^{-3}$См , *б*) $g = 0,25(C/L)^{0,5} = 2,5\cdot10^{-3}$ См, *в*) Так как при резонансе справедливо соотношение $I_g = I_{вх}$, получаем добротность $Q = 1$ и проводимость $g = 10^{-2}$ См.

5. *а*) $I = I_g > I_L = I_C$, *б*) $I = I_g < I_L = I_C$.

ЗАДАЧИ

4. Зависимость $x_э(\omega)$ цепи имеет вид:

$$x_э = \frac{-\omega L \frac{1}{\omega C}}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} = \frac{-\omega L}{\omega^2 LC - 1}.$$

Тогда

$$\frac{dx_э}{d\omega} = L\frac{\omega^2 LC + 1}{(\omega^2 LC - 1)^2} > 0 \quad \text{при любых } \omega.$$

5. Так как по условию задачи $U = \text{const}$, то и показания ваттметра от частоты не зависят.

6.3. Резонанс в цепях, содержащих только реактивные элементы

ВОПРОСЫ

1. Если эта цепь имеет полюс при $\omega = 0$, то число нулей может быть равным одному либо двум (одному, если при $\omega \to \infty$ имеем $x \to 0$, и двум, если при $\omega \to \infty$ имеем $x \to \infty$). Если же цепь имеет при $\omega = 0$ нуль, то число нулей может быть равным двум (при этом $x \to 0$ при $\omega \to \infty$) либо трем, если $x \to \infty$ при $\omega \to \infty$.

4. Число нулей, как и число полюсов, в обоих случаях равно числу контуров.

5. На рис. Р6.3, *а* изображена схема электрической цепи, зависимость $x_{вх}(\omega)$ которой имеет два нуля и три полюса. Дуальная электрическая цепь (рис. Р6.3, *б*) имеет три нуля и два полюса.

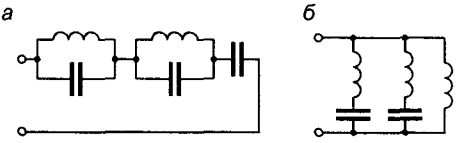


Рис. Р6.3

УПРАЖНЕНИЯ

1. Для построения характеристик $x_{вх}(\omega)$, $b_{вх}(\omega)$ можно воспользоваться принципом наложения, складывая зависимости $x(\omega)$ отдельных элементов (или контуров) при их последовательном соединении либо зависимости $b(\omega)$ элементов при параллельном соединении. Если одна из зависимостей, например, $x(\omega)$ построена, то для построения зависимости $b(\omega)$ этого же участка цепи следует воспользоваться соотношением $b(\omega) = 1/x(\omega)$.

Для цепи варианта *а* зависимости $x(\omega)$ и $b(\omega)$ изображены на рис. Р6.4.

Дуальная для варианта *а* цепь изображена на рис. Р6.5.

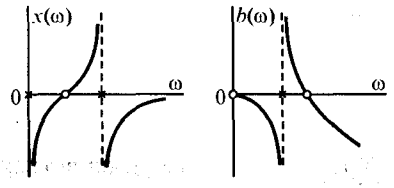


Рис. Р6.4

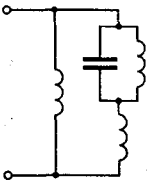


Рис. Р6.5

Зависимости $b(\omega)$ и $x(\omega)$ для нее приведены на рис. Р6.6.

Зависимости $x(\omega)$, $b(\omega)$ для цепи варианта *д* имеют показанный на рис. Р6.7 вид.

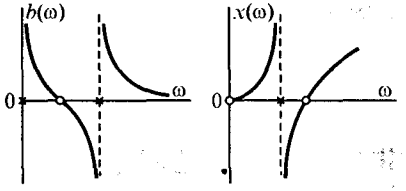


Рис. Р6.6

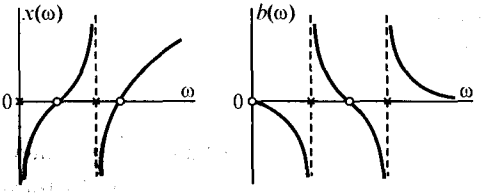


Рис. Р6.7

Дуальная для нее цепь (рис. Р6.8) характеризуется зависимостями, приведенными на рис. Р6.9.

2. Частотная характеристика $x(\omega)$ изображена на рис. Р6.10. В полюсе, лежащем между нулями функции $x(\omega)$, сопротивление одной из LC-ветвей имеет индуктивный характер, тогда как другой — емкостной характер. Это приводит к появлению резонанса токов.

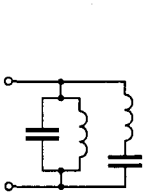


Рис. Р6.8

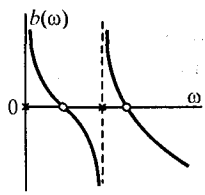
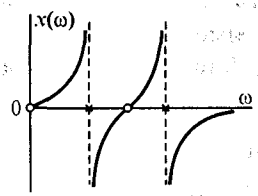
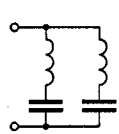


Рис. Р6.9





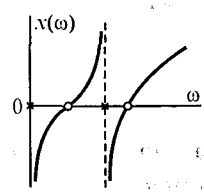


Рис. Р6.10

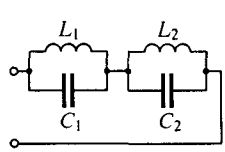
4. Так как до замыкания ключа в цепи варианта *а* наблюдался резонанс, то параметры L, C связаны соотношением $\omega_0 = (LC)^{-0,5}$. После замыкания ключа контур L, C остается настроенным в резонанс на ту же частоту ω_0. Токи амперметров A_1 и A_3 обращаются в нуль, ток амперметра A_2 увеличивается (он станет равным $U_{вх}/\omega_0 L$). Показания вольтметра V_1 и ваттметра — нуль, тогда как вольтметр V_2 покажет входное напряжение.

В цепи варианта *б* показания вольтметра и амперметра после замыкания ключа уменьшатся.

ЗАДАЧИ

1. Электрическая цепь может содержать ветви с последовательно соединенными катушками индуктивности или конденсаторами. Такие элементы можно объединить в один, учитывая, что при последовательном соединении элементов имеем $L = \sum_k L_k$ и $1/C = \sum_k 1/C_k$. Аналогично, можно объединить параллельно соединенные ветви, содержащие однотипные элементы, например, катушки индуктивности или конденсаторы: $1/L = = \sum_k 1/L_k$, $C = \sum_k C_k$. В итоге любая из ветвей цепи будет содержать либо один элемент (L или C) либо последовательно соединенные элементы L и C. Если в полученной таким образом цепи нет контуров, содержащих реактивные элементы одного вида (например, конденсаторов), а также отсутствуют такие сечения, которые разрезают ветви с реактивными элементами одного и того же вида, то при числе элементов цепи, равном n, полное число нулей и полюсов частотной характеристики $x(\omega)$ или $b(\omega)$ оказывается равным n.

2. Электрическая цепь с двумя последовательно соединенными контурами L, C (рис. Р6.11) имеет показанную здесь же характеристику $x_{вх}(\omega)$ при условии $L_1C_1 \neq L_2C_2$.



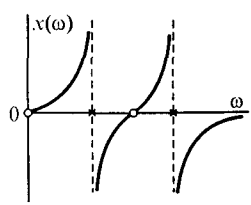


Рис. Р6.11

Характеристика $x_{вх}(\omega)$ дуальной электрической цепи, как нетрудно проверить, также имеет два нуля и два полюса.

6.4. Частотные характеристики электрических цепей

УПРАЖНЕНИЯ

1. Для цепи варианта *д* имеем:

$$K(j\omega)=\frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)}=\frac{I(j\omega)\cdot r}{U_1(j\omega)}=$$

$$=\frac{jr\omega C}{1+jr\omega C}=\frac{(r\omega C)^2}{1+(r\omega C)^2}+j\frac{r\omega C}{1+(r\omega C)^2},$$

$$K(\omega)=|K(j\omega)|=\frac{r\omega C}{\sqrt{1+(r\omega C)^2}},\quad \varphi(\omega)=\psi_{u2}-\psi_{u1}=\operatorname{arctg}\frac{1}{r\omega C}.$$

Характер изменения функций $K(\omega)$, $\varphi(\omega)$ показан на рис. Р6.12.

2. См. решение упражнения 8 § 6.1.

3. Для варианта *а* получаем

$$K(j\omega)=\frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)}=\frac{1}{1+jr\omega C}=\frac{1}{1+(r\omega C)^2}-j\frac{r\omega C}{1+(r\omega C)^2},$$

$$F_1(\omega)=\frac{1}{1+(r\omega C)^2}=\frac{1}{1+\omega^2T^2},\quad F_2(\omega)=-\frac{r\omega C}{1+(r\omega C)^2}=-\frac{\omega T}{1+\omega^2T^2}.$$

Характер изменения функций $F_1(\omega)$, $F_2(\omega)$ показан на рис. Р6.13.

Годограф $K(j\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}e^{-j\operatorname{arctg}\omega T}$ амплитудно-фазовой частотной характеристики показан на рис. Р6.14.

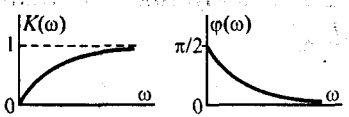


Рис. Р6.12

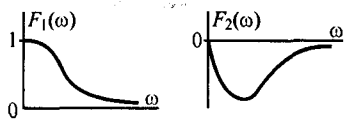


Рис. Р6.13

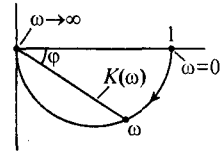


Рис. Р6.14

4. Получим логарифмическую амплитудную частотную характеристику цепи варианта *а*

$$K(j\omega)=\frac{1}{1+jr\omega C},\ K(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+r^2\omega^2C^2}},\ \lg K(\omega)=-\frac{1}{2}\lg(1+\omega^2r^2C^2).$$

Обозначив $rC=T$, получим $F(\omega T)=-10\lg(1+\omega^2T^2)$. При $\omega T\to 0$ имеем $F(\omega T)\to 0$ и $F(\omega T)\to\infty$ при $\omega T\to\infty$. При $\omega T=1$ получаем $20\lg K(1)=-10\lg 2\cong -3$ дБ (рис. Р6.15).

При $\omega T\gg 1$ можем написать $20\lg\frac{U_2(\omega)}{U_1(\omega)}=F(\omega T)=20\lg K(\omega T)\cong -20\lg\omega T$, откуда следует, что при увеличении аргумента ωT на порядок (на декаду) функция

$F(\omega T)$ уменьшается на 20 дБ. Характеристику $F(\lg\omega T)$ иногда аппроксимируют двумя прямолинейными отрезками, показанными на рисунке пунктиром.

Для цепи варианта *б* получаем $K(j\omega) = \dot{U}_L/\dot{U}_{вх} = \dfrac{j\omega L}{r + j\omega L}$. Так как $K(\omega) = \dfrac{\omega L}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} = \dfrac{\omega T}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$ (здесь $T = L/r$), то $F(\omega T) = 20 \lg K(\omega T) = 20 \lg \omega T - 10 \lg\{1 + \omega^2 T^2\}$. Кривая зависимости $F(\lg\omega T)$ изображена на рис. Р6.16 сплошной линией, а аппроксимирующая ее функция — пунктирной.

При малых ωT наклон функции $F(\lg\omega T)$ составляет 20 дБ на декаду.

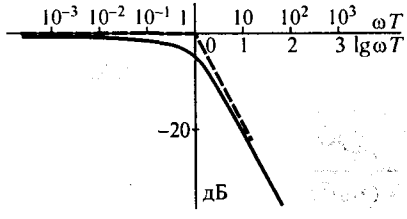


Рис. Р6.15

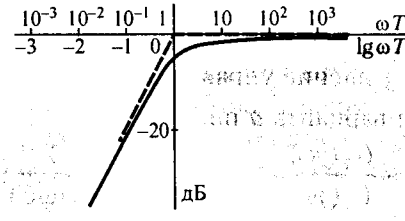


Рис. Р6.16

6.5. Резонанс в электрических цепях произвольного вида

ВОПРОСЫ

1. Условие резонанса $\varphi = 0$ приводит к выражениям $x_{вх} = 0$ и $b_{вх} = 0$, которые и позволяют найти частоты резонанса.

Для цепи варианта *б* имеем $Z_{вх} = -j\dfrac{1}{\omega C} + \dfrac{r \cdot j\omega L}{r + j\omega L}$, откуда находим $x_{вх} = \dfrac{-r^2 - \omega^2 L^2 + r^2\omega^2 LC}{\omega C(r^2 + \omega^2 L^2)}$. Из условия $x_{вх} = 0$ получаем частоту резонанса $\omega = \dfrac{r}{\sqrt{L(r^2 C - L)}}$. Записывая выражение $Y_{вх} = \dfrac{1}{Z_{вх}} = g_{вх} - jb_{вх}$, из условия $b_{вх} = 0$ получаем ту же частоту резонанса $\omega = \dfrac{r}{\sqrt{L(r^2 C - L)}}$ (см. таблицу).

Вариант	Резонансная частота	Вариант	Резонансная частота
а	$\dfrac{1}{rC}\sqrt{(Cr^2 - L)/L}$	*г*	$\sqrt{\dfrac{Cr^2 - L}{L^2 C}\left(1 \pm \sqrt{\dfrac{L}{Cr^2 - L}}\right)}$
б, в	$r/\sqrt{L(Cr^2 - L)}$	*д*	$\sqrt{\dfrac{1}{LC}\left(1 \pm \sqrt{\dfrac{L}{Cr^2 - L}}\right)}$

Вариант	Резонансная частота	Вариант	Резонансная частота
е	$\sqrt{\frac{L-2Cr^2}{2L^2C}\left(1\pm\sqrt{1+\frac{4r^2LC}{(L-2Cr^2)^2}}\right)}$	*з*	$\sqrt{\frac{3Cr^2-L}{2LC^2r^2}\left(1\pm\sqrt{1+\frac{8r^2C^4}{(3Cr^2-L)^2}}\right)}$
ж	$\sqrt{\frac{2Cr^2-L}{2LC^2r^2}\left(1\pm\sqrt{1+\frac{4r^2LC}{(2Cr^2-L)^2}}\right)}$	*и*	$\sqrt{\frac{1}{LC}\frac{Cr^2}{2(Cr^2+L)}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{4L}{Cr^2}}\right)}$

10. При $k = 0$ имеем $I_2(\omega) = 0$. Кривая зависимости $I_1(\omega)$ является характеристикой $I(\omega)$ цепи с последовательным соединением элементов r, L, C.

11. Рассмотрим схему варианта *а*.

Условием резонанса является равенство нулю угла сдвига между входным напряжением $\dot{U}$ и входным током $\dot{I}$. Рассматриваемая схема не содержит резисторов, поэтому условия для определения частот резонанса могут быть записаны в виде:

$$\begin{cases} x_э = 0, \\ \dfrac{1}{x_э} = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Для $x_э$ имеем:

$$x_э = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\omega L_1\dot{I}_1 + \omega M\dot{I}_2}{\dot{I}_1 + \dot{I}_2} = \frac{L_1C(L_2 - M)\omega^2 + MC(L_1 - M)\omega^2 - L_1}{C(L_1 - M)\omega^2 + C(L_2 - M)\omega^2 - 1}\omega.$$

При получении последнего выражения использовано соотношение $(L_1 - M)\dot{I}_1 = (L_2 - M)\dot{I}_2 - \dfrac{1}{\omega^2 C}\dot{I}_2$, вытекающее из второго закона Кирхгофа, записанного для контура, образованного элементами L_1, L_2 и C.

Из условий (*) получаем резонансные частоты

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{L_1}{(L_1L_2 - M^2)C}},\ \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{C(L_1 + L_2 - 2M)}}.$$

Частоты резонанса в схемах других вариантов приведены в таблице.

Вариант	Резонансная частота	Вариант	Резонансная частота
б	$[(L_1 + L_2 + 2M)C]^{-0,5}$	*д*	$\left[\frac{(L_1L_2 - M^2)C}{L_1 + L_2 - 2M}\right]^{-0,5}$
в	$[(L_1 + L_2 - 2M)C]^{-0,5}$	*е*	$[L_1/C(L_1L_2 - M^2)]^{0,5}$
г	$\left[\frac{(L_1L_2 - M^2)C}{L_1 + L_2 - 2M}\right]^{-0,5}$		

12. Выберем условные положительные направления токов и обхода контуров в цепи варианта *б* как указано на рис. Р6.17.

Из уравнения $-\dot{I}_1\left(j\omega L+\frac{1}{j\omega C}\right)+\dot{I}_2 j\omega M+\dot{I}_2\left(j\omega L+\frac{1}{j\omega C}\right)-\dot{I}_1 j\omega M=0$ получаем соотношение $\dot{I}_1=\dot{I}_2$. Из уравнения $-\dot{U}+\dot{I}_1\left(j\omega L+\frac{1}{j\omega C}\right)-\dot{I}_2 j\omega M=0$ находим ток $\dot{I}_1=\frac{\dot{U}}{j\omega L+\frac{1}{j\omega C}-j\omega M}$ и $x_{вх}=\frac{U}{I}=0{,}5\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}-\omega M\right)$. Частоты резонанса получаем из условий $x_{вх}=0$, $b_{вх}=\frac{1}{x_{вх}}=0$: $\omega_1=0$, $\omega_2=\frac{1}{\sqrt{C(L-M)}}$. При заданных значениях параметров элементов цепи находим $\omega_2\cong 1{,}4\cdot 10^4$ с$^{-1}$.

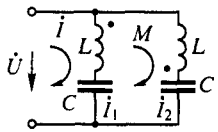


Рис. Р6.17

Для цепи варианта *г* (рис. Р6.18) имеем уравнения

$\dot{I}_1=\dot{I}_2+\dot{I}_3$,

$-\dot{I}_2 j\omega L-\dot{I}_1 j\omega M+\dot{I}_3\frac{1}{j\omega C}=0$,

$-\dot{U}+\dot{I}_1(r+j\omega L)+\dot{I}_2 j\omega L+\dot{I}_1 j\omega M+\dot{I}_2 j\omega M=0$,

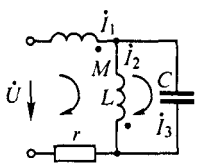


Рис. Р6.18

решая которые можем найти ток $\dot{I}_1$ и эквивалентное сопротивление $Z_э=\frac{\dot{U}}{\dot{I}_1}=r_э+jx_э$, где $x_э=\frac{\omega(L+M)}{1-\omega^2 LC}[2-\omega^2 C(L-M)]$. Из условия $x_э=0$ получаем $\omega_1=0$, $\omega_2=\sqrt{\frac{2}{C(L-M)}}=2\cdot 10^4$ с$^{-1}$, а из условия $b_э=0$ — $\omega_3=\frac{1}{\sqrt{LC}}=10^4$ с$^{-1}$.

7.1. Классификация многофазных цепей и систем

ВОПРОСЫ

3. В симметричных трехфазных системах ток нулевого провода равен нулю. На практике при неидеальной симметрии ток нулевого провода хотя и отличен от нуля, но остается значительно меньше токов фаз. Поэтому возможность выбора меньшего сечения нулевого провода в сравнении с сечением фазных проводов приводит к более эффективному использованию токопроводящих материалов в трехфазных системах.

5. Токи фаз равны нулю. Действительно, записывая уравнение второго закона Кирхгофа для контура, образованного фазными обмотками (см. рис. Р7.1), имеем: $3Z_ф\dot{I}=\dot{E}_{21}+\dot{E}_{32}+\dot{E}_{13}=0$ и, следовательно, $\dot{I}=0$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Шестифазная цепь изображена на рис. Р7.2. Учитывая, что действующие значения всех шести ЭДС фаз симметричной 6-фазной системы одинаковы $E_k = E$, $k = 1...6$, получим связь между линейными и фазными величинами из векторной диаграммы: $E_{23} = E$, или $E_л = E_ф$.

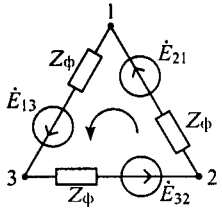


Рис. Р7.1

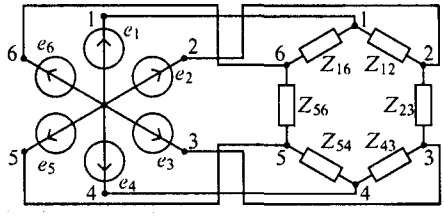
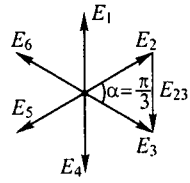


Рис. Р7.2



Таким образом, в симметричной шестифазной системе действующие значения линейных и фазных величин совпадают. Активные и реактивные мощности шестифазной системы можно получить при сложении мощностей фаз: $P = 6UI\cos\varphi$, $Q = 6UI\sin\varphi$.

2. Варианты *а*, *г*, *е*.

3. Варианты *а*, *б*: $V_1 = 220$ В, $V_2 = V_3 = V_4 = 220\sqrt{3}$ В,

вариант *в*: $V_2 = V_3 = V_4 = 220$ В, $A_2 = 0$,

вариант *г*: Из уравнения $\dot{E}_1 - a\dot{E}_1 + a^2\dot{E}_1 + 3\dot{I}Z_ф = 0$ находим показание амперметра A_2: $I \cong 14{,}3$ А.

4. Вариант *а*: $V_1 = 220$ В, $V_2 = 380$ В,

$$A_1 = A_3 = \left|\frac{220}{10 + j10}\right| \cong 15{,}6 \text{ А}, \quad A_2 = 0,$$

$P_2 = \mathrm{Re}(\dot{U}_{10}\dot{I}_1) = 2420$ Вт,

$P_1 = \mathrm{Re}(\dot{U}_{13}\dot{I}_1) \cong 1530$ Вт.

ЗАДАЧИ

1. При соединении приемника и батареи конденсаторов треугольником емкость подключаемого параллельно с приемником конденсатора находим из условия $b_э = 0$: $1/\omega C = 20$ Ом, откуда получаем $C \cong 159\cdot10^{-6}$ Ф.

Имеем $U_C = U_{пр} \cong 380$ В, $I_{пр} = 380/|10 + 10j| \cong 26{,}9$ А, $I_C = 380/20 = 19$ А.

При соединении батареи конденсаторов в звезду искомую емкость находим используя эквивалентное преобразование треугольник-звезда: $x_C \cong 7$ Ом, так что получаем $C \cong 4{,}8\cdot10^{-4}$ Ф. При этом ток через конденсатор $I_C \cong 33$ А.

2. Включенный по изображенной в условии задачи схеме ваттметр измеряет мощность $P = I_1U_{23}\cos\alpha = I_1U_{10}\sqrt{3}\cos\alpha$, где α — угол между векторами $\bar{I}_1$ и $\bar{U}_{23}$ (рис. Р7.3).

Так как углы α и ψ связаны соотношением $\alpha + \psi = 0{,}5\pi$, то имеем $P = I_1 U_{10}\sqrt{3}\sin\psi$ и, следовательно, реактивная мощность нагрузки $Q = 3I_1U_{10}\sin\psi = \sqrt{3}P$.

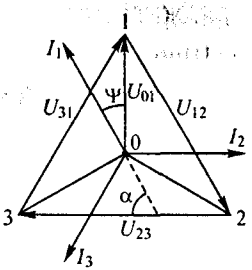


Рис. Р7.3

3. Для мгновенной мощности трехфазной системы имеем $p = i_1u_{10} + i_2u_{20} + i_3u_{30}$ или, с учетом равенства $i_1 = -(i_2 + i_3)$, $p = (u_{10} - u_{20})i_1 + (u_{30} - u_{20})i_3 = u_{12}i_1 + u_{32}i_3$. Активная мощность P, определяемая как среднее значение мгновенной мощности за полный период, равна

$$P = U_{12}I_1\cos\alpha + U_{32}I_2\cos\beta = P_{12} + P_{32},$$

где α и β — углы сдвига, соответственно, между величинами u_{12} и i_1, u_{32} и i_2.

7.2. Расчет трехфазных электрических цепей

ВОПРОСЫ

4. *а*) $I_0 \neq 0$, *б*) $I_0 = 0$, *в*) $I_0 \neq 0$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. *а*) Используя уравнение второго закона Кирхгофа $\dot{U}_{00'} = -\dot{E}_3$ для контура, в который входят ЭДС $\dot{E}_3$ и напряжение $\dot{U}_{00'}$, находим токи $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ из уравнений $\dot{I}_1Z_1 - \dot{U}_{00'} = \dot{E}_1$, $\dot{I}_2Z_2 - \dot{U}_{00'} = \dot{E}_2$: $\dot{I}_1 \cong -15{,}8 - j32{,}6$ А, $\dot{I}_2 \cong -37{,}7 - j3{,}77$ А

Искомая мощность равна $\dot{S}_1 = (\dot{E}_1 - \dot{E}_3)\dot{I}_1^* \cong 997 + j13\,768$ ВА, $\dot{S}_2 = (\dot{E}_2 - \dot{E}_3)\dot{I}_2^* \cong$ $\cong 1437 + j14\,366$ ВА.

б) Из уравнений второго закона Кирхгофа $\dot{E}_1 - \dot{E}_2 = \dot{I}_{12}Z_{12}$, $\dot{E}_3 - \dot{E}_1 = \dot{I}_{31}Z_{31}$, $\dot{E}_2 - \dot{E}_3 = \dot{I}_{23}Z_{23}$ находим токи $\dot{I}_{12} \cong 284 - j188$ А, $\dot{I}_{31} \cong 20 + j340$ А, $\dot{I}_{23} \cong -377 - j38$ А и мощности $\dot{S}_1 = (\dot{E}_1 - \dot{E}_2)\dot{I}_{12}^* \cong 5{,}8\cdot10^4 + j1{,}2\cdot10^5$ ВА, $\dot{S}_2 = (\dot{E}_2 - \dot{E}_3)\dot{I}_{23}^* \cong 1{,}4\cdot10^4 + j1{,}4\cdot10^5$ ВА, $\dot{S}_3 = (\dot{E}_3 - \dot{E}_1)\dot{I}_{31}^* \cong 5{,}8\cdot10^4 + j1{,}2\cdot10^5$ ВА.

2. Из уравнения второго закона Кирхгофа $\dot{I}_1Z_1 = \dot{E}_1$ находим: $\dot{U}_1 = \dot{E}_1$ и так как $U_1 = P_1/(I_1\cos\varphi_1) = 200$ В, то, принимая $\dot{U}_1 = \dot{E}_1 = 200$ В, можем записать: $\dot{E}_2 = 200\exp(-j\pi/2) = -j200$ В, $Z_1 = Z_2 = \dfrac{U_1}{I_1}\exp[j(\arccos 0{,}75)] \cong 10 + j8{,}8$ Ом,

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1}{Z_1} + \frac{\dot{U}_1\cdot(-j)}{Z_2} \cong 1{,}3 - j21{,}2 \text{ А}, \quad I_0 \cong 21{,}2 \text{ А}.$$

7.3. Вращающееся магнитное поле

ВОПРОСЫ

1. Движущееся вдоль линейной координаты магнитное поле получают, размещая катушки трехфазной обмотки в пазах не круглого, а плоского статора конечной длины. Так как при этом можно выполнить оба необходимых для перемещения поля условия, а именно условия сдвига катушек фаз в пространстве и их токов во времени, то получают тем самым движущееся поле. Электрические двигатели, в которых ротор увлекается перемещающимся магнитным полем

линейного статора, носят название линейных. В отличие от двигателей с вращающимся ротором, при анализе процессов в линейных двигателях следует принимать во внимание электромагнитные эффекты вблизи краев статора, возникающие из-за его конечной длины.

2. Ток однофазной системы может создать только пульсирующее магнитное поле, тогда как двухфазная или четырехфазная системы токов позволяют получить вращающееся магнитное поле.

3. При питании двух обмоток однофазным током не удается получить вращающееся магнитное поле, так как оказывается выполненным лишь одно условие, а именно условие сдвига тока и магнитного поля в пространстве. Для выполнения условия сдвига токов обмоток во времени можно включить последовательно с одной из обмоток конденсатор, что приведет к сдвигу тока этой обмотки на некоторый угол относительно тока другой обмотки. При этом оба необходимых условия получения вращающегося магнитного поля оказываются выполненными.

4. *а*) Можно, *б*) нельзя, так как при питании одинаковых обмоток совпадающими по фазе токами не выполнено условие их временного сдвига, *в*) можно. В этом случае направление вращения поля (в сравнении со случаем токов прямого порядка следования фаз) изменится на противоположное. В общем случае несимметрии токов обмоток вращающееся магнитное поле не будет круговым даже при симметричном устройстве электрической машины.

ЗАДАЧИ

1. *а*) Свяжем составляющие магнитной индукции B_x, B_y в точке M в прямоугольной системе координат с токами проводов:

$$B_x = B_{x1} + B_{x2} = (\mu_0\sqrt{2}/4\pi d)\cdot 100[\sin \omega t + \sin(\omega t + \pi/2)] = 2\cdot 10^{-5}\sin(\omega t + \pi/4)\ \text{Тл},$$

$$B_y = B_{y1} + B_{y2} = (\mu_0\sqrt{2}/4\pi d)\cdot 100[\sin \omega t - \sin(\omega t + \pi/2)] = -2\cdot 10^{-5}\cos(\omega t + \pi/4)\ \text{Тл}.$$

Модуль $|\boldsymbol{B}|$ магнитной индукции сохраняет постоянное значение $2\cdot 10^{-5}$ Тл, однако магнитная индукция в точке M не имеет постоянного направления вследствие вращения вектора $\boldsymbol{B}$.

7.4. Метод симметричных составляющих

ВОПРОСЫ

3. Углы сдвига между ЭДС симметричных шестифазных систем можем рассчитать, подставляя в соотношение $\psi = 2\pi q/m$ значения $m = 6$, $q = 0, 1, 2, ..., 5$. При $q = 0$ ЭДС фаз совпадают и получаем систему нулевого порядка следования фаз. При $q = 1$, $q = 2$ имеем системы прямого, а при $q = 4$, $q = 5$ — обратного порядка следования фаз.

4. Варианты: *а* — нет, *б* — да, *в* — нет, *г* — да, *д* — нет.

УПРАЖНЕНИЯ

3. Для получения симметричных составляющих используем выражения (**) § 7.4 и выполним построения, аналогичные приведенным там же. Изображая

токи i_A, i_B, i_C варианта *а* на комплексной плоскости (рис. Р7.4) и выполняя сложение $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$, получаем ток нулевой последовательности.

С помощью аналогичных построений находим симметричные составляющие прямой I_1 и обратной I_2 последовательностей.

Соответствующие построения для упражнения варианта *б* также показаны на рис. Р7.4.

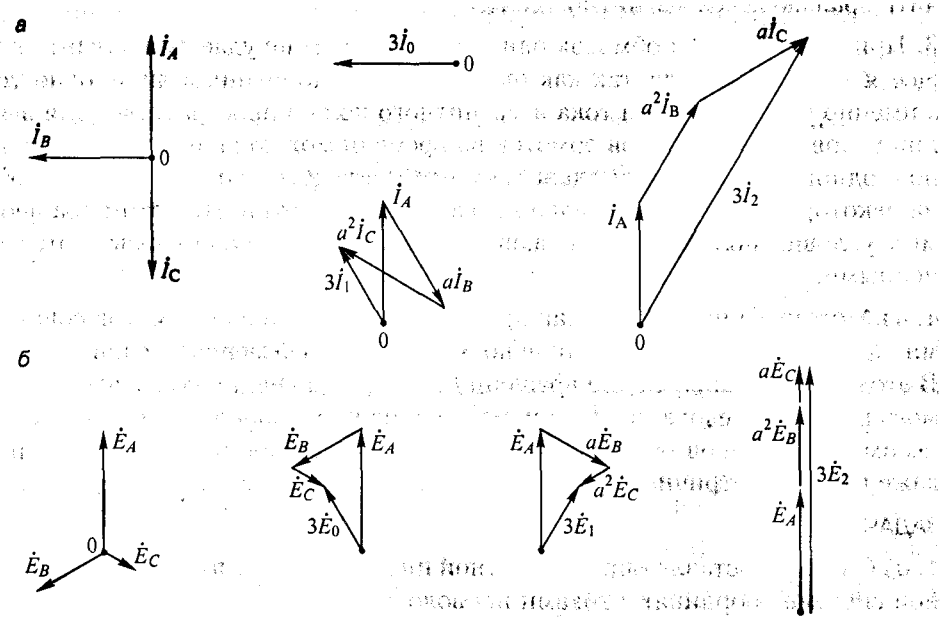


Рис. Р7.4

ЗАДАЧИ

1. Решая систему уравнений

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0,$$

$$\dot{U}_{12} + \dot{I}_2 r - \dot{I}_1 Z_1 = 0,$$

$$\dot{U}_{23} + \dot{I}_3 Z_2 - \dot{I}_2 r = 0,$$

получаем выражения для токов $\dot{I}_1 = (\dot{U}_{12} Z_1 - \dot{U}_{31} r)/\Delta$, $\dot{I}_2 = (\dot{U}_{23} Z_1 - \dot{U}_{12} Z_2)/\Delta$, $\dot{I}_3 = (\dot{U}_{31} r - \dot{U}_{23} Z_1)/\Delta$, где $\Delta = Z_1 r + Z_1 Z_2 + r Z_2$.

Вычисляя ток $\dot{I}_2$, убеждаемся в том, что для прямой последовательности системы линейных напряжений, когда $\dot{U}_{23} = \dot{U}_{12} \exp(-j2\pi/3)$, получаем $\dot{I}_2 \neq 0$ (вариант *а*) и $\dot{I}_2 = 0$ (вариант *б*). Для обратной последовательности системы линейных напряжений, когда $\dot{U}_{23} = \dot{U}_{12} \exp(j2\pi/3)$, имеем $\dot{I}_2 = 0$ (вариант *а*) и $\dot{I}_2 \neq 0$ (вариант *б*). Таким образом, показания вольтметра действительно пропорциональны напряжению прямой последовательности системы линейных напряжений в условиях варианта *а* и, соответственно напряжению обратной последовательности — при условиях варианта *б*.

8.1. Расчет электрических цепей при периодических несинусоидальных напряжениях

ВОПРОСЫ

3. Сумма двух периодических напряжений дает непериодическое напряжение, если отношение частот этих напряжений нельзя представить как отношение целых чисел (см. ответ на упр. 8 из § 4.1).

5. Частота первой гармоники напряжения, изображенного на рис. Р8.1, *а*, в два раза меньше, чем на рис. В8.1, *б*. Постоянные составляющие напряжений соотносятся между собой так же.

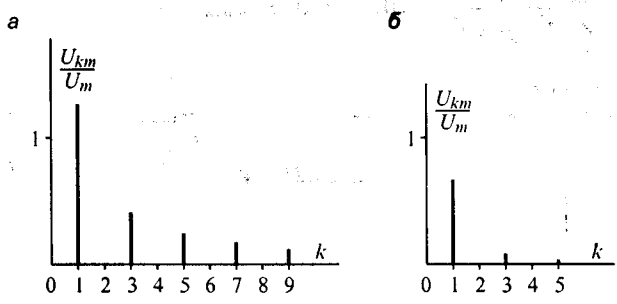


Рис. Р8.1

6. Сумма комплексных значений $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, ... токов различных гармоник не имеет смысла, так как можно сложить величины $\dot{I}_1 \exp(j\omega t)$, $\dot{I}_2 \exp(2j\omega t)$, $\dot{I}_3 \exp(3j\omega t)$, ..., но не коэффициенты при величинах $\exp(j\omega t)$, $\exp(2j\omega t)$, $\exp(3j\omega t)$, ...

УПРАЖНЕНИЯ

1. *а* → *б*, *б* → *в*, *в* → *а*.

2. *а*) → 1, *б*) → 2, *в*) → 3.

3. Напряжение варианта *а* описывается нечетной функцией, поэтому имеем

$$C_k = 0 \text{ и } B_k = U_{km} = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\sin k\omega t\,dt = -\frac{4U_m}{T}\cos k\omega t \cdot \frac{1}{k\omega}\Big|_0^{T/2} = \begin{cases} \dfrac{4U_m}{k\pi}, & k = 1,3,5,\ldots \\ 0, & k = 2,4,6,\ldots \end{cases}$$

$$U_{1m} = \frac{4U_m}{\pi} = 1{,}27U_m,\ U_{3m} = \frac{4U_m}{3\pi} = 0{,}42U_m,$$

$$U_{5m} = \frac{4U_m}{5\pi} = 0{,}25U_m,\ U_{7m} = \frac{4U_m}{7\pi} = 0{,}18U_m,\ \ldots$$

Амплитудно-частотный спектр изображен на рис. Р8.1, *а*.

Коэффициенты ряда Фурье напряжения варианта *б* равны:

$$C_k = 0,\ B_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\sin k\omega t\,dt = \frac{8U_m}{\pi^2 k^2}\sin\frac{k\pi}{2},\ k = 1, 2, \ldots$$

Амплитуды гармоник напряжения равны

$$U_{1m} = \frac{8U_m}{\pi^2} = 0{,}81U_m,\ U_{3m} = \frac{8U_m}{9\pi^2} = 0{,}09U_m,\ U_{5m} = \frac{8U_m}{25\pi^2} = 0{,}03U_m.$$

Амплитудно-частотный спектр напряжения изображен на рис. Р8.1, *б*.

4. При действии на входе цепей напряжения, изображенного на рис. Р8.2, амплитуды гармоник напряжения равны $U_{1m} = 127$ В, $U_{3m} = 42$ В, $U_{5m} = 25$ В. Комплексное сопротивление цепи для тока первой гармоники составляет $Z \cong 192 - j289$ Ом (сопротивление конденсатора равно 318 Ом). Напряжение на нагрузке $\dot{U}_{н1m} = \dfrac{\dot{U}_{1m}}{Z}\dfrac{r_н}{1 + jr_н\omega C} = 107 - j30$ В, $U_{н1m} \cong 111$ В.

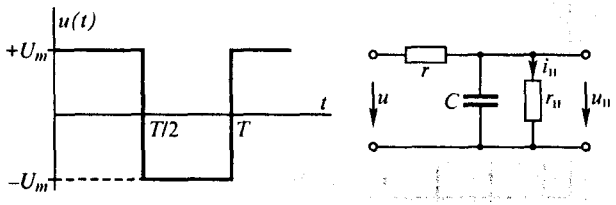


Рис. Р8.2

Рассчитывая напряжение высших гармоник, учитываем, что

$\dfrac{1}{3\omega C} = 106$ Ом, $\dfrac{1}{5\omega C} = 63{,}6$ Ом, $Z_{3г} \cong 111 - j105$ Ом, $\dot{U}_{н3m} = 22 - j19$ В, $U_{н3m} = 29$ В, $Z_{5г} \cong 104 - j63$ Ом, $\dot{U}_{н5m} = 7{,}4 - j11$ В, $U_{5m} = 13{,}3$ В.

На входе цепи отношения U_{1m}/U_m, U_{3m}/U_m, U_{5m}/U_m равны соответственно 1,27; 0,42 и 0,25, тогда как на нагрузке они получаются равными $U_{н1m}/U_m = 1{,}11$, $U_{н3m}/U_m = 0{,}29$ и $U_{н5m}/U_m = 0{,}13$. Таким образом, высшие гармоники в кривой напряжения нагрузки выражены не так резко, как на входе цепи и, следовательно, эта цепь подавляет высшие гармоники и обладает свойством фильтра низких частот.

При расчете напряжения нагрузки в цепи варианта *б* следует учесть, что в отличие от сопротивления конденсатора индуктивное сопротивление катушки, равное $\omega L = 62{,}8$ Ом для тока первой гармоники, возрастает при увеличении порядка гармоники: $3\omega L = 188{,}4$ Ом, $5\omega L = 314$ Ом.

Рассчитывая напряжения нагрузки, получаем: $\dot{U}_{н1m} \cong 157 - j12$ В, $U_{н1m} \cong 157$ В, $\dot{U}_{н3m} = -51{,}5 - j12{,}4$ В, $U_{н3m} \cong 53$ В, $\dot{U}_{н5m} = -6{,}3 - j0{,}5$ В, $U_{н5m} \cong 6{,}3$ В, так что искомые отношения напряжений равны: $U_{н1m}/U_m = 1{,}57$, $U_{н3m}/U_m = 0{,}53$, $U_{н5m}/U_m \cong 0{,}06$.

5. Так как постоянная составляющая напряжения на входе цепи не равна нулю, то в цепи может протекать постоянный ток, для расчета которого изображаем схему цепи, замыкая катушки индуктивности накоротко и размыкая ветви, содержащие конденсаторы (рис. Р8.3).

Получаем $i_1 = i_3 = i_4 = \dfrac{U_0}{r_1 + r_3} = 4{,}4$ А, $i_2 = i_5 = 0$.

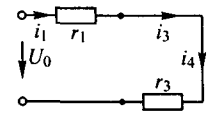


Рис. Р8.3

Ток первой гармоники в ветвях цепи рассчитываем комплексным методом:

$\dot{U} = 220$ В, $Z_{45} = \infty$, $Z_{345} = \infty$, $Z_э = Z_1 + Z_2 = 5 - j48$ Ом,

$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \dfrac{\dot{U}}{Z_э} = \dfrac{220}{5 - 48j} = 0{,}47 + j4{,}53$ А, $\dot{I}_3 = 0$, $\dot{I}_4 = -\dot{I}_5 = \dfrac{\dot{I}_2 Z_2}{Z_4} = -2{,}26 - j21{,}7$ А.

Мгновенные значения токов первой гармоники равны:

$i_1 = i_2 = 4{,}55\sqrt{2}\sin(\omega t + 84°)$ А; $i_3 = 0$; $i_4 = -i_5 = 21{,}8\sqrt{2}\sin(\omega t - 96°)$ А.

При расчете токов пятой гармоники в ветвях цепи учитываем, что комплексные сопротивления резисторов сохраняются неизменными, а комплексные сопротивления катушек индуктивности и конденсаторов изменяются:

$\dot{U} = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$ В; $Z_2 = j5\omega L + \dfrac{1}{j5\omega C} = 0$; $\dot{U}_2 = 0$; $\dot{I}_3 = \dot{I}_4 = \dot{I}_5 = 0$; $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \dfrac{\dot{U}}{r_1} = 0{,}707$ А.

Мгновенные значения токов пятой гармоники равны:

$i_1 = i_2 = 1\sin 5\omega t$ А; $i_3 = i_4 = i_5 = 0$.

Искомые токи в ветвях цепи равны:

$i_1 = 4{,}4 + 6{,}4\sin(\omega t + 84°) + 1\sin 5\omega t$ А; $i_2 = 6{,}4\sin(\omega t + 84°) + 1\sin 5\omega t$ А; $i_3 = 4{,}4$ А, $i_4 = 4{,}4 + 30{,}8\sin(\omega t - 96°)$ А; $i_5 = 30{,}8\sin(\omega t + 84°)$ А.

8.2. Форма кривых тока в электрической цепи при несинусоидальном напряжении

УПРАЖНЕНИЯ

5. Такая цепь должна содержать по крайней мере три элемента (рис. Р8.4).

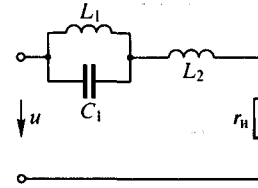


Рис. Р8.4

Контур L_1C_1 имеет частоту резонанса ω, поэтому ток первой гармоники в нагрузке обращается в нуль. Параметры элементов L_1, C_1, L_2 следует выбрать так, чтобы при частоте 3ω напряжения на входе цепи было выполнено условие $x_э = 0$, при котором ток нагрузки принимает наибольшее значение.

6. Так как ток гармоник порядка q и k в нагрузке равен нулю, то контуры L_1C_1 и L_2C_2 должны иметь частоты резонанса $q\omega_0$ и $k\omega_0$

$$\frac{1}{\sqrt{L_1C_1}} = q\omega_0; \quad \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}} = k\omega_0.$$

Ток гармоники порядка p достигает наибольшего значения при условии $x_э = 0$:

$$\frac{jp\omega_0 L_1}{1 - p^2\omega_0^2 L_1C_1} + \frac{jp\omega_0 L_2}{1 - p^2\omega_0^2 L_2C_2} = 0.$$

После преобразований получаем уравнение

$$L_1(1 - p^2\omega_0^2 L_2 C_2) + L_2(1 - p^2\omega_0^2 L_1 C_1) = 0,$$

решая которое, находим искомое соотношение $L_1 q^2(k^2 - p^2) = L_2 k^2(p^2 - q^2)$.

8.3. Действующие значения периодических несинусоидальных величин. Активная мощность

ВОПРОСЫ

3. В течение всего периода ток должен иметь постоянное по модулю значение, равное заданной амплитуде (см. рис. Р8.5).

4. Сопротивление резистора не зависит от порядка гармоники протекающего по нему тока, тогда как сопротивление катушки индуктивности пропорционально порядку гармоники тока. Поэтому действующее значение напряжения на катушке индуктивности больше, чем на резисторе.

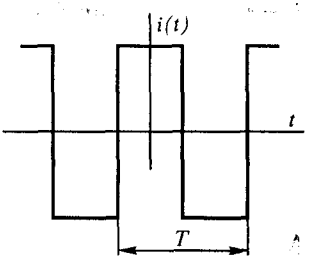


Рис. Р8.5

10. При несинусоидальных напряжениях и токах понятие угла сдвига по фазе между напряжением и током не определено, в связи с чем по указанной формуле рассчитать активную мощность в цепи нельзя.

УПРАЖНЕНИЯ

12. Для варианта *а* находим: $U_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt = 10$ В; $B_k = \frac{20}{\pi k}(1 - \cos k\pi)$, $C_k = 0$;

$U_{1m} = 12{,}7$ В; $U_2 = 0$; $U_{3m} = 4{,}2$ В; $U_{4m} = 0$; $U_{\text{пр}} = 13{,}8$ В; $U_{\text{т}} = 14{,}1$ В.

Для варианта *б* получаем: $U_0 = 5$ В; $B_k = -\frac{20}{\pi k}\cos k\pi$; $C_k = \frac{20}{\pi^2 k^2}(\cos k\pi - 1)$;

$U_{1m} = 6$ В; $U_{2m} = 3{,}2$ В; $U_{3m} = 2{,}14$ В; $U_{4m} = 1{,}6$ В; $U_{\text{пр}} = 7{,}55$ В; $U_{\text{т}} = 8{,}16$ В.

Для варианта *в* имеем: $U_0 = 2{,}5$ В; $B_k = -\frac{5}{\pi k}\cos 2k\pi$; $C_k = \frac{5}{2\pi^2 k^2}(\cos 2k\pi - 1)$;

$U_{1m} = 1{,}6$ В; $U_{2m} = 0{,}8$ В; $U_{3m} = 0{,}53$ В; $U_{4m} = 0{,}4$ В; $U_{\text{пр}} = 2{,}84$ В; $U_{\text{т}} = 2{,}89$ В.

8.4. Высшие гармоники в трехфазных цепях

ВОПРОСЫ

2. В системе линейных напряжений в нуль обращаются те гармоники напряжения, которые образуют систему нулевого порядка следования фаз. Их находим из условия $\frac{2\pi}{m}q = 2\pi k$ (k — целое число): $q = km$.

Расчетные задания

1. Расчет электростатического поля и электрической емкости

Проводящее заряженное тело (шар либо цилиндр) окружено двумя (концентрическими или коаксиальными) слоями диэлектрика (рис. П1.1 и П1.2). Радиусы тела и слоев диэлектрика, их проницаемости и одна из характеристик электрического поля при заданном значении радиальной координаты r приведены в табл. П1.1.

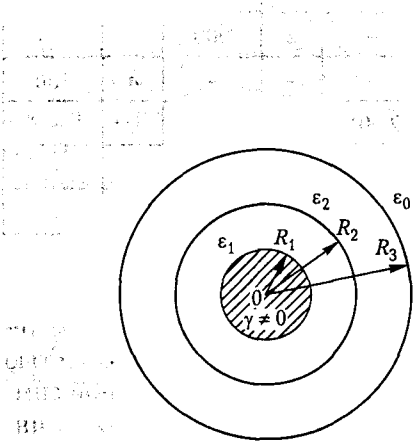


Рис. П1.1

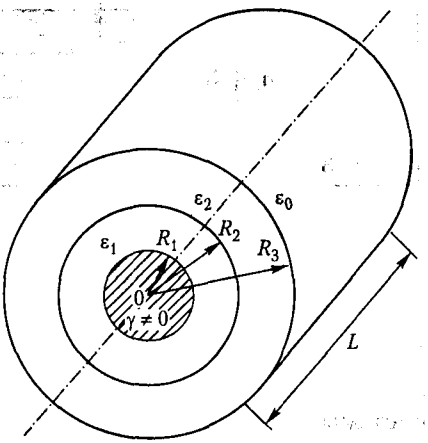


Рис. П1.2

а) Рассчитайте и постройте зависимости электрического смещения D, напряженности электрического поля E, поляризованности P, потенциала U и плотности энергии электрического поля $W_э'$ от координаты r.

б) Рассчитайте энергию электрического поля, заключенную во внутреннем слое диэлектрика.

в) Рассчитайте емкость сферического (или цилиндрического) конденсатора, обкладками которого являются поверхности радиусами R_1 и R_3. При расчете емкости примите заданные для соответствующего варианта геометрические размеры и значения диэлектрических проницаемостей слоев.

При расчете поля с цилиндрической симметрией длину L цилиндра примите равной 10 м.

Таблица П1.1

Вариант	R_1, см	R_2, см	R_3, см	ε_1	ε_2	$q(\tau)$, Кл (Кл/м)	D_r		E_r		U	
							r, см	D, Кл/м^2	r, см	E, В/м	r, см	U, В
1	1	2	4	$2\varepsilon_0$	$4\varepsilon_0$	$4\cdot10^{-7}$	—	—	—	—	—	—
2	2	4	6	$2\varepsilon_0$	$4\varepsilon_0$	—	4	$8\cdot10^{-5}$	—	—	—	—
3	2	3	6	$2\varepsilon_0$	$4\varepsilon_0$	—	—	—	4	600	—	—

Вариант	R_1, см	R_2, см	R_3, см	ε_1	ε_2	$q(\tau)$, Кл (Кл/м)	D_r		E_r		U	
							r, см	D, Кл/м^2	r, см	E, В/м	r, см	U, В
4	1	3	6	$2\varepsilon_0$	$4\varepsilon_0$	—	—	—	—	—	3	200
5	1	2	4	$4\varepsilon_0$	$2\varepsilon_0$	—	—	—	—	—	2	500
6	2	4	6	$4\varepsilon_0$	$2\varepsilon_0$	$2\cdot10^{-7}$	—	—	—	—	—	—
7	2	3	6	$4\varepsilon_0$	$2\varepsilon_0$	—	3	$12\cdot10^{-5}$	—	—	—	—
8	1	3	6	$4\varepsilon_0$	$2\varepsilon_0$	—	—	—	2	900	—	—
9	1	2	4	$3\varepsilon_0$	$2\varepsilon_0$	—	—	—	—	—	4	150
10	2	4	6	$3\varepsilon_0$	$2\varepsilon_0$	—	5	$2\cdot10^{-5}$	—	—	—	—
11	2	3	6	$3\varepsilon_0$	$2\varepsilon_0$	$5\cdot10^{-7}$	—	—	—	—	—	—
12	1	3	6	$3\varepsilon_0$	$2\varepsilon_0$	—	—	—	4	800	—	—

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ПРИМЕР РАСЧЕТА

Рассмотрим решение при условии варианта 12, принимая, что заряженным телом является шар. Охватим шар концентрической сферической поверхностью радиусом $r > R_1$ и применим постулат Максвелла. Вследствие центральной симметрии системы значение вектора смещения $\boldsymbol{D}$ во всех точках поверхности интегрирования одинаково, а его направление нормально поверхности интегрирования, как и направление вектора $d\boldsymbol{S}$. Вынося величину D за знак интеграла, получаем:

$$D \cdot 4\pi r^2 = q, \text{ или } D = \frac{q}{4\pi r^2},$$

где q — заряд шара.

При $r < R_1$ имеем $D = 0$, так как в проводнике поля нет.

Используя выражение для вектора смещения при $r > R_1$, можем записать напряженность электрического поля E в любой из областей с номером k, подставляя в соотношение

$$E_k = \frac{\boldsymbol{D}_k}{\varepsilon_k}$$

соответствующую диэлектрическую проницаемость.

Поляризованность P рассчитываем по формуле:

$$P_k = D_k - \varepsilon_0 E_k.$$

Электрический потенциал U в точке с координатой r определяем соотношением:

$$U_r = \int_r^P E \cdot dr,$$

где P — координата точки нулевого потенциала ($U_P = 0$), которую можем принять находящейся в бесконечности, так как заряженное тело (шар) имеет конеч-

ные размеры. При интегрировании следует представить интеграл как сумму интегралов по участкам с различными физическими свойствами (ε_k), поскольку выражения для напряженности электрического поля E_k в разных областях различны.

Плотность энергии электрического поля $W_э'$ рассчитываем по формуле:

$$W_э' = \frac{DE}{2}.$$

Расчетные соотношения для определения требуемых зависимостей приведены в табл. П1.2. Подставляя заданное значение напряженности электрического поля $E = 800$ В/м при $r = 4$ см, находим заряд шара $q = 2{,}84\cdot10^{-10}$ Кл.

Результаты вычислений по полученным соотношениям сводим в таблицу (шаг по координате r принимаем равным 0,2...0,5 см) и строим по ним требуемые зависимости.

Емкость шара получаем из соотношения:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{4\pi}{\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{1}{\varepsilon_2}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}\right)+\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{R_3}} = 2{,}35\cdot10^{-10}\ \Phi.$$

Энергию, запасенную в слое диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε_1, определяем из соотношения:

$$W_э = \int_{R_1}^{R_2} W_э' dV$$

здесь $dV = 4\pi r^2 dr$ — элементарный объем шарового слоя, радиусом r и толщиной dr. Интегрируя, получаем:

$$W_э = \frac{q^2}{24\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) = 8{,}1\cdot10^{-9}\ \text{Дж}.$$

Таблица П1.2

Диапазон	$r < R_1$	$R_1 < r < R_2$	$R_2 < r < R_3$	$r > R_3$
D	0	$D = \frac{q}{4\pi r^2}$		
E	0	$E_1 = \frac{q}{4\pi r^2 3\varepsilon_0}$	$E_2 = \frac{q}{4\pi r^2 2\varepsilon_0}$	$E_3 = \frac{q}{4\pi r^2\varepsilon_0}$
P	0	$P = \frac{q}{6\pi r^2}$	$P = \frac{q}{8\pi r^2}$	0
U	$U = U_{R_1} = \text{const}$	$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_2}\right)+$ $+\frac{q}{4\pi\varepsilon_2}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}\right)+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$	$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_3}\right)+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$	$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$
$W_э'$	0	$W_э' = \frac{q^2}{96\pi^2\varepsilon_0 r^4}$	$W_э' = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}$	$W_э' = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}$

Емкость сферического конденсатора равна $C = q_1/(U_1 - U_3)$, где q_1 — заряд и U_1 — потенциал обкладки радиусом R_1, U_3 — потенциал обкладки радиусом R_3. Принимая $U_3 = 0$, выражаем потенциал U_1 через заряд q_1

$$U_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)$$

и находим искомую емкость

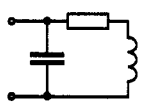
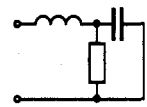
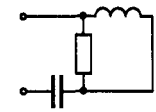
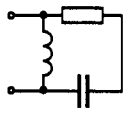
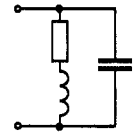
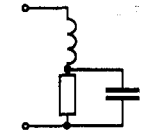
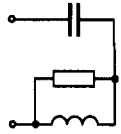
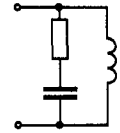
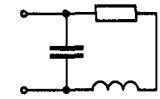
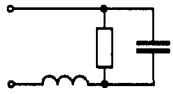
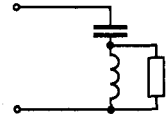
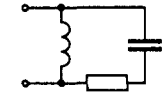
$$C = \frac{1}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)} = 3{,}6 \cdot 10^{-12}\ \Phi.$$

2. Расчет электрических цепей синусоидального тока. Применение векторных диаграмм

Постройте векторную диаграмму и определите не указанные в исходных данных задания величины (токи, напряжения, активную мощность, сопротивления, в том числе входное сопротивление двухполюсника) при условии резонанса всей цепи.

Схемы и значения параметров элементов двухполюсников приведены в таблице (сопротивления заданы в омах, токи — в амперах, напряжения — в вольтах, мощности — в ваттах).

Таблица П2.1

1)  $I_r = 5;\ I_C = 3;\ U_L = 60$	2)  $x_C = 2;\ U_C = 10;\ P = 50$	3)  $r = 100;\ I_L = 4;\ U_L = 300$
4)  $x_C = 6;\ U_r = 60;\ P = 600$	5)  $x_C = 25;\ I_r = 5;\ I_{вх} = 3$	6)  $I_r = 4;\ I_L = 5;\ U_C = 60$
7)  $x_L = 8;\ I_r = 4;\ P = 128$	8)  $r = 6;\ x_C = 8;\ U_L = 100$	9)  $r = x_L = 4;\ U_r = 24$
10)  $r = 20;\ I_C = 4;\ P = 180$	11)  $x_L = 100;\ I_C = 5;\ U_r = 300$	12)  $I_r = 5;\ I_{вх} = 4;\ U_C = 30$

ПРИМЕР РАСЧЕТА

Решим задачу варианта 12.

Построение векторной диаграммы начнем с вектора тока $\bar{I}_{rC}$, который направим вертикально (рис. П2.1).

Напряжение на резисторе $\bar{U}_r$ совпадает по фазе с током $\bar{I}_{rC}$, а напряжение на конденсаторе $\bar{U}_C$ отстает от него на угол 90°. Построив векторы $\bar{U}_r$ и $\bar{U}_C$, найдем их геометрическую сумму, которая равна входному напряжению $\bar{U}$ и одновременно напряжению $\bar{U}_L$ на катушке. Учитывая, что ток $\bar{I}_L$ катушки отстает от напряжения на ней на угол 90°, направляем вектор $\bar{I}_L$ как указано на диаграмме.

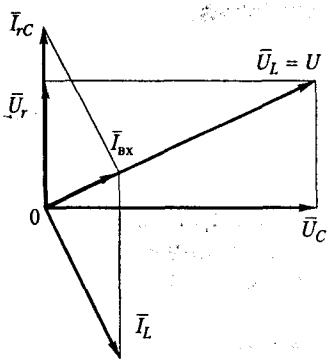


Рис. П2.1

Длину его выберем так, чтобы ток $\bar{I}_{вх}$ на входе цепи, равный геометрической сумме токов $\bar{I}_L$ и $\bar{I}_L$, совпал по направлению с вектором входного напряжения $\bar{U}$ (по условию задания в цепи резонанс).

Используя диаграмму, из прямоугольного треугольника токов, образованного векторами токов $\bar{I}_L$, $\bar{I}_{rC}$, $\bar{I}_{вх}$, находим ток катушки

$$I_L = \sqrt{I_{rC}^2 - I_{вх}^2} = 3 \text{ А}.$$

Учитывая подобие треугольников токов и напряжений, можем записать:

$$\frac{U_L}{U_c} = \frac{I_{rC}}{I_L} = \frac{5}{3},$$

откуда получаем $U_L = 50$ В. Далее вычисляем $U_r = \sqrt{U_L^2 - U_C^2} = 40$ В.

Активную мощность можем рассчитать с помощью соотношения $P = UI_{вх} = 50 \cdot 4 = 200$ Вт либо соотношения $P = U_r I_{rC} = 40 \cdot 5 = 200$ Вт.

3. Расчет электрических цепей синусоидального тока комплексным методом

Исходными для выполнения задания являются схема электрической цепи, приведенная на рис. П3.1, комплексные сопротивления в ее ветвях, а также *а*) напряжение на входе цепи либо *б*) ток в одной из ветвей цепи.

Изобразите схему цепи с указанием на ней элементов: резисторов, катушек индуктивности, конденсаторов.

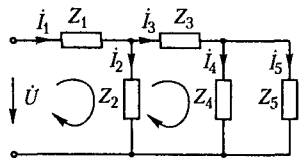


Рис. П3.1

Рассчитайте комплексные и мгновенные токи и напряжения ветвей. Изобразите на комплексной плоскости токи в ветвях и напряжения на них и, складывая соответствующие комплексным числам векторы, проверьте выполнение уравнений первого и второго законов Кирхгофа $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$, $\dot{I}_3 = \dot{I}_4 + \dot{I}_5, \dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2, \dot{U}_2 = \dot{U}_3 + \dot{U}_4, \dot{U}_4 = \dot{U}_5$ для узлов и контуров цепи. Найдите угол φ сдвига по фазе между напряжением на входе цепи и током i_1. Определите характер цепи (индуктивный или емкостный). Рассчитайте активную и реактивную мощности.

Численные данные приведены в табл. П3.1. Значение величины k определяет номер ветви, ток в которой для варианта *б* условия задания известен.

Таблица П3.1

Вариант	Z_1, Ом	Z_2, Ом	Z_3, Ом	Z_4, Ом	Z_5, Ом	U, В	k	I_k, А
1	$1{,}5 - j3$	6	$-j6$	$j10$	$10 + j10$	30	2	2
2	$3 - j6$	20	$-j20$	$j20$	$10 - j10$	130	4	4
3	$2 - j4$	3	$-j2$	10	$10 + j10$	120	3	5
4	$4 - j12$	60	$j80$	100	$100 - j100$	120	1	2
5	$8 - j6$	20	$j40$	$-j100$	$100 - j100$	100	5	8
6	$8 - j4$	20	$j20$	$-j20$	$10 + j10$	120	3	6
7	$4 - j4$	$j4$	$-j4$	$j20$	$10 + j10$	80	4	2
8	$5 - j5$	$j10$	$-j10$	$j10$	$10 - j10$	100	2	4
9	$4 - j4$	$j8$	$-j4$	20	$10 + j10$	80	5	5
10	$4 - j4$	$j8$	$j4$	20	$10 - j10$	120	1	1
11	$4 - j4$	$j4$	$j4$	$-j20$	$10 - j10$	120	2	10
12	$5 - j5$	$j10$	$j10$	$-j10$	$10 + j10$	100	3	2
13	$8 - j8$	$-j8$	$-j4$	$j20$	$10 + j10$	120	4	2
14	$6 - j2$	$-j10$	$-j10$	$j10$	$5 - j5$	120	1	4
15	$4 - j4$	$-j8$	$-j4$	20	$10 + j10$	80	5	8

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Начальную фазу приложенного к цепи напряжения (вариант *а* задания) либо начальную фазу заданного в k-й ветви тока (вариант *б* задания) можем принять произвольной. Если ее принять равной нулю, то комплексное действующее напряжение на входе цепи будет равно $Ue^{j0} = U$. Принимая начальную фазу тока в k-й ветви равной нулю, получаем, что комплексный действующий ток в этой ветви равен его заданному действующему току.

Последовательности вычисления токов в ветвях в вариантах *а* и *б* задания различны.

При заданном напряжении на входе цепи (вариант *а* задания) вначале рассчитываем эквивалентное входное сопротивление цепи $Z_{экв} = Z_{12345}$, после чего последовательно находим величины $\dot{I}_1 = \dot{U}/Z_{экв}, \dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_1, \dot{U}_2 = \dot{I}_1 Z_{2345}, \dot{I}_2 = \dot{U}_2/Z_2, \dot{I}_3 = \dot{U}_2/Z_{345}, \dot{U}_3 = \dot{I}_3 Z_3, \dot{U}_4 = \dot{I}_3 Z_{45}, \dot{I}_4 = \dot{U}_4/Z_4, \dot{I}_5 = \dot{U}_4/Z_5$. Здесь индексы токов ветвей приняты такими же, как и индексы сопротивлений в этих ветвях.

Если задан ток (вариант *б* задания), например, в третьей ветви, то последовательность расчета может быть такой. Находим напряжение $\dot{U}_3 = \dot{I}_3 Z_3$ и далее величины $\dot{U}_4 = \dot{I}_3 Z_{45}$, $\dot{I}_4 = \dot{U}_4/Z_4$, $\dot{I}_5 = \dot{U}_4/Z_5$, $\dot{U}_2 = \dot{U}_3 + \dot{U}_4$, $\dot{I}_2 = \dot{U}_2/Z_2$, $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3, \dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_1, \dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$.

Для расчета мгновенных токов и напряжений следует вычислить амплитуду и начальную фазу соответствующей величины. Амплитудное значение тока равно модулю его комплексного действующего значения, умноженному на $\sqrt{2}$:

$$I_m = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(\mathrm{Re}\dot{I})^2 + (\mathrm{Im}\dot{I})^2}.$$

Начальную фазу Ψ_i тока можем рассчитать, используя выражения

$$\Psi_i = \mathrm{arctg}[\mathrm{Im}(\dot{I})/\mathrm{Re}(\dot{I})] \text{ при } \mathrm{Re}(\dot{I}) > 0,\ \mathrm{Im}(\dot{I}) > 0,$$

$$\Psi_i = \pi + \mathrm{arctg}[(\mathrm{Im}(\dot{I})/\mathrm{Re}(\dot{I})] \text{ при } \mathrm{Re}(\dot{I}) < 0,\ \mathrm{Im}(\dot{I}) > 0,$$

$$\Psi_i = -\pi - \mathrm{arctg}[\mathrm{Im}(\dot{I})/\mathrm{Re}(\dot{I})] \text{ при } \mathrm{Re}(\dot{I}) < 0,\ \mathrm{Im}(\dot{I}) < 0.$$

Активная мощность может быть только положительной, тогда как реактивная — как положительной, так и отрицательной. Активную мощность можно рассчитать, используя выражение $P = UI_1 \cos\varphi$, где φ — угол сдвига между напряжением на входе цепи и током I_1, либо выражение $P = \sum_k I_k^2 r_k$, где r_k — сопротивление резистора в k-й ветви, число членов суммы равно 5, или выражение $P = \mathrm{Re}(\dot{U}\dot{I}_1^*)$, где $\dot{I}_1^*$ — комплексный ток, сопряженный с $\dot{I}_1$. Реактивную мощность можно найти с помощью одного из выражений: *а*) $Q = UI_1 \sin\varphi$, *б*) $Q = \mathrm{Im}(\dot{U}\dot{I}_1^*)$.

ПРИМЕР РАСЧЕТА

Рассчитаем искомые величины в цепи варианта 13, *б*, в которой задан действующий ток $I_4 = 2$А. Изобразим схему цепи с указанием на ней резисторов, катушек индуктивности и конденсаторов (рис. П3.2).

Принимаем начальную фазу тока i_4 равной нулю и тогда $\dot{I}_4 = I_4$. Получаем: $\dot{U}_4 = \dot{I}_4 Z_4 = 2(j20) = j40$ В, $\dot{I}_5 = \dot{U}_4 / Z_5 = j40/(10 + j10) = j40(10 - j10)/(10^2 + 10^2) = 2 + j2$ А, $\dot{I}_3 = \dot{I}_4 + \dot{I}_5 = 2 + 2 + j2 = 4 + j2$ А, $\dot{U}_3 = \dot{I}_3 Z_3 = (4 + j2)(-j4) = 8 - j16$ В.

Запишем уравнение второго закона Кирхгофа для контура с элементами Z_2, Z_3, Z_4: $-\dot{U}_2 + \dot{U}_3 + \dot{U}_4 = 0$, откуда $\dot{U}_2 = \dot{U}_3 + \dot{U}_4 = 8 - j16 + j40 = 8 + j24$ В.

Далее находим: $\dot{I}_2 = \dot{U}_2 / Z_2 = (8 + j24)/(-j8) = -3 + j$ А, $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + I_3 = -3 + j + 4 + j2 = 1 + j3$ А, $\dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_1 = (1 + j3)(8 - j8) = 8 + j24 - j8 + 24 = 32 + j16$ В. Напряжение на входе цепи $\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 32 + j16 + 8 + j24 = 40 + j40$ В.

Комплексная мощность в цепи $\dot{S} = \dot{U}\dot{I}_1 = (40 + j40)(1 - j3) = 40 + j40 - j120 + 120 = 160 - j80$, так что активная мощность $P = 160$ Вт и реактивная мощность $Q = -80$ ВА.

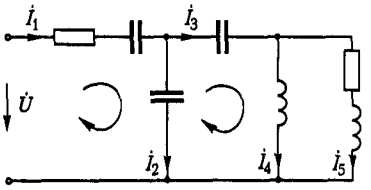


Рис. П3.2

Запишем мгновенные токи и напряжения

$i_1 = 4{,}47\sin(\omega t + 71{,}6°)$ А,

$i_2 = 4{,}47\sin(\omega t + 161{,}6°)$ А,

$i_3 = 6{,}32\sin(\omega t + 26{,}6°)$ А,

$i_4 = 2{,}83\sin \omega t$ А, $i_5 = 4\sin(\omega t + 45°)$ А,

$u = 80\sin(\omega t + 45°)$,

$u_1 = 50{,}6\sin(\omega t + 26{,}6°)$ В,

$u_2 = 35{,}8\sin(\omega t + 71{,}6°)$ В,

$u_3 = 25{,}3\sin(\omega t - 63{,}4°)$ В,

$u_4 = 56{,}6\sin(\omega t + 90°)$ В, $u_5 = 56{,}6\sin(\omega t + 90°)$ В.

Начальная фаза напряжения на входе цепи составляет 45°, начальная фаза тока i_1 равна 71,6°, поэтому угол сдвига по фазе между напряжением на входе цепи и током i_1 получается равным 45° – 71,6° = = –26,6°. Таким образом, цепь имеет емкостный характер и реактивная мощность Q отрицательна.

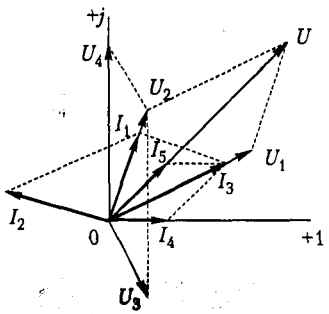


Рис. П3.3

Рассчитаем активную мощность с помощью других выражений:

$P = UI_1 \cos\varphi = (40^2 + 40^2)(1^2 + 3^2)\cos(-26{,}6°) = 160$ Вт,

$P = I_1^2 r_1 + I_5^2 r_5 = 10 \cdot 8 + 8 \cdot 10 = 80 + 80 = 160$ Вт,

что, как видно, совпадает с найденным выше значением активной мощности.

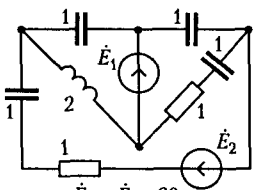
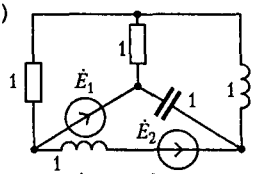
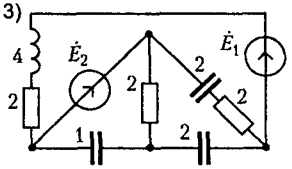
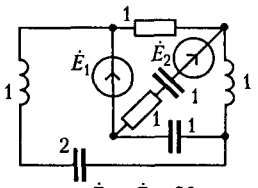
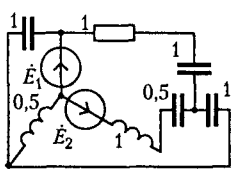
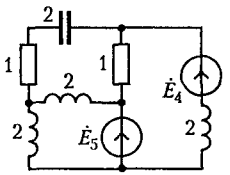
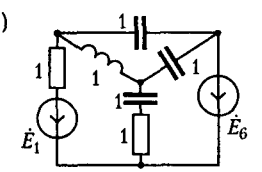
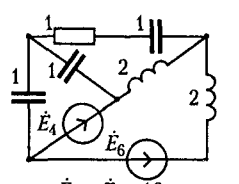
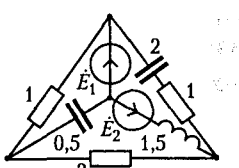
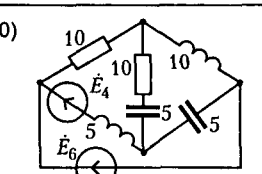
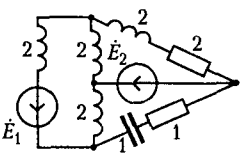
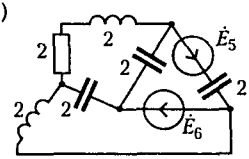
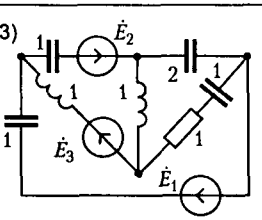
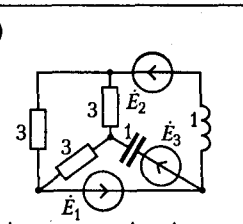
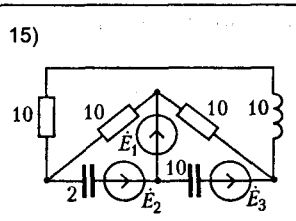
На рис. П3.3 изображены векторы токов и напряжений, соответствующие их найденным комплексным значениям.

4. Расчет сложных электрических цепей синусоидального тока

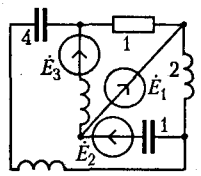
Рассчитайте токи в ветвях электрических цепей, схемы которых приведены в табл. П4.1, методами контурных токов и узловых напряжений. Один из токов рассчитайте методом эквивалентного генератора. Сопоставьте сумму активных мощностей всех источников энергии в цепи с суммой активных мощностей всех приемников. Такое же сопоставление выполните и для реактивных мощностей источников и приемников.

Сопротивления элементов в ветвях цепи указаны в омах, ЭДС — в вольтах.

Таблица П4.1

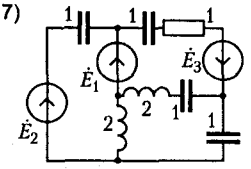
1)  $\dot{E}_1 = \dot{E}_2 = 60$	2)  $\dot{E}_1 = 4;\ \dot{E}_2 = 2$	3)  $\dot{E}_1 = 12 - j6;\ \dot{E}_2 = 6$
4)  $\dot{E}_1 = \dot{E}_2 = 30$	5)  $\dot{E}_1 = \dot{E}_2 = 5$	6)  $\dot{E}_4 = j10;\ \dot{E}_5 = 10$
7)  $\dot{E}_1 = \dot{E}_6 = 5$	8)  $\dot{E}_4 = \dot{E}_6 = 10$	9)  $\dot{E}_1 = \dot{E}_2 = 25$
10)  $\dot{E}_4 = 80;\ \dot{E}_6 = 100$	11)  $\dot{E}_1 = \dot{E}_2 = 10$	12)  $\dot{E}_5 = 4 + j4;\ \dot{E}_6 = 2$
13)  $\dot{E}_1 = 25 + j5;\ \dot{E}_3 = j5;\ \dot{E}_2 = -j5$	14)  $\dot{E}_1 = 12 - j5;\ \dot{E}_2 = \dot{E}_3 = j5$	15)  $\dot{E}_1 = 12 - j4;\ \dot{E}_2 = j4;\ \dot{E}_3 = -j4$

16)



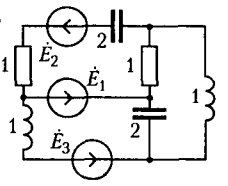
$\dot{E}_1 = 10 + j25;\ \dot{E}_2 = \dot{E}_3 = 10$

17)



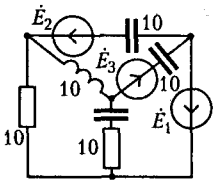
$\dot{E}_1 = 5 - j5;\ \dot{E}_2 = -\dot{E}_3 = -j5$

18)



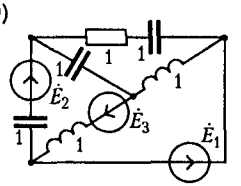
$\dot{E}_1 = 65 + j30;\ \dot{E}_3 = -\dot{E}_2 = j30$

19)



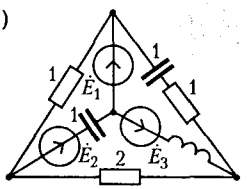
$\dot{E}_1 = 20 + j50;\ \dot{E}_2 = -\dot{E}_3 = 20$

20)



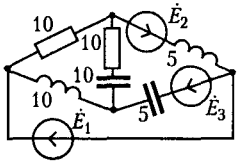
$\dot{E}_1 = 20 - j10;\ \dot{E}_3 = -\dot{E}_2 = j10$

21)



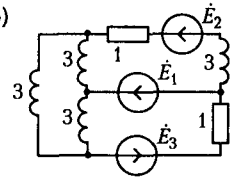
$\dot{E}_1 = 50 - j8;\ \dot{E}_2 = -\dot{E}_3 = j8$

22)



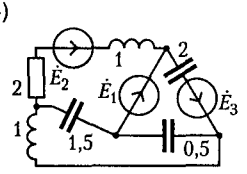
$\dot{E}_1 = 50 - j10;\ \dot{E}_2 = -\dot{E}_3 = j10$

23)



$\dot{E}_1 = 18 - j9;\ \dot{E}_2 = -\dot{E}_3 = -j9$

24)



$\dot{E}_1 = 15 + j9;\ \dot{E}_2 = -\dot{E}_3 = j9$

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Решение начинаем с выбора и обозначения на схеме условных положительных направлений токов в ветвях цепи и их нумерации. Направления токов в ветвях принимаем произвольно. Далее записываем сопротивления элементов в ветвях в комплексной форме. Заданные на схеме цепи численные значения сопротивлений катушек индуктивности умножаем на j, а численные значения сопротивлений конденсаторов — на $-j$. Сопротивления резисторов в комплексной форме записи сохраняются вещественными.

При решении задачи методом контурных токов выбираем независимые контуры (их число равно числу связей графа цепи) и условные положительные направления контурных токов (например, по часовой стрелке), после чего переходим к составлению и решению системы алгебраических уравнений.

При решении задачи методом узловых напряжений нумеруем узлы от 0 до 3 (так как полное число узлов в цепи равно 4), записываем и решаем систему алгебраических уравнений метода. Если в цепи имеется ветвь, в которой включен только идеальный источник ЭДС, то одному из узлов этой ветви следует присвоить при нумерации узлов номер 0.

Число уравнений равно в общем случае 3, однако оно будет меньшим, если пара узлов соединена ветвью, в которой имеется только идеальный источник ЭДС. Если, например, узлы с номерами 0 и 2 соединены ветвью, в которой включен только источник ЭДС $\dot{E}$, то напряжение $\dot{U}_{20}$ можно выразить через $\dot{E}$. Для этого записываем уравнение второго закона Кирхгофа для воображаемого кон-

тура (рис. П4.1), в который входят ветвь только с источником ЭДС и напряжение $\dot{U}_{20} = \dot{E}$.

В этом случае число неизвестных уменьшается и становится равным двум ($\dot{U}_{10}$ и $\dot{U}_{30}$). При формировании системы алгебраических уравнений уравнение для узла 2 не записываем, а входящую в уравнения для узлов 1 и 3 величину $\dot{U}_{20}$ заменяем на $\dot{E}$.

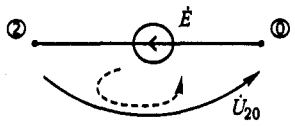


Рис. П4.1

При решении задачи методом эквивалентного генератора может оказаться, что при расчете напряжения $\dot{U}_0$ на зажимах разомкнутого приемника, как и при расчете внутреннего сопротивления $Z_г$ генератора, ветви цепи не соединены последовательно-параллельно (см. ниже пример расчета). В таких случаях для нахождения этих величин используем один из методов расчета сложных электрических цепей.

ПРИМЕР РАСЧЕТА

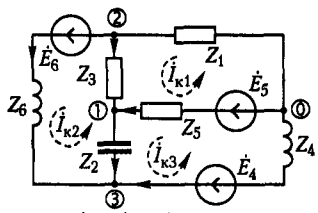
Рассчитаем искомые величины в электрической цепи, схема которой изображена на рис. П4.2.

Метод контурных токов

Нумеруем и выбираем условные положительные направления токов, а также направления контурных токов, как указано на рис П4.2.

Рассчитываем собственные и общие сопротивления контуров: $Z_{11} = Z_1 + Z_3 + Z_5 = 3$ Ом, $Z_{22} = 1$ Ом, $Z_{33} = 1$ Ом, $Z_{12} = -1$ Ом, $Z_{13} = -1$ Ом, $Z_{23} = j$ Ом.

Правые части уравнений равны $\dot{E}_{11} = -10$ В, $\dot{E}_{22} = = 10$ В, $\dot{E}_{33} = 0$.



$\dot{E}_4 = \dot{E}_5 = \dot{E}_6 = 10$ В
$Z_1 = Z_3 = Z_5 = 1$ Ом;
$Z_2 = -j$ Ом; $Z_4 = Z_6 = j$ Ом

Рис. П4.2

Система уравнений метода

$$3\dot{I}_{к1} - \dot{I}_{к2} - \dot{I}_{к3} = -10,$$
$$-\dot{I}_{к1} + \dot{I}_{к2} + j\dot{I}_{к3} = 10,$$
$$-\dot{I}_{к1} + j\dot{I}_{к2} + \dot{I}_{к3} = 0$$

имеет своим решением контурные токи $\dot{I}_{к1} = -3 - j$ А, $\dot{I}_{к2} = 3 + j$ А, $\dot{I}_{к3} = -2 - j4$ А. Токи в ветвях цепи равны: $\dot{I}_1 = -\dot{I}_{к1} = 3 + j$ А, $\dot{I}_2 = \dot{I}_{к3} - \dot{I}_{к2} = -5 - j5$ А, $\dot{I}_3 = \dot{I}_{к1} - \dot{I}_{к2} = -6 - j2$ А, $\dot{I}_4 = -\dot{I}_{к2} = 2 + j4$ А, $\dot{I}_5 = \dot{I}_{к3} - \dot{I}_{к1} = 1 - j3$ А, $\dot{I}_6 = \dot{I}_{к2} = 3 + j$ А.

Метод узловых напряжений

Нумеруем узлы, как указано на рис. П4.2. Рассчитываем собственные и общие проводимости узлов: $Y_{11} = 1/Z_2 + 1/Z_3 + 1/Z_5 = j + 1 + 1 = 2 + j$ См, $Y_{22} = 1 + 1 + (-j) = 2 - j$ См, $Y_{33} = j - j - j = -j$ См, $Y_{12} = -1/Z_3 = -1$ См, $Y_{13} = -1/Z_2 = -j$ См, $Y_{23} = -1/Z_6 = j$ См.

Правые части уравнений равны: $\mathfrak{I}_{11} = \dot{E}_5(1/Z_5) = 10$ А, $\mathfrak{I}_{22} = -\dot{E}_6(1/Z_6) = j10$ А, $\mathfrak{I}_{33} = \dot{E}_4(1/Z_4) + \dot{E}_6(1/Z_6) = -j20$ А.

Решая систему уравнений

$$(2 + j)\dot{U}_{10} - \dot{U}_{20} - j\dot{U}_{30} = 10,$$
$$-\dot{U}_{10} + (2 - j)\dot{U}_{20} + j\dot{U}_{30} = j10,$$

$$(2+j)\dot{U}_{10} - \dot{U}_{20} - j\dot{U}_{30} = 10,$$
$$-\dot{U}_{10} + (2-j)\dot{U}_{20} + j\dot{U}_{30} = j10,$$
$$-j\dot{U}_{10} + j\dot{U}_{20} - j\dot{U}_{30} = -j20,$$

находим узловые напряжения $\dot{U}_{10} = 3(3+j)$ В, $\dot{U}_{20} = 3+j$ В, $\dot{U}_{30} = 2(7-j)$ В.

Для вычисления тока в ветви изображаем на рисунке эту ветвь, обозначая номера узлов, к которым она присоединена. Так для нахождения тока $\dot{I}_5$ изображаем на рис. П4.3 ветвь 5 и записываем уравнение второго закона Кирхгофа для указанного на рисунке контура: $\dot{U}_{10} + \dot{I}_5 Z_5 = \dot{E}_5$. Из этого уравнения получаем $\dot{I}_5 = -2(3+j)$ А.

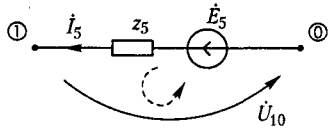


Рис. П4.3

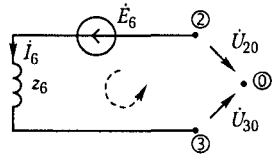


Рис. П4.4

Аналогично, для расчета тока $\dot{I}_6$ с помощью рис. П4.4 находим из уравнения $\dot{U}_{30} - \dot{U}_{20} + \dot{I}_6 Z_6 = \dot{E}_6$ ток $\dot{I}_6 = 3+j$ А. Так же рассчитываем токи и других ветвей.

Метод эквивалентного генератора

Найдем ток $\dot{I}_6$, рассматривая входящую в эту ветвь катушку индуктивности как приемник: $Z_{\text{пр}} = j$ Ом. В соответствии с методом эквивалентного генератора $\dot{I}_6 = \dot{U}_0/(Z_6 + Z_\text{г})$, где $Z_\text{г}$ – внутреннее сопротивление генератора. Для нахождения напряжения $\dot{U}_0$ исключаем приемник (рис. П4.5) и в полученной цепи записываем уравнение второго закона Кирхгофа для контура, в который входит напряжение $\dot{U}_0$: $\dot{U}_0 + \dot{I}_2 Z_2 + \dot{I}_3 Z_3 = \dot{E}_6$. В это уравнение входят токи $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$, которые рассчитываем, учитывая, что в этой цепи $\dot{U}_{10} = \dot{E}_4 = 10$ В, так как $Z_2 + Z_4 = 0$. Из уравнения $\dot{U}_{10} + \dot{I}_5 Z_5 = \dot{E}_5$ следует, что $\dot{I}_5 = 0$ и тогда получаем $\dot{I}_2 = \dot{I}_3 = \dot{E}_4/(Z_1 + Z_2) = 5$ А. Таким образом, находим $\dot{U}_0 = 5(1+j)$ В.

Для расчета внутреннего сопротивления генератора замыкаем накоротко источники ЭДС и находим сопротивление цепи между зажимами приемника (рис. П4.6).

Для этого преобразуем соединение элементов Z_2, Z_4, Z_5 в трехлучевую звезду (рис. П4.7) и получаем $Z_\text{г} = 2$ Ом.

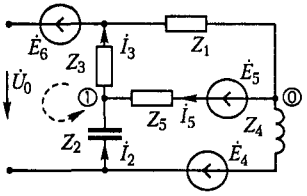


Рис. П4.5

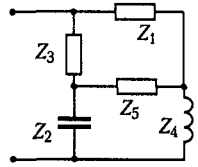


Рис. П4.6

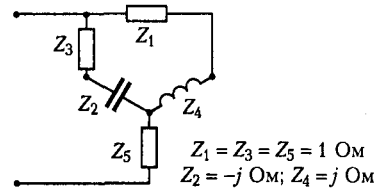


Рис. П4.7

Искомый ток равен $\dot{I}_6 = \dot{U}_0/(Z_6 + Z_\text{г}) = 5(1+j)/(2+j) = 3+j$ А.

Расчет активной и реактивной мощности

Комплексная мощность приемников равна

$$\dot{S} = I_1^2 r_1 + I_3^2 r_3 + I_5^2 r_5 + I_2^2 (1/j\omega C) + I_4^2 (j\omega L_4) + I_6^2 (j\omega L_6) =$$

$$= 10 + 40 + 10 + 50(-j) + 20j + 10j = 60 - j20 \text{ ВА},$$

так что активная мощность приемников $P = 60$ Вт, а реактивная -20 ВА.

Комплексная мощность источников

$$\dot{S} = \dot{E}_4 \dot{I}_4 + \dot{E}_5 \dot{I}_5 + \dot{E}_6 \dot{I}_6 = 20 - j40 + 10 + j30 + 30 - j10 = 60 - j20 \text{ ВА},$$

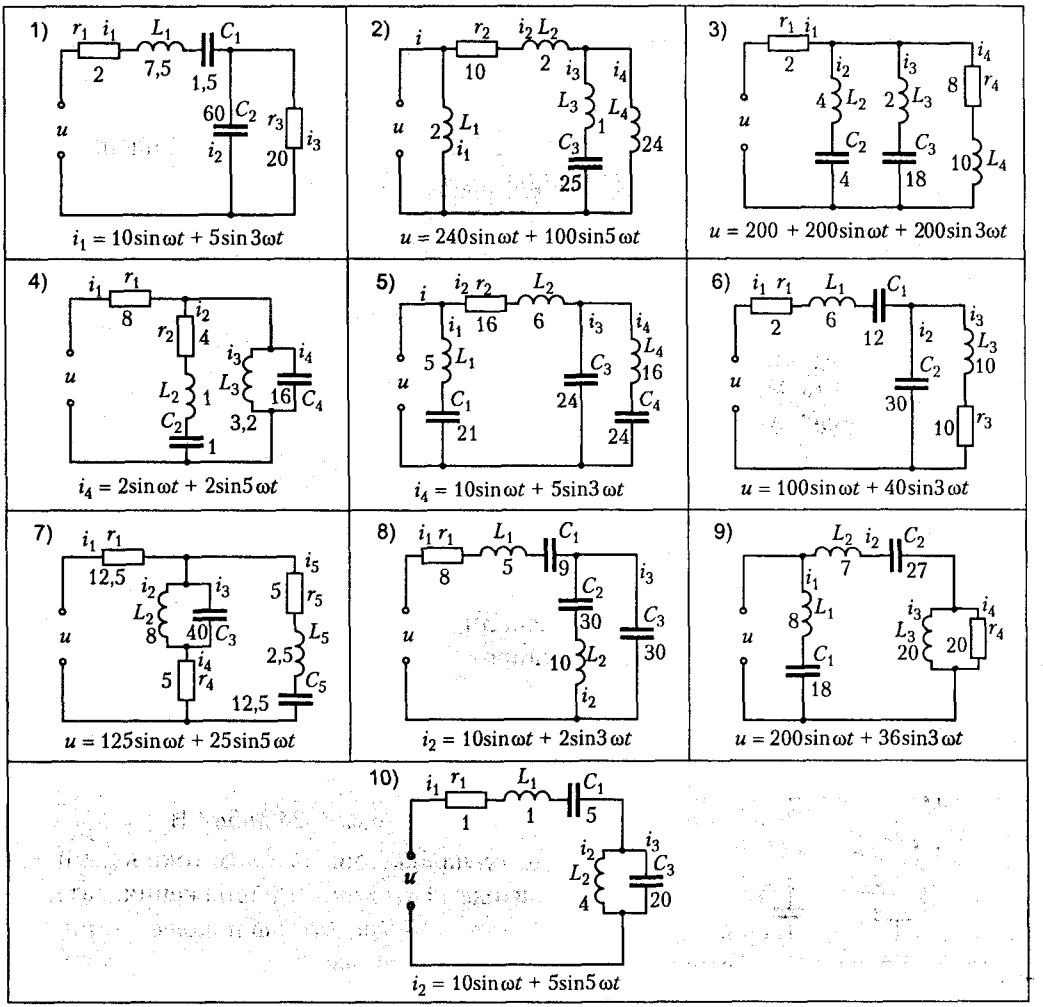
что совпадает с комплексной мощностью приемников.

5. Расчет электрических цепей при периодических несинусоидальных ЭДС, напряжениях, токах

Рассчитайте токи во всех ветвях и активную мощность в электрической цепи, схема которой приведена в табл. П5.1. Найдите действующие значения тока и напряжения на входе цепи. Постройте зависимости напряжения $u(t)$ тока $i(t)$ на входе цепи.

Сопротивления элементов цепи для тока частоты ω (первой гармонической) указаны в таблице в омах, токи — в амперах, напряжения — в вольтах.

Таблица П5.1



МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

В соответствии с условием расчетного задания может быть задано либо напряжение на входе цепи либо ток в одной из ее ветвей. Последовательность вычислений в этих случаях оказывается различной (см. задание 3).

Поскольку заданное на входе напряжение (либо ток в одной из ветвей) представлено в виде суммы составляющих

$$u(t) = U_0 + U_{m1}\sin(\omega t + \psi_1) + U_{mk}\sin(k\omega t + \psi_k),$$

каждая из которых изменяется с известной частотой, то для нахождения токов в ветвях используем метод наложения. Вначале рассчитываем токи в ветвях при действии на входе цепи постоянного напряжения U_0 ($\omega = 0$). Затем находим токи при действии на входе цепи напряжения частотой ω и далее — напряжения частотой $k\omega$. В результате ток в любой из ветвей получаем в виде

$$i(t) = I_0 + I_{m1}\sin(\omega t + \psi_1) + I_{mk}\sin(k\omega t + \psi_k).$$

При нахождении постоянных токов все катушки индуктивности замыкаем накоротко, а все ветви, содержащие конденсаторы, размыкаем. Таким образом, цепь будет содержать только резисторы.

Для расчета токов k-й гармоники сопротивления каждого из конденсаторов следует записать как $1/k\omega C$, а каждой катушки индуктивности — как $k\omega L$. Например, при заданных сопротивлениях $1/(\omega C) = 30$ Ом конденсатора и $\omega L = 10$ Ом катушки индуктивности сопротивления этих элементов току 5-й гармоники равны соответственно 6 Ом и 50 Ом. Сопротивления резисторов остаются неизменными для тока любой из гармоник. Токи каждой из гармоник рассчитываем комплексным методом.

После расчета комплексных токов и напряжений ветвей следует записать мгновенные значения токов и напряжений каждой из гармоник и после этого сложить мгновенные значения токов в каждой из ветвей. В общем случае ток ветви содержит как постоянную, так и синусоидальные составляющие различных частот. Однако в частном случае, когда в ветви имеется конденсатор, постоянная составляющая тока ветви равна нулю. Ток ветви может также не содержать и какую-либо из гармоник, хотя она может и присутствовать во входном напряжении. В этом случае участок цепи либо вся цепь настроены в резонанс на соответствующую частоту входного напряжения.

ПРИМЕР РАСЧЕТА

Рассчитаем искомые величины в цепи, схема которой изображена на рис. П5.1

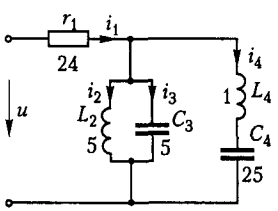


Рис. П5.1

На входе цепи действует напряжение

$$u(t) = 48 + 48\sin\omega t + 24\sin 5\omega t \text{ В}.$$

Используя метод наложения, находим токи в цепи при действии на ее входе постоянного напряжения, затем — при действии напряжения частотой ω и далее — при действии напряжения частотой 5ω.

а) Расчет токов при действии на входе цепи постоянного напряжения U_0 =48 В.

Ветви, в которых имеются конденсаторы, разрываем ($1/\omega C = \infty$), катушки индуктивности замыкаем накоротко ($\omega L = 0$). Получаем: $r_{экв} = 24$ Ом,

$$I_1 = I_2 = 48/24 = 2\text{A}, \; I_3 = I_4 = 0.$$

б) Расчет токов при действии на входе цепи напряжения частотой ω.

Так как в контуре с элементами L_2, C_3 имеем резонанс, то

$$Z_{23} = \infty \text{ и } Z_{экв} = 24 - j24 \text{ Ом}.$$

Далее получаем:

$$\dot{I}_{1m} = \dot{I}_{4m} = \dot{U}_m / Z_{экв} = 48/(24 - j24) = 1 + j \text{ А},$$

$$\dot{U}_{2m} = \dot{U}_{3m} = \dot{U}_{4m} = 48 - 24 - j24 = 24 - j24 \text{ В},$$

$$\dot{I}_{2m} = \dot{U}_{2m}/Z_2 = (24 - j24)/j5 = 4{,}8(-1 - j)\text{А},$$

$$\dot{I}_{3m} = \dot{U}_{3m}/Z_3 = (24 - j24)/(-j5) = 4{,}8(1 + j) \text{ А},$$

$$i_1 \cong 1{,}41\sin(\omega t + 45°) \text{ А}, \; i_2 \cong 6{,}77\sin(\omega t - 135°) \text{ А},$$

$$i_3 \cong 6{,}77\sin(\omega t + 45°) \text{ А}, \; i_4 \cong 1{,}41\sin(\omega t + 45°) \text{ А}.$$

в) Расчет токов при действии на входе цепи напряжения частотой 5ω.

Имеем $r_1 = 24$ Ом, $Z_2 = j\,25$ Ом, $Z_3 = -j$ Ом, $Z_4 = 0$.

Так как в четвертой ветви имеем резонанс, то получаем $Z_{экв} = 24$ Ом и $\dot{I}_{1m} = 1$А, $\dot{I}_{2m} = \dot{I}_{3m} = 0$, $\dot{I}_{4m} = \dot{I}_{1m} = 1$А, $i_1 = 1\sin 5\omega t$ А, $i_2 = i_3 = 0$, $i_4 = 1\sin 5\omega t$ А.

Таким образом, токи в ветвях равны:

$$i_1 = 2 + 1{,}41\sin(\omega t + 45°) + 1\sin 5\omega t \text{ А}, \; i_2 = 2 + 6{,}77\sin(\omega t - 135°) \text{ А},$$

$$i_3 = 6{,}77\sin(\omega t + 45°) \text{ А}, \; i_4 = 1{,}41\sin(\omega t + 45°) + 1\sin 5\omega t \text{ А}.$$

Действующие значения напряжения на входе цепи и тока I_1:

$$U = \sqrt{48^2 + \frac{48^2}{2} + \frac{24^2}{2}} \cong 61{,}2 \text{ В}, \; I_1 = \sqrt{2^2 + \frac{2}{2} + \frac{1}{2}} \cong 2{,}35 \text{ А}.$$

Активная мощность в цепи $P = I_1^2 r = 5{,}5 \cdot 24 = 132$ Вт.

УЧЕБНИК / ДЛЯ ВУЗОВ

К. С. Демирчян, Л. Р. Нейман,
Н. В. Коровкин, В. Л. Чечурин

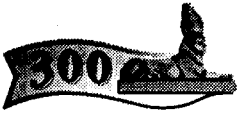
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

ТОМ 1

4-е издание

дополненное для самостоятельного изучения курса

Допущено Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров и магистров «Электротехника, электромеханика и электротехнологии» и «Электроэнергетика»



300.piter.com

Издательская программа

300 лучших учебников для высшей школы в честь 300-летия Санкт-Петербурга

осуществляется при поддержке Министерства образования РФ

ПИТЕР®

**Москва · Санкт-Петербург · Нижний Новгород · Воронеж · Ростов-на-Дону
Новосибирск · Екатеринбург · Самара · Киев · Харьков · Минск**

2004

Содержание

Предисловие 9

Введение 11

ЧАСТЬ I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ

Глава 1. Обобщение понятий и законов электромагнитного поля 17

1.1. Общая физическая основа задач теории электромагнитного поля и теории электрических и магнитных цепей 17
1.2. Заряженные элементарные частицы и электромагнитное поле как особые виды материи 18
1.3. Связь между электрическими и магнитными явлениями. Электрическое и магнитное поля как две стороны единого электромагнитного поля 21
1.4. Связь заряда частиц и тел с их электрическим полем. Теорема Гаусса 26
1.5. Поляризация веществ. Электрическое смещение. Постулат Максвелла 29
1.6. Электрические токи проводимости, переноса и смещения 35
1.7. Принцип непрерывности электрического тока 42
1.8. Электрическое напряжение. Разность электрических потенциалов. Электродвижущая сила 44
1.9. Магнитный поток. Принцип непрерывности магнитного потока 52
1.10. Закон электромагнитной индукции 55
1.11. Потокосцепление. ЭДС самоиндукции и взаимной индукции. Принцип электромагнитной инерции 59
1.12. Потенциальное и вихревое электрические поля 62
1.13. Связь магнитного поля с электрическим током 65
1.14. Намагниченность вещества и напряженность магнитного поля 69
1.15. Закон полного тока 73
1.16. Основные уравнения электромагнитного поля 74

Глава 2. Энергия и механические проявления электрического и магнитного полей 76

2.1. Энергия системы заряженных тел. Распределение энергии в электрическом поле 76
2.2. Энергия системы контуров с электрическими токами. Распределение энергии в магнитном поле 79
2.3. Силы, действующие на заряженные тела 83
2.4. Электромагнитная сила 87

Вопросы, упражнения, задачи к главам 1 и 2 95

1.1. Связь заряда частиц и тел с их электрическим полем. Теорема Гаусса 95
1.2. Электрическое смещение. Постулат Максвелла 98
1.3. Виды электрического тока и принцип непрерывности электрического тока 100
1.4. Электрическое напряжение и потенциал 103
1.5. Магнитная индукция. Принцип непрерывности магнитного потока 106

1.6. Закон электромагнитной индукции 107
1.7. Индуктивность и взаимная индуктивность 110
1.8. Потенциальное и вихревое электрические поля 113
1.9. Связь магнитного поля с электрическим током 114
1.10. Намагниченность вещества и закон полного тока 116
2.1. Энергия системы заряженных тел. Энергия контуров с токами 120
2.2. Силы, действующие на заряженные тела. Электромагнитная сила 123

Глава 3. Основные понятия и законы теории электрических цепей 129
3.1. Электрические и магнитные цепи 129
3.2. Элементы электрических цепей. Активные и пассивные части электрических цепей 130
3.3. Физические явления в электрических цепях. Цепи с распределенными параметрами 132
3.4. Научные абстракции, принимаемые в теории электрических цепей, их практическое значение и границы применимости. Цепи с сосредоточенными параметрами 135
3.5. Параметры электрических цепей. Линейные и нелинейные электрические и магнитные цепи 138
3.6. Связи между напряжением и током в основных элементах электрической цепи 142
3.7. Условные положительные направления тока и ЭДС в элементах цепи и напряжения на их зажимах 144
3.8. Источники ЭДС и источники тока 146
3.9. Схемы электрических цепей 149
3.10. Топологические понятия схемы электрической цепи. Граф схемы 153
3.11. Матрица узловых соединений 155
3.12. Законы электрических цепей 157
3.13. Узловые уравнения для токов в цепи 160
3.14. Контурные уравнения цепи. Матрица контуров 163
3.15. Уравнения для токов в сечениях цепи. Матрица сечений 165
3.16. Связи между матрицами соединений, контуров и сечений 168
3.17. Полная система уравнений электрических цепей. Дифференциальные уравнения процессов в цепях с сосредоточенными параметрами 171
3.18. Анализ и синтез — две основные задачи теории электрических цепей 174

ЧАСТЬ II. ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Глава 4. Основные свойства и эквивалентные параметры электрических цепей при синусоидальных токах 177
4.1. Синусоидальные ЭДС, напряжения и токи. Источники синусоидальных ЭДС и токов 177
4.2. Действующие и средние значения периодических ЭДС, напряжений и токов . . . 180
4.3. Изображение синусоидальных ЭДС, напряжений и токов с помощью вращающихся векторов. Векторные диаграммы 182

4.4. Установившийся синусоидальный ток в цепи с последовательным соединением участков *r*, *L* и *C* . . . 183
4.5. Установившийся синусоидальный ток в цепи с параллельным соединением участков *g*, *L* и *C* . . . 187
4.6. Активная, реактивная и полная мощности . . . 189
4.7. Мгновенная мощность и колебания энергии в цепи синусоидального тока . . . 192
4.8. Эквивалентные параметры сложной цепи переменного тока, рассматриваемой в целом как двухполюсник . . . 195
4.9. Схемы замещения двухполюсника при заданной частоте . . . 198
4.10. Влияние различных факторов на эквивалентные параметры цепи . . . 200

Вопросы, упражнения, задачи к главам 3 и 4 . . . 202
3.1. Элементы электрических цепей . . . 202
3.2. Источники в электрических цепях . . . 204
3.3. Топологические понятия схемы электрической цепи . . . 205
3.4. Законы Кирхгофа . . . 206
3.5. Топологические матрицы . . . 207
3.6. Уравнения электрических цепей . . . 210
4.1. Характеристики синусоидальных ЭДС, напряжений и токов . . . 210
4.2. Векторные диаграммы . . . 213
4.3. Ток в цепи с последовательным и параллельным соединением элементов *r*, *L*, *C* . . . 216
4.4. Мощность в цепи синусоидального тока . . . 218
4.5. Эквивалентные параметры цепи, рассматриваемой как двухполюсник . . . 221

Глава 5. Методы расчета электрических цепей при установившихся синусоидальном и постоянном токах . . . 224
5.1. Комплексный метод . . . 224
5.2. Комплексные сопротивление и проводимость . . . 228
5.3. Выражения законов Ома и Кирхгофа в комплексной форме . . . 229
5.4. Расчет мощности по комплексным напряжению и току . . . 230
5.5. Расчет при последовательном соединении участков цепи . . . 231
5.6. Расчет при параллельном соединении участков цепи . . . 231
5.7. Расчет при смешанном соединении участков цепи . . . 232
5.8. О расчете сложных электрических цепей . . . 233
5.9. Расчет цепи, основанный на преобразовании соединения треугольником в эквивалентное соединение звездой . . . 238
5.10. Преобразование источников ЭДС и тока . . . 240
5.11. Метод контурных токов . . . 242
5.12. Метод узловых напряжений . . . 249
5.13. Метод сечений . . . 255
5.14. Метод смешанных величин . . . 258
5.15. Принцип наложения и основанный на нем метод расчета цепи . . . 263
5.16. Принцип взаимности и основанный на нем метод расчета цепи . . . 265
5.17. Метод эквивалентного генератора . . . 267

5.18. Расчет цепей при наличии взаимной индукции 270
5.19. Трансформаторы с линейными характеристиками. Идеальный трансформатор 275
5.20. Цепи, связанные через электрическое поле 279
5.21. Баланс мощностей в сложной цепи 280
5.22. Расчет сложных цепей при постоянном токе 281
5.23. Проблемы расчета установившихся режимов сложных электрических цепей 282
5.24. Топологические методы расчета цепей 283

Вопросы, упражнения, задачи к главе 5 288

5.1. Комплексный метод 288
5.2. Методы расчета сложных электрических цепей 293
5.3. Расчет электрических цепей при наличии взаимной индукции 298

Глава 6. Резонансные явления и частотные характеристики 302

6.1. Понятие о резонансе и о частотных характеристиках в электрических цепях. . . 302
6.2. Резонанс в случае последовательного соединения участков *r*, *L*, *C* 302
6.3. Частотные характеристики цепи с последовательным соединением участков *r*, *L*, *C* 304
6.4. Резонанс при параллельном соединении участков *g*, *L*, *C* 307
6.5. Частотные характеристики цепи с параллельным соединением участков *g*, *L*, *C* 309
6.6. Частотные характеристики цепей, содержащих только реактивные элементы 311
6.7. Частотные характеристики цепей в общем случае 314
6.8. Резонанс в индуктивно-связанных контурах 317
6.9. Практическое значение явления резонанса в электрических цепях 318

Глава 7. Расчет трехфазных цепей 321

7.1. Многофазные цепи и системы и их классификация 321
7.2. Расчет трехфазной цепи в общем случае несимметрии ЭДС и несимметрии цепи 325
7.3. Получение вращающегося магнитного поля 327
7.4. Разложение несимметричных трехфазных систем на симметричные составляющие 329
7.5. О применении метода симметричных составляющих к расчету трехфазных цепей 331

Глава 8. Расчет электрических цепей при несинусоидальных периодических ЭДС, напряжениях и токах 335

8.1. Метод расчета мгновенных установившихся напряжений и токов в линейных электрических цепях при действии периодических несинусоидальных ЭДС 335
8.2. Зависимость формы кривой тока от характера цепи при несинусоидальном напряжении 338
8.3. Действующие периодические несинусоидальные токи, напряжения и ЭДС 340

8.4. Активная мощность при периодических несинусоидальных токах и напряжениях . . . 341
8.5. Особенности поведения высших гармоник в трехфазных цепях. . . . 343
8.6. О составе высших гармоник при наличии симметрии форм кривых тока или напряжения . . . 344
8.7. Представление ряда Фурье в комплексной форме . . . 346
8.8. Биения колебаний . . . 348
8.9. Модулированные колебания . . . 350

Вопросы, задачи и упражнения к главам 6, 7 и 8 . . . 352
6.1. Резонанс при последовательном соединении элементов *r*, *L*, *C* . . . 352
6.2. Резонанс при параллельном соединении элементов *g*, *L*, *C* . . . 353
6.3. Резонанс в цепях, содержащих только реактивные элементы . . . 355
6.4. Частотные характеристики электрических цепей . . . 357
6.5. Резонанс в электрических цепях произвольного вида . . . 358
7.1. Классификация многофазных цепей и систем . . . 359
7.2. Расчет трехфазных электрических цепей . . . 362
7.3. Вращающееся магнитное поле . . . 363
7.4. Метод симметричных составляющих . . . 364
8.1. Расчет электрических цепей при периодических несинусоидальных напряжениях . . . 365
8.2. Форма кривых тока в электрической цепи при несинусоидальном напряжении . . . 368
8.3. Действующие значения периодических несинусоидальных величин. Активная мощность . . . 368
8.4. Высшие гармоники в трехфазных цепях . . . 370

Ответы на вопросы, решения упражнений и задач . . . 371
1.1. Связь заряда частиц и тел с их электрическим полем. Теорема Гаусса . . . 371
1.2. Электрическое смещение. Постулат Максвелла . . . 373
1.3. Виды электрического тока и принцип непрерывности электрического тока . . . 375
1.4. Электрическое напряжение и потенциал . . . 377
1.5. Магнитная индукция. Принцип непрерывности магнитного потока . . . 380
1.6. Закон электромагнитной индукции . . . 380
1.7. Индуктивность и взаимная индуктивность . . . 383
1.8. Потенциальное и вихревое электрические поля . . . 385
1.9. Связь магнитного поля с электрическим током . . . 385
1.10. Намагниченность вещества и закон полного тока . . . 387
2.1. Энергия системы заряженных тел. Энергия контуров с токами . . . 389
2.2. Силы, действующие на заряженные тела. Электромагнитная сила . . . 391
3.1. Элементы электрических цепей . . . 396
3.2. Источники в электрических цепях . . . 398
3.3. Топологические понятия схемы электрической цепи . . . 399
3.4. Законы Кирхгофа . . . 399
3.5. Топологические матрицы . . . 399

3.6. Уравнения электрических цепей . . . 399
4.1. Характеристики синусоидальных ЭДС, напряжений и токов . . . 400
4.2. Векторные диаграммы . . . 400
4.3. Ток в цепи с последовательным и параллельным соединением элементов *r, L, C* . . . 402
4.4. Мощность в цепи синусоидального тока . . . 404
4.5. Эквивалентные параметры цепи, рассматриваемой как двухполюсник . . . 405
5.1. Комплексный метод . . . 407
5.2. Методы расчета сложных электрических цепей . . . 413
5.3. Расчет электрических цепей при наличии взаимной индукции . . . 422
6.1. Резонанс при последовательном соединении элементов *r, L, C* . . . 424
6.2. Резонанс при параллельном соединении элементов *g, L, C* . . . 426
6.3. Резонанс в цепях, содержащих реактивные элементы . . . 427
6.4. Частотные характеристики электрических цепей . . . 429
6.5. Резонанс в электрических цепях произвольного вида . . . 430
7.1. Классификация многофазных цепей и систем . . . 432
7.2. Расчет трехфазных электрических цепей . . . 434
7.3. Вращающееся магнитное поле . . . 434
7.4. Метод симметричных составляющих . . . 435
8.1. Расчет электрических цепей при периодических несинусоидальных напряжениях . . . 437
8.2. Форма кривых тока в электрической цепи при несинусоидальном напряжении . . . 439
8.3. Действующие значения периодических несинусоидальных величин. Активная мощность . . . 440
8.4. Высшие гармоники в трехфазных цепях . . . 440

Расчетные задания

1. Расчет электростатического поля и электрической емкости . . . 441
2. Расчет электрических цепей синусоидального тока. Применение векторных диаграмм . . . 445
3. Расчет электрических цепей синусоидального тока комплексным методом . . . 447
4. Расчет сложных электрических цепей синусоидального тока . . . 450
5. Расчет электрических цепей при периодических несинусоидальных ЭДС, напряжениях, токах . . . 450

Алфавитный указатель . . . 458